This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

B 1,237,207

Digitized by Google

Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest

Digitized by Google

Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest

Digitized by Google

Digitized by Google

AS
182
.G552

Digitized by Google

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

122685

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1897.

Göttingen,

Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung
Lüder Horstmann.

1897.

Digitized by Google

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Digitized by Google

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1897.

E. Ehlers, Zur Kenntnis der ostafrikanischen Borstenwürmer S. 158
C. Fromme, Ueber die magnetische Nachwirkung . . . . „ 177
P. Gordan, Der Hermitesche Reciprocitätssatz . . . . . „ 182
K. Hensel, Ueber die Bestimmung der Discriminante eines algebraischen Körpers . . . . . „ 247
— — Ueber die Fundamentalgleichung und die außerwesentlichen Discriminantentheiler eines algebraischen Körpers . . . . . „ 254
D. Hilbert, Ueber diophantische Gleichungen . . . . . „ 48
— — Ueber die Entwickelung einer beliebigen analytischen Function einer Variabeln in eine unendliche nach ganzen rationalen Functionen fortschreitende Reihe . „ 63
A. Hurwitz, Ueber die Erzeugung der Invarianten durch Integration . . . . . „ 71
— — Ueber lineare Formen mit ganzzahligen Variabeln . „ 139
— — Ueber die Entwicklungscoefficienten der lemniscatischen Functionen . . . . . „ 273
F. Klein, Erwerbung neuer auf Bernhard Riemann bezüglicher Manuscripte . . . . . „ 189
L. Krüger, Ueber einen Satz der Theoria Combinationis . „ 146
G. Landsberg, Zur Algebra des Riemann-Roch'schen Satzes „ 91
— — Ueber Modulsysteme zweiter Stufe und Zahlenringe „ 277
H. Minkowski, Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder . . . . . „ 198
O. Mügge, Ueber Translationen und verwandte Erscheinungen in Krystallen . . . . . „ 102
R. Müller, Ueber die angenäherte Geradführung durch das ebene Gelenkviereck . . . . . „ 13
J. Orth, Arbeiten aus dem pathologischen Institut in Göttingen. Vierter Bericht . . . . . „ 124

Digitized by Google

W. Schur, Ueber die Abplattung des Planeten Mars . . . S. 17
J. R. Schütz, Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie „ 110
P. Stäckel, Mittheilungen aus dem Briefwechsel von Gauss und W. Bolyai . . . . . „ 1
W. Voigt, Zur kinetischen Theorie idealer Flüssigkeiten . „ 19
— — Bestimmung relativer Wärmeleitfähigkeiten nach der Isothermenmethode . . . . . „ 184
— — Weiteres zur kinetischen Theorie des Verdampfungsprocesses . . . . . „ 261
O. Wallach, Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium zu Göttingen (VI). . . . . „ 304
E. Wiechert, Ueber die Massenvertheilung im Innern der Erde . . . . . „ 221
A. Wiman, Note über die Vertauschungsgruppen von acht Dingen . . . . . „ 55
— — Note über die symmetrischen und alternirenden Vertauschungsgruppen von n Dingen . . . . . „ 191
W. Wirtinger, Ueber die Green'sche Function eines von getrennten sphärischen Mannigfaltigkeiten begrenzten Gebietes . . . . . „ 244

Digitized by Google

Mitteilungen aus dem Briefwechsel von Gauss und W. Bolyai.

Von

P. Stäckel in Königsberg i. Pr.

Vorgelegt von dem vorsitzenden Secretär in der Sitzung vom 9. Januar 1897.

In dem Briefwechsel von Gauss und W. Bolyai, von dem die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften in dankenswerter Weise eine Abschrift meinem Freunde Franz Schmidt in Budapest zur Verfügung gestellt hat, findet sich eine Anzahl sehr interessanter Stellen zur Entwickelungsgeschichte der Parallelentheorie, welche ich auf dessen Ersuchen ausgezogen habe und gleich hier veröffentliche, da die Fertigstellung der von meinem Freunde schon lange Zeit vorbereiteten neuen Biographie der beiden Bolyai noch einige Zeit in Anspruch nehmen wird.

Die in dem Briefe Bolyais vom 16. September 1804 erwähnte und dem Briefe beigelegte *Göttingische Theorie der Parallelen* von Wolfgang Bolyai selbst habe ich der Kürze wegen hier nicht aufgenommen, hoffe sie aber demnächst in einer andern Zeitschrift zum Abdrucke bringen zu können.

1.

Gauss an W. Bolyai, Helmstedt, den 16. Dec. 1799[1]).

Es thut mir sehr leid, dass ich unsere ehemalige grössere Nähe nicht benutzt habe, um mehr von Deinen Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie zu erfahren; ich würde mir gewiss dadurch manche vergebliche Mühe erspart haben u. ruhiger ge-

1) Dieser Brief ist in der Hauptsache bereits von Herrn Geheimrath Schering im Jahre 1877 bei Gelegenheit der Centenarfeier von Gauss mitgetheilt worden.

Digitized by Google

worden sein, als jemand wie ich es sein kann solange bei einem solchen Gegenstande noch so viel zu desideriren ist. Ich selbst bin in meinen Arbeiten darüber weit vorgerückt (wie wol mir meine anderen ganz heterogenen Geschäfte wenig Zeit dazu lassen); allein der Weg den ich eingeschlagen habe, führt nicht so wol zu dem Ziele das man wünscht und welches Du erreicht zu haben versicherst, als vielmehr dahin, die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft zu machen. Zwar bin ich auf manches gekommen, was bei den meisten schon für einen Beweis gelten würde, aber was in meinen Augen so gut wie NICHTS beweiset z. B. wenn man beweisen könnte dass ein geradlinigtes Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als jede gegebne Fläche so bin ich im Stande die ganze Geometrie völlig streng zu beweisen. Die meisten würden nun wol jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht; es wäre ja wol möglich, dass so entfernt man auch die drei Endpunkte des Δ im Raume von einander annähme, doch der Inhalt immer unter (infra) einer gegebenen Grenze wäre. Dergleichen Sätze habe ich mehrere aber in keinem finde ich etwas Befriedigendes. Mach doch ja Deine Arbeit bald bekannt; gewiss wirst Du dafür den Dank nicht zwar des grofsen Publikums (worunter auch mancher gehört der für einen geschickten Math. gehalten wird) einerndten, denn ich überzeuge mich immermehr, dass die Zahl wahrer Geometer äusserst gering ist und die meisten die Schwierigkeiten bei solchen Arbeiten weder beurtheilen noch selbst einmal sie verstehen können — aber geniess den Dank aller derer deren Urtheil Dir allein wirklich schätzbar sein kann. — In Braunschweig ist ein Emigrant Namens Chauvelot, ein nicht schlechter Geometer, welcher vorgiebt, die Theorie der Parallellinien ganz begründet zu haben, und seine Arbeit nächstens wird drucken lassen, aber ich verspreche mir nichts von ihm. Im Hindenburgs Archiv 9tes Stück, befindet sich gleichfalls ein neuer Versuch über denselben Gegenstand, von einem gewissen Hauff, welcher unter aller Kritik ist.

2.

W. Bolyai an Gauss, Maros Vásárhely, den 16. Sept. 1804.

Ich fiel auf den Gedanken, anstatt Zeit (nonum annum) und Fülle der Umstände ganz abzuwarten, Dir halbbogenweis damit der Brief nicht verdächtig werde auf der Post einiges zu schicken. In diesen Brief eingeschlossen schicke ich Dir Meine Göttingische Theorie der Parallelen; auf den nächsten Posten bin ich willens

Digitized by Google

die Grundlage der Arithmetik und Geometrie Dir zu schicken, welches auf drei Posten geschehen kan; wenn Dich etwas das System selbst interessiren sollte, das könnte mir doch eine Gelegenheit seyn. — In etwa drei Jahren ist diese Theorie gelegen, Umstände hielten mich ab — nun habe ich sie beim Lehren hervornehmen müssen, und es in einen engern Raum gepresst. Ich kan den Fehler nicht entdecken, prüfe Du der Wahrheit getreu, und schreibe mir sobald als nur möglich, schreibe Deine Einwendungen, oder wenn ich mich schlecht oder etwa zu kurz ausgedrückt oder im schreiben gefehlt hätte, ich habe es durch einen Studenten schreiben lassen, da ich nicht schön schreibe, aber ich hatte Mühe die Fehlern zu verbessern, und es kann auch jetzt in irgend einem Buchstaben auch von mir übersehen geworden seyn. Hier ist kein Geschmack vor so was, auch sonst überhaupt bin ich von den hiesigen Aftergelehrten verdammt — Wenn Du dieses Werkchen davor werth hieltest (ich setze den Fall) so schicke es einer würdigen Akademie hin, das es beurtheilt werde (es soll gestempelt seyn). Ich bin auch auf die schlechte Seite gefasst, wiewohl ich nicht läugne, dass ich es noch nicht herausgegeben hätte, wenn ich um ruhiger leben zu können zwischen meinen vielen Richtern, nicht um etwas äufsere Ehre zu hazardiren gezwungen wäre — Weist Du! was Hamlet sagt „the spurns, that patient merit of th' unworthy takes".[1])

3.

Gauss an W. Bolyai, Braunschweig, den 25. Nov. 1804.

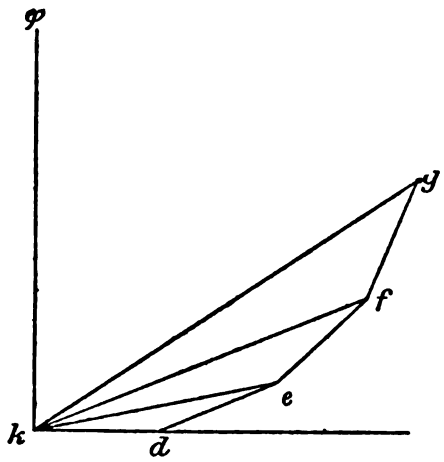
Nun . . . . noch Einiges über deine geometrische Mittheilung. Ich habe Deinen Aufsatz mit grossem Interesse und Aufmerksamkeit durchgelesen, und mich recht an dem ächten gründlichen Scharfsinne ergötzt. Du willst aber nicht mein leeres Lob, das auch gewissermaassen schon darum partheiisch scheinen könnte, weil dein Ideengang sehr viel mit dem meinigen Aehnliches hat, worauf ich ehemals die Lösung dieses Gordischen Knotens versuchte, und vergebens bis jetzt versuchte. Du willst nur mein aufrichtiges unverholenes Urtheil. Und dies ist, dass dein Verfahren mir noch nicht Genüge leistet. Ich will versuchen, den Stein des Anstofses, den ich noch darin finde (und der auch wie-

1) [Die dem Briefe beigelegte lateinisch geschriebene *Theoria parallelarum* umfafst sieben enggeschriebene Quartseiten, dazu $1^1/_2$ Seiten Figuren.]

Digitized by Google

der zu derselben Gruppe von Klippen gehört woran meine Versuche bisher scheiterten) mit so vieler Klarheit als mir möglich ist ans Licht zu ziehen. Ich habe zwar noch immer die Hofnung, dass jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende, eine Durchfahrt erlauben werden. Indess habe ich jetzt so manche andere Beschäftigung vor der Hand, dass ich gegenwärtig daran nicht denken kann, und glaube mir, es soll mich herzlich freuen, wenn Du mir zuvorkommst, und es Dir gelingt alle Hindernisse zu übersteigen. Ich würde dann mit der innigsten Freude alles thun, um Dein Verdienst gelten zu machen und ins Licht zu stellen, soviel in meinen Kräften steht. Ich komme nun sogleich zur Sache.

Bei allen übrigen Schlüssen finde ich gar nichts wesentliches einzuwenden: was mich nicht überzeugt hat ist blofs das Räsonnement im XIII Artikel. Du denkst dir daselbst eine ins Unbestimmte fortgeführte Linie Π . . . *kdefg* . . . die aus lauter geraden und gleichen Stücken besteht *kd*, *de*, *ef*, *fg*, &c und wo die Winkel *kde*, *def*, *efg*, &c einander gleich sind, und willst beweisen, dass Π über kurz oder lang nothwendig über $k\varphi$ hinaus gehen werde. Zu dieser Absicht lässest du die gerade Linie $kd\infty = Q$ sich nach der Seite zu wo Π liegt um *k* herumbewegen, so dafs sie nach und nach von einer Seite des Polygons Π zur folgenden kommt. Du zeigst vortrefflich dass Q so wie es stufenweise durch *d*, *e*, *f*, *g* &c geht jedesmal näher an $k\varphi$ kommt: gegen alles dieses lässt sich Nichts einwenden: aber nun fährst Du fort.



„Quapropter Q moveri potest modo praescripto usque dum in $k\varphi\varphi'\infty$ pervenerit" &c und diese Schlussfolge ist die mir nicht einleuchtet. Aus deinem Räsonnement folgt meiner Einsicht nach noch gar nicht, dass der Winkel, um den Q, beim Durchlaufen einer Seite von Π . . . .[1]), der $k\varphi$ näher kommt, nicht etwa immer unbedeutender werde, so dass das Aggregat aller successiven An-

1) [Das hier stehende Wort ist durch einen Knick des Papieres unleserlich geworden.]

Digitized by Google

näherungen, so oft sie auch wiederholt werden, dennoch immer noch nicht grofs [genug] werden könnte, um Q in $k\varphi$ zu bringen, könntest Du beweisen, dass $dke = ekf = fkg$ etc. so wäre die Sache gleich aufs Reine. Aber dieser Satz ist zwar wahr, allein schwerlich ohne die Theorie der Parallelen schon vorauszusetzen, strenge zu beweisen. Man könnte also immer noch besorgen, dass die Winkel dke, ekf, fkg &c successive abnehmen. Geschähe dies (bloss exempli gratia) in einer geometrischen Progression, so dass $ekf = \psi \times dke$, $fkg = \psi \times dke$ &c (sodass ψ kleiner als 1), so würde die Summe aller Annäherungen, so viele Male man sie auch fortsetzte, doch immer kleiner als $\frac{1}{1-\psi} \times ekf$ bleiben, und diese Grenze könnte dann immer noch kleiner als der rechte Winkel $dk\varphi$ sein. Du hast mein aufrichtiges Urtheil verlangt: ich habe es gegeben, und ich wiederhole nochmals die Versicherung, dass es mich innig freuen soll, wenn Du alle Schwierigkeiten überwindest.

4.

W. Bolyai an Gauss, Maros Vásárhely, den 20. Juni 1831.

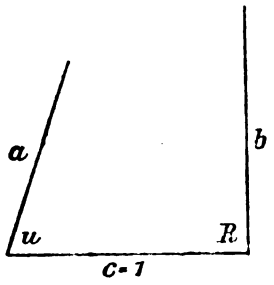
[Mein Sohn] ist schon OberLieutenant im Génie Corps, und wird schon bald Hauptman ein schöner Jüngling, virtuos auf der Violin, guter Fechter und brav, aber hat oft duellirt, und ist überhaupt noch ein zu wilder Soldat — aber auch sehr fein — Licht in Finsternis — und Finsternis im Lichte, und ein passionirter Mathematiker mit sehr seltenen Geistes Fähigkeiten — itzt ist er in Lemberg in Garnison — ein grofser Verehrer von Dir — Dich zu verstehen und zu schätzen fähig. — Auf seine Bitte schicke ich dieses sein Werkchen zu Dir: habe die Güte, es mit Deinem scharfen durchdringenden Auge zu beurtheilen, und Dein hohes Urtheil ohne Schonung in Deiner Antwort, auf die ich sehnsuchtsvoll warte, zu schreiben. Es ist der erste Anfang von meinem Werke, welches unter der Presse ist; ich war Willens den 1ten Band itzt mitzuschicken; er ist aber noch nicht heraus.

[Auf der Innenseite des Briefumschlages schreibt W. Bolyai noch Folgendes:]

Nach meiner Ansicht, wird im Werkchen meines Sohnes, u (nehmlich wo a die b zuerst nicht schneidet, für $c =$ der Einheit der Geraden) geometrisch construiert; woraus aber nicht bestimmt wird, wie grofs u sey, von 0 an bis R (jenes aus-, dieses eingeschlossen). Jedoch was immer in der Geometrie, ist von u entweder abhängig oder nicht; (z. B.) die sphärische Trigonometrie

Digitized by Google

wird davon unabhängig § 26. festgesetzt, so wie die Oberfläche der Sphaere oder Zone —&c. Was aber davon abhängt, wird alles durch eine gewisse Function von u ausgedrückt, wo nichts als die Gröfse von u unbestimmt bleibt, und wahr für jeden subjectiv möglichen Werth von u ist; wenn nehmlich für einen gewissen Fall $f(u) = y$ und u durch abscisse (wachsend von 0 bis R) und y durch die entsprechende Ordinate vorgestellt wird, so wird die Gröfse von y für jeden Wert von u, auch für $u = R$ in der Gränze durch den allgemeinen von u abhängigen Ausdruck ausgedrückt — Er bedient sich gewisser grofser und kleiner Buchstaben, die aber alle gewisse Functionen von u sind; und es wäre eleganter und klarer gewesen, sie so auszudrücken, da es aus dem Werke selbst leicht zu thun ist — übrigens ist dieses nichts mehr und nur in Worten, von dem, was im Werke steht, verschieden. Am Ende zeigt er auch, dass wenn u nicht $= R$, so ist der Cirkel quadrieret.



5.

W. Bolyai an Gauss, Maros Vásárhely, den 16. Jan. 1832.

[W. Bolyai übersendet Gauss die Parallelentheorie seines Sohnes und schreibt bei dieser Gelegenheit:]

Mein Sohn war nicht gegenwärtig, wie sein Werkchen gedruckt wurde: er lies die Errata (die hinten sind) drucken; ich habe die meisten, um Dir weniger lästig zu seyn, mit Feder corrigirt — Er schreibt aus Lemberg, das er nachdem manches vereinfacht und eleganter gemacht, und die Unmöglichkeit, a priori zu bestimmen, ob das Ax. XI wahr sey oder nicht, bewiesen habe. —

6.

Gauss an W. Bolyai, Göttingen, den 6. März 1832.

- - - Jetzt einiges über die Arbeit Deines Sohnes.

Wenn ich damit anfange „dass ich solche nicht loben darf“: so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hiefse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends

Digitized by Google

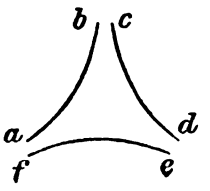
mit meinen eigenen, zum Theile schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Äufserste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mitteilte, mit besonderem Interesse aufnahmen. Um das zu können, mufs man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar. Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge.

Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.

Sehr prägnant und abkürzend finde ich die Bezeichnungen: doch glaube ich, dass es gut sein wird, für manche Hauptbegriffe nicht blofs Zeichen oder Buchstaben, sondern bestimmte Namen festzusetzen, und ich habe bereits vor langer Zeit an einige solcher Namen gedacht. So lange man die Sache nur in unmittelbarer Anschauung durchdenkt, braucht man keine Namen oder Zeichen; die werden erst nöthig, wenn man sich mit andern verständigen will. So könnte z. B. die Fläche, die Dein Sohn F nennt, eine Parasphäre, die Linie L ein Paracykel genannt werden: es ist im Grunde Kugelfläche, oder Kreislinie von unendlichem Radius. Hypercykel könnte der Complexus aller Punkte heifsen, die von einer Geraden, mit der sie in einer Ebene liegen, gleiche Distanz haben; eben so Hypersphäre. Doch das sind alles nur unbedeutende Nebensachen: die Hauptsache ist der Stoff, nicht die Form.

In manchem Theile der Untersuchung habe ich etwas andere Wege eingeschlagen: als ein Specimen füge ich einen rein geometrischen Beweis (in den Hauptzügen) von dem Lehrsatze bei, dass die Differenz der Summe der Winkel eines Dreiecks von 180° dem Flächeninhalte des Dreiecks proportional ist.

I. Der Complexus dreier Geraden *ab*, *cd*, *ef*, die so beschaffen sind, dass *ab*|||*dc*, *cd*|||*fe*, *ef*|||*ba*, bildet eine Figur, die ich T nenne. Es lässt sich beweisen, dass solche immer in einem Planum liege.

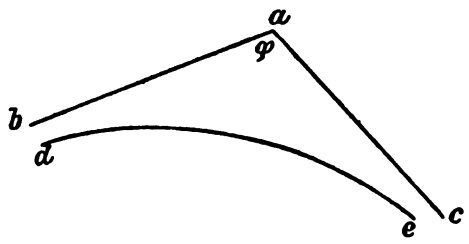


II. Derjenige Theil des Planums,

Digitized by Google

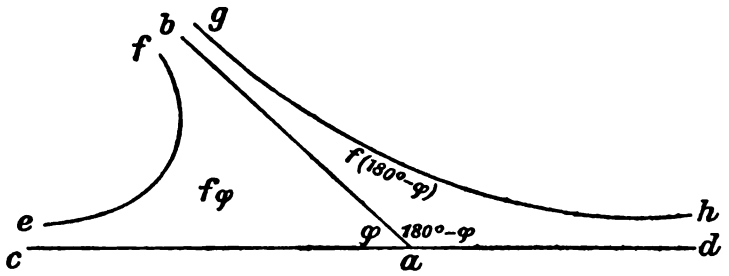
welcher zwischen*) den drei Geraden *ab*, *cd*, *ef* liegt, hat eine bestimmte endliche Area: sie heisse *t*.

III. Indem zwei Geraden *ab*, *ac* sich in *a* unter dem Winkel φ schneiden, möge eine dritte Gerade *de* so beschaffen sein, dass *ab*|||*ed*, *ac*|||*de*: es liegt dann auch *de* mit *ab* u. *ac* in Einem Planum, und die Area der Fläche zwischen diesen Geraden ist endlich und nur von dem Winkel φ abhängig; offenbar bilden in Σ, *de* und *bac* nur Eine gerade Linie, wenn $\varphi = 180^0$ ist, folglich verschwindet der Werth jener Area mit $180^0 - \varphi$: man setze also allgemein die Area $= f(180^0 - \varphi)$, wo f ein Functionszeichen bezeichnet.



IV. Lehrsatz. Es ist allgemein

$$f\varphi + f(180^0 - \varphi) = t.$$



Den Beweis giebt die Figur, wo *bac* $= \varphi$, *bad* $= 180^0 - \varphi$, *ac*|||*fe* *ef*|||*ab*, *ab*|||*hg*, *ad*|||*gh*, und wo der Flächeninhalt roth eingeschrieben ist.

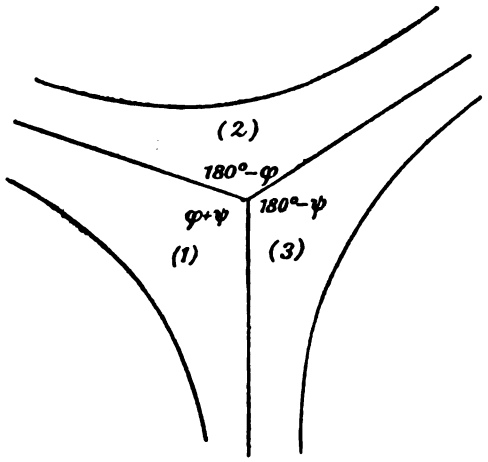
---

*) Bei einer vollständigen Durchführung müssen solche Worte wie „zwischen“ auch erst auf klare Begriffe gebracht werden, was sehr gut angeht, was ich aber nirgends geleistet finde.

Digitized by Google

V. Lehrsatz. Es ist allgemein

$$f\varphi + f\psi + f(180^0 - \varphi - \psi) = t.$$



Der Beweis erhellet leicht aus der Figur, wo die drei Flächentheile (1), (2), (3) die Werthe haben

$$(1) = f(180^0 - \varphi - \psi)$$
$$(2) = f(\varphi)$$
$$(3) = f(\psi)$$

und ihre Summe $= t$ wird.

VI. Corollarium. Es ist also

$$f(\varphi) + f(\psi) = t - f(180^0 - \varphi - \psi) = f(\varphi + \psi):$$

woraus leicht folgt, dass

$$\frac{f\varphi}{\varphi} = \text{constans},$$

und zwar

$$= \frac{t}{180^0}$$

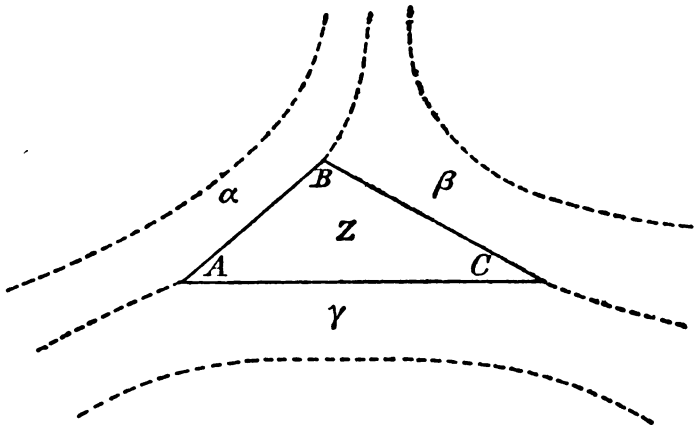
ist.

VII. Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen

Digitized by Google

Winkel A, B, C sind, ist

$$= \frac{180^0-(A+B+C)}{180} \times t.$$



Den Beweis giebt die Figur. Es ist nämlich der Inhalt

$$\alpha = fA = \frac{A}{180^0} \cdot t$$

$$\beta = fB = \frac{B}{180^0} \cdot t$$

$$\gamma = fC = \frac{C}{180^0} \cdot t$$

$$t = \alpha+\beta+\gamma+\varepsilon = \frac{A+B+C}{180^0} t+\varepsilon.$$

Ich habe hier bloss die Grundzüge des Beweises angeben wollen, ohne alle Feile oder Politur, die ich ihm zu geben, jetzt keine Zeit habe. Es steht Dir frei, es Deinem Sohne mitzutheilen: jedenfalls bitte ich Dich, ihn herzlich von mir zu grüfsen und ihm meine besondere Hochachtung zu versichern; fordere ihn aber doch zugleich auf sich mit der Aufgabe zu beschäftigen:

„Den Kubikinhalt des Tetraeders (von vier Ebenen begrenzten Raumes) zu bestimmen".

Da der Flächeninhalt eines Dreiecks sich so einfach angeben läfst: so hätte man erwarten sollen, dass es auch für diesen Ku-

Digitized by Google

bikinhalt einen eben so einfachen Ausdruck geben werde: aber diese Erwartung wird, wie es scheint, getäuscht.

Um die Geometrie vom Anfange an ordentlich zu behandeln, ist es unerläfslich, die Möglichkeit eines Planums zu beweisen; die gewöhnliche Definition enthält zu viel, und implicirt eigentlich subreptive schon ein Theorem. Man mufs sich wundern, dass alle Schriftsteller von Euklid bis auf die neuesten Zeiten so nachlässig dabei zu Werk gegangen sind: allein diese Schwierigkeit ist von durchaus verschiedener [Natur] mit der Schwierigkeit, zwischen Σ und S zu entscheiden, und jene ist nicht gar schwer zu heben. Wahrscheinlich finde ich mich auch schon durch Dein Buch hierüber befriedigt.

Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen Σ und S a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung. Einen anderen ebenso starken Grund habe ich in einem kleinen Aufsatze angedeutet, der in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1831 steht Stück 64 Pag. 625. Vielleicht wird es Dich nicht gereuen, wenn Du Dich bemühest Dir diesen Band der G. G. A. zu verschaffen (was jeder Buchhändler in Wien oder Ofen leicht bewirken kann), da darin unter anderen auch die Quintessenz meiner Ansicht von den imaginären Gröfsen auf ein Par Seiten dargelegt ist.

7.

W. Bolyai an Gauss, Maros Vásárhely, den 20. April 1835.

[W. Bolyai übersendet Gauss die beiden Bände des Tentamen und schreibt unter Anderem:]

Am Ende des II^{ten} Bandes ist nebst der Erleicht[er]ung mancher im I^{ten} gegebenen Begriffe, auch eine gewisse Einigkeit beyder Trigonometrien, nach dem Gedanke meines Sohnes. Gern hätte ich die Auflösung des Tetraeders drucken lassen (welche mein Sohn noch ein Jahr vor der Herausgabe seiner Appendix fand: aber die Formeln die ich sah, waren zu verwickelt, und ich weifs sie nicht. Und über alles hätte ich den Beweis davon drucken lassen, dass es absolut unmöglich sey, dem menschlichen Auge es einzusetzen, ob das XI Axiom wahr sey, oder nicht: mein Sohn behauptet den evidenten Beweis davon zu haben; ich kan sonst nichts beweisen, als dass sowohl das Seyn als das Nicht-Seyn die-

Digitized by Google

ses Satzes, mit den übrigen euklidischen Axiomen gleich bestehen könne, und dadurch zwey verschiedene Systeme (jedes für sich insofern gleich bestehend) seyen; welches ich schon seit vielen Jahren her weifs — Aber es ist die Frage, ob nicht ein anderes Axiom sey, gleichen Ranges mit denen wenigstens, die Euklid und andere tacite annehmen, und die man in beyden Systemen annehmen mus — Was ich meinem Sohne vorgearbeitet habe, ist in Tom. I p. 488 . . .

Digitized by Google

Ueber die angenäherte Geradführung durch das ebene Gelenkviereck.

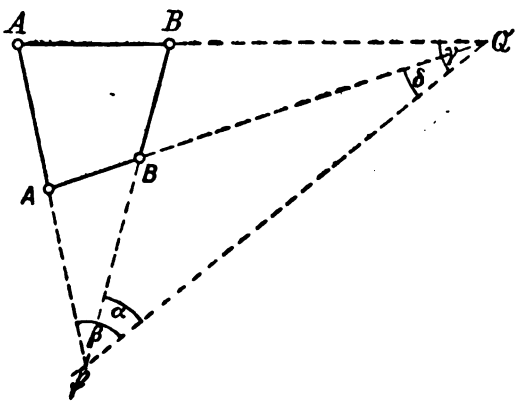
Von

Reinhold Müller in Braunschweig.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Ist **AB***BA* ein ebenes Gelenkviereck mit dem festen Gliede **AB** und der Koppel *AB*, so beschreibt bekanntlich jeder Punkt *K* der Koppelebene im allgemeinen eine Kurve sechster Ordnung $\varkappa$. Besitzt die Kurve $\varkappa$ eine Tangente $\mathfrak{g}$, die mit ihr ν unendlich benachbarte Punkte gemein hat, so sagen wir, das Gelenkviereck bewirke eine ν-punktige Geradführung des Punktes *K* auf der Geraden $\mathfrak{g}$. In einer früheren Arbeit[1]) habe ich den Fall der fünfpunktigen Geradführung behandelt; die folgenden Mitteilungen beziehen sich auf die sechspunktige, also die geometrisch vollkommenste Geradführung, die überhaupt durch ein Gelenkviereck erreicht werden kann.

Bezeichnen wir für irgend eine Koppellage *AB* mit $\mathfrak{P}$ den Pol, d. h. den Schnittpunkt der Geraden **A***A* und **B***B*, mit Ω den Schnittpunkt von **AB** und *AB*, mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bez. die Winkel $B\mathfrak{P}\Omega$, $A\mathfrak{P}\Omega$, $A\Omega\mathfrak{P}$, $\mathbf{A}\Omega\mathfrak{P}$, (Fig. 1) so läßt sich zeigen, daß in der betrachteten Systemlage ein bestimmter



Figur 1.

1) Konstruktion der Burmester'schen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck, zweite Mitteilung. Zeitschrift für Mathematik u. Physik. 38. Jahrg. (1893) S. 129. Vergl. auch Lorenzo Allievi, Cinematica della biella piana, Napoli 1895.

Digitized by Google

Punkt K der Koppelebene eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente durchschreitet, wenn

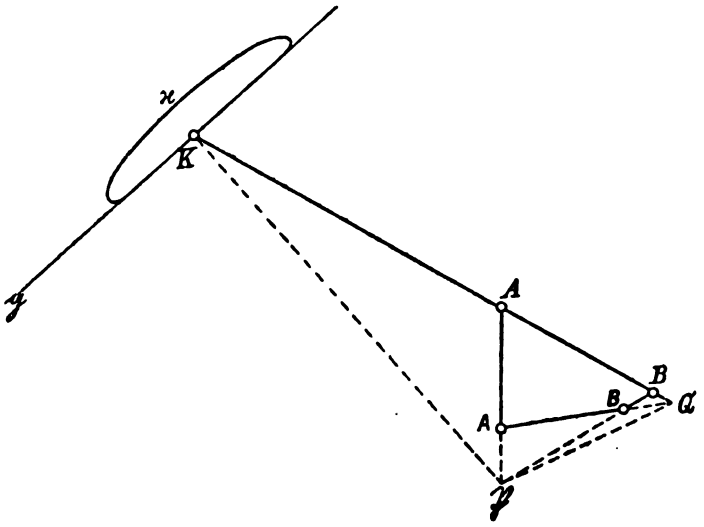
$$\alpha + \beta = \gamma + \delta$$

und

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = \sin 2\gamma$$

ist. Für den geradgeführten Punkt K ergiebt sich dann eine einfache Konstruktion, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen. In der unmittelbaren Umgebung von K befinden sich unendlich viele Systempunkte, deren Bahnkurven vier dicht aufeinander folgende Inflexionen besitzen und deshalb innerhalb endlicher Bewegungsgrenzen als nahezu geradlinig erscheinen.

Besonders einfach gestaltet sich der auch technisch interessanteste Fall, in welchem der Punkt K auf der Koppelgeraden selbst liegt; derselbe tritt ein, wenn in der vorigen Figur die Strecke $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ und der Winkel α beliebig angenommen werden, und wenn $\beta = 60° + \alpha$, $\gamma = 60° - \alpha$, $\delta = 3\alpha$ gemacht wird (Fig. 2). Dann



Figur 2.

finden wir auf AB den Punkt K, indem wir in $\mathfrak{P}$ an $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ den Winkel $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}K = 90° - 3\alpha$ antragen, und es ist die Gerade g senkrecht zu $\mathfrak{P}K$. Verstehen wir im Folgenden unter einem geradführenden Gelenkviereck immer nur ein solches, welches die sechspunktige Geradführung eines auf der Koppelgeraden liegenden Punktes K bewirkt, so erhalten wir aus der letzten Bemerkung leicht die weiteren Sätze:

I. In der Systemlage, in welcher der Punkt K

Digitized by Google

eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente durchschreitet, bilden die drei beweglichen Glieder des geradführenden Gelenkvierecks — oder deren Verlängerungen — stets ein gleichseitiges Dreieck.

II. Zu jeder beliebig gewählten Koppelstrecke AB und zu jedem auf dieser beliebig angenommenen Punkte K können immer zwei geradführende Gelenkvierecke konstruirt werden.

III. Bezeichnen wir die Längen der Glieder AB, AA, BB bez. mit k, l, m, n, so ist $ABBA$ ein geradführendes Gelenkviereck, wenn

$$1) \qquad \begin{aligned} &l^2m^2+m^2n^2+n^2l^2-3lmn[l^2(m+n)+m^2(n+l)+n^2(l+m)] \\ &+15\,l^2m^2n^2 = 0 \end{aligned}$$

und

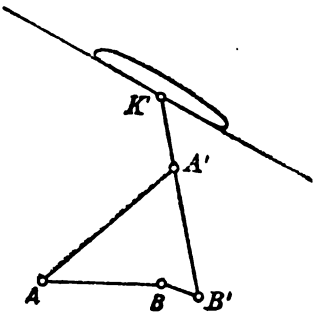
$$2) \qquad k = \frac{l^2m^2+m^2n^2+n^2l^2-lmn(l+m+n)}{3lmn}$$

ist. Für das Teilungsverhältnis μ des Punktes K in Bezug auf die Strecke AB ergiebt sich der Wert

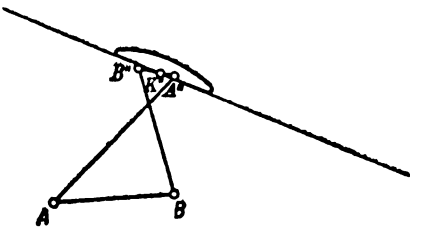
$$3) \qquad \mu = \frac{AK}{BK} = \frac{k-m+n}{l-m}.$$

Aus der Symmetrie der Gleichung 1) folgt ferner:

IV. Ist $ABBA$ ein geradführendes Gelenkviereck, so behält es diese Eigenschaft, wenn die drei beweglichen Glieder AA, AB, BB unter einander beliebig vertauscht werden. Auf diese Weise gehen aus dem ursprünglichen (Fig. 2) zwei neue Gelenkvierecke $ABB'A'$ und $ABB''A''$ hervor (Fig. 3 u. 4), in denen $AA' = l$, $A'B' = m$,



Figur 3.



Figur 4.

$BB' = n$ und $AA'' = l$, $A''B'' = n$, $BB'' = m$ ist. Sind dann

Digitized by Google

K', K'' bez. die auf den Koppeln $A'B', A''B''$ liegenden geradgeführten Punkte, so ergiebt sich

$$\mu' = \frac{A'K'}{B'K'} = 1 - \mu$$

$$\mu'' = \frac{A''K''}{B''K''} = 1 - \frac{1}{\mu};$$

d. h. die drei Teilungsverhältnisse μ, μ', μ'' stehen in derselben Beziehung, wie die drei fundamentalen Werte des Doppelverhältnisses von irgend vier Punkten.

Soll insbesondere $m = n$ sein, so wird den Gleichungen 1), 2), 3) genügt durch $m = 4l$, $k = 3l$, $\mu = -1$, und wir erhalten die bekannte Geradführung von Tschebischeff[1]), bei welcher K in der Mitte von AB liegt. Von dieser läßt sich zeigen, daß sie unter den soeben behandelten Geradführungen einen technisch ungünstigen Fall darstellt, insofern als bei ihr die scheinbar endliche Anschlußstrecke zwischen der von K beschriebenen Bahnkurve $\varkappa$ und der Geraden g relativ klein wird.

1) Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen. 1870. S. 168.

Braunschweig, den 10. Januar 1897.

Digitized by Google

Ueber die Abplattung des Planeten Mars.

Von

W. Schur.

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. Januar 1897.

Während Jupiter und Saturn eine Abweichung von der Kugelgestalt zeigen, die schon bei dem ersten Blicke in ein Fernrohr hervortritt und für die Erde sich aus den Gradmessungen für die Abplattung $\frac{a-b}{a}$ ein Werth von etwa $\frac{1}{290}$ ergeben hat, war diese Frage für den Planeten Mars bisher noch nicht entschieden und wenn sich aus den vorhandenen Messungen Spuren einer Abplattung ergeben haben, so bestand doch immer der Verdacht, daß sie nicht reell sind, sondern ihren Grund in besonderen Eigenthümlichkeiten der Augen der Beobachter haben.

Es ist nämlich eine den Physiologen und Astronomen bekannte Eigenthümlichkeit der Wahrnehmungen des Auges, daß Durchmesser von Scheiben in verschiedener Größe erscheinen je nach der Richtung derselben gegen die Verbindungslinie der beiden Augen und wenn nun der polare und der aequatoreale Durchmesser einer Planetenscheibe durchschnittlich in nahezu denselben Richtungen gegen die Vertikale erscheinen, so können die Messungen der Durchmesser Unterschiede zeigen, aus denen man eine Abplattung berechnen kann, die in Wirklichkeit aber ihren Grund in den durch den Astigmatismus des Auges erzeugten Beobachtungsfehlern hat. Von diesen Beobachtungsfehlern kann sich der Astronom befreien wenn er vor dem Ocular des Fernrohres ein Prisma anbringt, mit welchem er dem im Gesichtsfelde erscheinenden Bilde des Planeten jede beliebige Drehung ertheilen kann, so daß er im Stande ist, den polaren Durchmesser in diejenige Richtung gegen die Vertikale zu bringen in welcher sonst der aequatoreale Durchmesser erscheint und umgekehrt. Auf diese Weise lassen sich die astigmatischen Eigenthümlichkeiten des menschlichen Auges unschädlich machen und einwurfsfreie Messungen der Form

Digitized by Google

von Planetenscheiben anstellen. Da das Göttinger Heliometer eine solche Einrichtung besitzt, so habe ich bei der Mars-Opposition im December 1896 eine größere Zahl von Messungen des aequatorealen und polaren Durchmessers a und b ausgeführt, deren Resultate die nachfolgenden sind. (Die Richtung der Umdrehungsaxe ist dabei den Tafeln von Marth in den Monthly notices of the royal astronomical society entnommen worden).

	Durchmesser in mittlerer Entfernung von der Sonne.		Unterschied $a-b$	Abplattung $\frac{1}{\alpha} = \frac{a-b}{a}$
1896 Dec. 2	$a = 6''.265$	$b = 6''.125$	$+ 0''.140$	1 : 45
11	6.310	6.135	+ 0.175	1 : 36
16	6.210	6.095	+ 0.115	1 : 54
17	6.235	6.125	+ 0.110	1 : 54.

Diese an vier Abenden erhaltenen Resultate zeigen eine sehr befriedigende Uebereinstimmung und geben für die Abplattung des Mars den Werth $\frac{1}{47}$. Aus diesen Messungen ergiebt sich als mittlerer Durchmesser des Planeten 6810 Kilometer und der Unterschied zwischen dem aequatorealen und polaren Durchmesser 149 Kilometer.

Digitized by Google

Zur kinetischen Theorie idealer Flüssigkeiten.

Von

W. Voigt.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Februar 1897.)

In einer früheren Arbeit[1]), betitelt „Einige kinetische Betrachtungen, die mit der Theorie der Verdampfung . . . in Zusammenhang zu stehen scheinen“ habe ich das thermodynamische Gleichgewicht zwischen einer idealen Flüssigkeit und ihrem gleichfalls idealen Dampf untersucht. Der ideale Zustand war dabei durch die Annahme definirt, daß im Innern des von ihnen eingenommenen Raumes die Moleküle jedes der beiden Körper mit Ausnahme der sogenannten Stöße nicht merklich auf einander wirken, und daß bei den Stößen das mittlere Resultat nur in einem Austausch der Bewegungen besteht.

Die Untersuchung war zunächst allein auf den Proceß der Verdampfung (und einige dem ähnliche) erstreckt, weil bei diesem die Flüssigkeit mit einem nach seiner Constitution wenigstens angenähert bekannten Körper, dem Dampfe, in Wechselwirkung steht, und weil eben diese Beziehung gestattet, wenigstens bis zu einem gewissen Grade, festzustellen, ob die idealen Flüssigkeiten als Modelle der wirklichen zu dienen im Stande sind, d. h., ob die aus ihrer Theorie zu gewinnenden Gesetze sich bei den wirklichen Flüssigkeiten bestätigt finden. Da ich anfangs die benutzte Vorstellung — die im Grunde keine andere ist, als die von van der Waals seiner Theorie zu Grunde gelegte — nur für ein sehr rohes Abbild der Wirklichkeit hielt, habe ich mich bei der Vergleichung der Resultate mit der Beobachtung nur auf wenige Beispiele (Wasser und Kohlensäure) beschränkt und die gleichfalls ziemlich rohe Uebereinstimmung constatirt. Seitdem habe ich nun aber in Ueberlegung gezogen, in welcher Hinsicht die benutzten Körper von

1) W. Voigt, Nachr. von der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1896, Heft 4.

Digitized by Google

dem Modell der idealen Flüssigkeit abweichen möchten, nach welcher Richtung also die Theorie zu erweitern sein würde, um eine vollkommenere Bestätigung zu erzielen.

Hier kamen insbesondere zwei bisher ausdrücklich vernachlässigte Umstände in Betracht: eine etwaige Polymerisirung und eine etwaige Aenderung der inneren Energie der Moleküle beim Vorgang der Condensation; welchem von ihnen das größere Gewicht beizulegen wäre, mußte sich entscheiden lassen, wenn die Resultate der Theorie einmal auf einen Körper mit vielatomigen Molekülen, aber geringer Neigung zur Polymerisation, sodann auf eine Substanz mit einatomigen Molekülen angewandt wurden.

Die Formel, die hier heranzuziehen ist, folgt aus (28) und (29) der vorigen Arbeit und bestimmt die specifische Verdampfungswärme Q durch die absolute Temperatur T, die Constante B des für den Dampf als gültig vorausgesetzten Boyle-Gay Lussac'schen Gesetzes und die Dichten ϱ_i und ϱ_a von Flüssigkeit und Dampf gemäß:

$$1) \qquad \mathfrak{A}Q = BT\left(l\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_a}\right)+1\right);$$

dabei bedeutet $\mathfrak{A}$ das mechanische Wärmeaequivalent, l den natürlichen Logarithmus und ist ϱ_a neben ϱ_i vernachlässigt.

Als einen Körper der ersten Art wählte ich[1]) Benzol. Für die Temperatur $\tau = 80^0\,C$, also $T = 353$, ist hier $\varrho_i = 0{,}800$, $\varrho_a = 0{,}00266$; B ist gleich $1{,}062.\ 10^6$, $\mathfrak{A} = 4{,}23.\ 10^7$, und die obige Formel liefert $Q = 58{,}5$ statt des beobachteten 93.

Als Körper zweiter Art bot sich Quecksilber. Hier ist $B = 0{,}413.\ 10^6$, und für die Temperatur $\tau = 350^0\,C$, also $T = 623$, gilt $\varrho_i = 12.76$, $\varrho_a = 0{,}0034$; hieraus folgt $Q = 56{,}5$ statt des beobachteten 62.

Diese Zahlen lassen vermuthen, daß die bei der Condensation eintretende Polymerisation allgemein nicht in dem Maaße Einfluß auf den Vorgang hat, als die Aenderung der innern Energie

1) Für diese, wie für fast alle folgenden Berechnungen sind die Daten dem höchst nützlichen Tabellenwerk von H. Landolt und R. Börnstein (II. Auflage Berlin 1892) entnommen — eine kleine Zahl auch der Kinetischen Gastheorie von O. E. Meyer (II. Auflage, Breslau 1895) — und es konnte daher die Angabe des Beobachters unterbleiben. Lagen mehrere Bestimmungen vor, so ist ein Mittelwerth benutzt. Die Dampfdichten sind, sofern sie (oder die entsprechenden specifischen Volumina) nicht direct angegeben waren, nach dem Boyle-Gay Lussac'schen Gesetz aus den aufgeführten Sättigungsdrucken berechnet. Da es sich bei allen diesen Rechnungen nicht um eine sehr große Genauigkeit handelt, so kommt der hierdurch begangene Fehler nicht in Betracht; aus demselben Grunde konnte ein großer Theil der Berechnungen mit dem Rechenschieber ausgeführt werden.

Digitized by Google

der Moleküle, und es erscheint daher rationell, die Erweiterung der Theorie zunächst in letzterer Richtung zu unternehmen.

Die berechnete und die beobachtete Zahl für Q liegen einander bei Quecksilber überraschend nahe, und es ist nicht unmöglich, daß, wenn statt der alten Person'schen neuere Beobachtungen über Q bei Quecksilber vorlägen, und wenn der Werth ϱ_a statt durch Berechnung nach den Boyle-Gay Lussac'schen Gesetz aus directen Messungen abgeleitet werden könnte, die Uebereinstimmung eine noch größere sein würde. Jedenfalls zeigt das bei Quecksilber erhaltene Resultat, daß es Körper giebt, die sich angenähert wie ideale Flüssigkeiten verhalten, daß demnach die Grundlage unserer Theorie Vertrauen verdient, und daß es keineswegs nur theoretisches Interesse hat, auf ihr weiter zu bauen. Auch die Erweiterung der Theorie durch Berücksichtigung der Polymerisation und der Aenderungen der inneren Energie der Moleküle gewinnt jetzt eine erhöhte Bedeutung.

A. Flüssigkeiten mit einatomigen Molekülen.

I. Wir beginnen mit der Reproduction einiger Formeln aus der früheren Arbeit, in der die Moleküle als materielle Punkte betrachtet waren, die also streng nur für einatomige Moleküle gelten; dabei wollen wir jetzt, wo die Aussichten auf weitere Bestätigungen gewachsen sind, eine früher (theils stillschweigend, theils ausdrücklich) eingeführte Vernachlässigung zunächst unterlassen [1]). Dagegen behalten wir die Annahme nur einer Gattung Moleküle noch bei, schließen also Polymerisationen auch weiterhin zunächst aus.

Beim Austritt aus dem Flüssigkeitsraum (i) in den Dampfraum (a) verliert jedes Molekül den Betrag

$$2) \qquad \tfrac{1}{2} mc^2 = mS$$

an lebendiger Kraft, wobei $-S$ die an der austretenden Masseneinheit von den in der Grenze wirkenden Molekularkräften geleistete Arbeit, und c der kleinste Werth der Normalgeschwindigkeit ist, bei dem das Molekül eben noch die Flüssigkeit zu verlassen vermag. c und S sind der Flüssigkeit bei der gegebenen Temperatur individuelle Constanten.

Bei Annahme des Maxwell'schen Gesetzes für die Vertheilung der Geschwindigkeiten in Flüssigkeit und coexistirendem Dampf ergiebt sich für beide Körper der gleiche Werth G der wahr-

1) Eine Wiederholung der Ableitung jener Formeln ist um so weniger nothwendig, als die im folgenden Theil für mehratomige Moleküle gegebenen Entwickelungen die auf einatomige bezüglichen als specielle Fälle in sich enthalten.

Digitized by Google

scheinlichsten Molekulargeschwindigkeit, und zugleich für c die einfache Beziehung

3) $$\left(\frac{c}{G}\right)^2 = \gamma^2 = \frac{2S}{G^2} = l\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_a}\right),$$

worin ϱ_i und ϱ_a die obige Bedeutung haben.

Da die innere Verdampfungswärme D sich durch

4) $$\mathfrak{A} D = \tfrac{1}{2} c^2 = S$$

bestimmt findet, und da bei Einführung des Dampfdruckes P_a die die Verdampfung begleitende Arbeit $P_a(1/\varrho_a - 1/\varrho_i)$ beträgt, so erhält man für die ganze Verdampfungswärme Q die Formel

5) $$\mathfrak{A} Q = S + P_a\left(\frac{1}{\varrho_a} - \frac{1}{\varrho_i}\right);$$

dieser noch ganz strenge Werth läßt sich bei Einführung des Boyle-Gay Lussac'schen Gesetzes, das wir der Einfachheit halber im allgemeinen für den Dampf als gültig annehmen wollen, d. h. wegen

6) $$B_a T = \tfrac{1}{2} G^2 = \frac{P_a}{\varrho_a},$$

einerseits in rein kinetischer Deutung schreiben

7) $$\mathfrak{A} Q = \tfrac{1}{2} G^2 (\gamma^2 + 1 - e^{-\gamma^2}),$$

andererseits auch gemäß (3) durch lauter direct bestimmbare Größen ausgedrücken

8) $$\mathfrak{A} Q = B_a T\left(l\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_a}\right) + 1 - \frac{\varrho_a}{\varrho_i}\right).$$

Diese Formeln treten jetzt an Stelle von (28) in der letzten Arbeit.

Zu weiteren Folgerungen ziehen wir die Clausius'sche Gleichung

9) $$\mathfrak{A} Q = T \frac{dP}{dT}\left(\frac{1}{\varrho_a} - \frac{1}{\varrho_i}\right)$$

heran, worin P den der absoluten Temperatur T entsprechenden Sättigungsdruck bezeichnet.

Durch Elimination von $\mathfrak{A} Q$ und durch abermalige Benutzung des Werthes $P = B_a T \varrho_a$ gelangt man hier ohne alle Vernachlässigungen zu der Formel

10) $$T \frac{d\varrho_a}{dT}\left(\frac{1}{\varrho_a} - \frac{1}{\varrho_i}\right) = l\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_a}\right),$$

welche die thermische Aenderung der Dichte des gesättigten Dampfes vollständig bestimmt.

Für ihre Verwerthung ist es vortheilhaft, $1/\varrho_i$ neben $1/\varrho_a$ zu

Digitized by Google

vernachlässigen, was außer in der nächsten Umgebung des kritischen Punktes immer erlaubt ist. Dann läßt sich die Gleichung auf die merkwürdige Form bringen

$$11) \qquad d\big(Tl(\varrho_a)\big) = l(\varrho_i)\,dT,$$

welche die Integration gestattet, sowie ϱ_i als Function der Temperatur bekannt ist.

In vielen Fällen kann man in erheblichen Bereichen ϱ_i als von T unabhängig betrachten und findet dann

$$12) \qquad Tl\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_a}\right) = C,$$

wobei C die Integrationsconstante bezeichnet. Diese Formel ergiebt, kinetisch gedeutet, nach (3) und (6) die Beziehung

$$13) \qquad S = \tfrac{1}{2}c^2 = \text{const.},$$

und dies ist nach den eingeführten Vernachlässigungen in der That einleuchtend; denn wenn die Dichte der Flüssigkeit als constant, die des Dampfes als verschwindend betrachtet wird, so werden sich die Kräfte, welche ein ausfahrendes Molekül in der Grenze erfährt, mit der Temperatur nicht merklich ändern.

Das Gesetz (12) findet sich bei Quecksilber in weiten Temperaturgrenzen recht gut erfüllt. Nimmt man für das constante ϱ_i den der — zur mittleren gewählten — Temperatur $\tau = 300^0\,C$ entsprechenden Werth $\varrho_i = 12{,}88$, so ergeben die Beobachtungen des Sättigungsdruckes P durch Regnault (I) einerseits, durch Ramsay und Young (II) andererseits folgendes Schema

$\tau =$	100	200	300	400	500
$T =$	373	473	573	673	773
$\varrho_a' =$	$0{,}0_5643$	$0{,}0_3135$	$0{,}0_2135$	$0{,}0_2760$	0,0269
$C' =$	213	231	224	215	200
$\varrho_a'' =$	$0{,}0_5233$	$0{,}0_3115$	$0{,}0_2138$	$0{,}0_2715$	0,0226
$C'' =$	251	239	228	219	214.

In die Constanten C ist eine Potenz von 10 hineingezogen.

Bedenkt man, daß die erhaltene Gleichung außer C keine verfügbare Constante enthält, so wird man die gute Uebereinstimmung innerhalb so weiter Grenzen (ϱ_a variirt vom Einfachen bis zum mehr als Zehntausendfachen) gewiß bemerkenswerth finden.

Bei Einführung des Boyle-Gay Lussac'schen Gesetzes nimmt die Formel die minder einfache Gestalt

Digitized by Google

$$P = B_a \varrho_i T C_0^{-1/T}$$

an, in der nunmehr C_0 die einzige verfügbare Constante bezeichnet.

Den nächsten Grad von Genauigkeit gewinnt man, wenn man in (11) ϱ_i gleich einer lineären Function von T setzt. Kürzt man dann die Constante $- d\varrho_i/dT$ in δ ab, so ergiebt sich leicht [1])

$$14) \qquad Tl(\varrho_a) + \frac{\varrho_i}{\delta}(l(\varrho_i) - 1) = \text{Const.};$$

die Abweichung dieser Formel von der einfacheren (12) erweist sich bei Quecksilber innerhalb der hier angewandten Genauigkeit der Rechnung als unmerklich; die Differenzen in den Werthen von C dürften sonach ebenso, wie die zwischen dem beobachteten und dem berechneten Q, mit Polymerisationen im Zusammenhang stehen. Die Berücksichtigung dieser letzteren soll hier, wie schon S. 21 ausgesprochen, als eine Correction von geringerem Einfluß zunächst unterbleiben und ist einer zweiten Mittheilung über den Gegenstand vorbehalten.

Combinirt man die Formeln (8) und (12), so erhält man bei consequenter Vernachlässigung von ϱ_a neben ϱ_i

$$15) \qquad \mathfrak{A} Q = B_a (C + T)$$

also

$$16) \qquad \frac{dQ}{dT} = \frac{B_a}{\mathfrak{A}} = c_p - c_v,$$

wobei c_p und c_v die specifischen Wärmen des Quecksilberdampfes bei constantem Druck und bei constantem Volumen bezeichnen.

Beobachtungen über die Abhängigkeit der specifischen Verdampfungswärme Q des Quecksilbers von der Temperatur sind mir nicht bekannt; nach dem S. 20 angegebenen Werth von B_a würde sich dQ/dT etwa gleich $+0{,}01$ ergeben. Dieser, mit anderen verglichen, sehr kleine und überdies ungewöhnlicher Weise positive Werth macht wahrscheinlich, daß der angenäherte Ausdruck (12) für $l(\varrho_i/\varrho_a)$ zum Zweck der Berechnung von dQ/dT nicht genau genug ist; geht man statt von diesem von (14) aus, so erhält man den für große T jedenfalls negativen Werth

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{B_a}{\mathfrak{A}}\left(1 - \frac{T\delta}{\varrho_i}\right). -$$

Combinirt man mit der Formel (15) die bekannte Beziehung

1) Die Formeln (11) und (14) vertreten die Stelle der durch ein Versehen entstellten Gleichungen (33) und (34) der vorigen Arbeit.

Digitized by Google

17) $$\bar{c}_a - \bar{c}_i = T\frac{d}{dT}\left(\frac{Q}{T}\right),$$

welche die specifischen Wärmen des Quecksilbers unter Sättigungsdruck ($\bar{c}_i$) und des gesättigt bleibenden Quecksilberdampfes ($\bar{c}_a$) mit Q verbindet, so erhält man $\bar{c}_i - \bar{c}_a = BC/T\mathfrak{A}$, und wegen (12) auch

18) $$\bar{c}_i - \bar{c}_a = \frac{B}{\mathfrak{A}} l\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_a}\right);$$

diese Formel gestattet eine überaus einfache Berechnung von $\bar{c}_a$ aus $\bar{c}_i$, ϱ_i und ϱ_a, deren Resultate nach der ganzen Ableitung jedenfalls angenähert den Thatsachen entsprechen werden. —

II. Nachdem durch die im Vorstehenden ausgeführten numerischen Prüfungen die Grundlagen unserer Theorie eine neue Bestätigung erhalten haben, erscheint es geboten, noch weitere Consequenzen aus denselben zu ziehen.

Nach unserer Vorstellung erfahren die Moleküle innerhalb der Flüssigkeit mit Ausnahme der unmittelbaren Nähe einer Grenzfläche keine merklichen Kräfte, auch ist, was weiter unten noch näher zu begründen, mindestens in Annäherung von ihrer endlichen Ausdehnung abzusehen. Somit kann man den Druck p_i, den eine in's Innere der Flüssigkeit gebrachte unendlich dünne Lamelle auf ihren beiden Seiten erfährt, nach den bekannten Methoden der kinetischen Theorie berechnen und erhält, da hierbei die Capillarkräfte außer Wirkung bleiben,

19) $$p_i = \tfrac{1}{2}\varrho_i G_i^2,$$

wobei G_i die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmoleküle bezeichnet.

Nun ist aber nach der letzten Arbeit $G_i = G_a$, wobei G_i der Flüssigkeit, G_a dem mit ihr im Gleichgewicht stehenden Dampf entspricht; ferner können wir die absolute Temperatur T definirt denken durch $\frac{1}{2}G_a^2 = B_a T$, wobei wieder B_a die dem Dampf entsprechende Constante bezeichnet. Es folgt sonach auch

20) $$p_i = B_a T \varrho_i.$$

Aber dieser Druck kommt nur in dem obigen Idealfall, wo die capillaren Kräfte nicht wirken, factisch zur Geltung; in allen andern Fällen wird er durch letztere mehr oder weniger kompensirt, und die Wirkung, welche die Gefäßwand erfährt, ist z. B. gegeben durch

21) $$P_i = p_i - K_i = B_a T \varrho_i - K_i,$$

worin K_i den capillaren Druck bezeichnet, den die Flüssigkeit

Digitized by Google

diesseits eines im Innern gelegenen Flächenelementes auf diejenige jenseits ausübt. Die Richtigkeit dieser Beziehung sieht man ein, wenn man die Bedingung für das äußere oder mechanische Gleichgewicht eines niedrigen cylindrischen Volumenelementes der Flüssigkeit ableitet, dessen eine Grundfläche in die Gefäßwand fällt, während die andere so weit davon entfernt liegt, daß das Element die Sphäre merklicher Capillarwirkung umschließt. Die letztere Grundfläche kann man durch eine starre massenlose Ebene ersetzen, da die in beiden Richtungen durch sie hindurchfahrenden Moleküle sich derart compensiren, als wenn in der Grenze eine Reflexion stattfände. Auf diese starre Ebene wirkt dann $p_i - K_i$, während auf die gegenüberliegende Fläche zwei zu p_i und K_i analoge Wirkungen ausgeübt werden, die zusammen das Entgegengesetzte von P_i ergeben.

Da die Ueberlegungen, welche in der vorigen Arbeit zu der Beziehung $G_i = G_a$ führten, davon durchaus unabhängig sind, ob Capillarwirkungen im Dampf merklich sind oder nicht, so kann man der obigen Gleichung (21) für die Flüssigkeit die entsprechende

$$P_a = p_a - K_a = B_a T \varrho_a - K_a$$

für den Dampf zuordnen; beide zusammengenommen stellen dann offenbar nichts anderes dar, als die van der Waals'sche Gleichung bei verschwindend klein angenommenem b. Die ihr vorhergehende Ableitung enthält indessen erst den, zwar bei van der Waals fehlenden, aber doch wohl nicht unwesentlichen Nachweis, daß und warum für eine ideale einatomige Flüssigkeit wirklich die Constante B denselben Werth besitzt, wie für den zugehörigen Dampf. Durch denselben tritt auch zugleich hervor, daß die Annahme dieser Beziehung durch van der Waals für beliebige andere Fälle durchaus hypothetisch und nicht unbedenklich ist, da dann über das Verhältniß von G_i und G_a im Voraus gar nichts ausgesagt werden kann. Dies wird weiter unten bei der Behandlung mehratomiger Flüssigkeiten noch deutlicher hervortreten.

So einfach sich hier der eine Theil des van der Waals'schen Ausdrucks für BT ergiebt, so scheint es nicht zu gelingen, den andern, d. h. also das van der Waals'sche b, streng kinetisch zu gewinnen. Wir gehen aber hierauf jetzt nicht näher ein. —

III. Wie schon wiederholt benutzt ist, verhalten sich die Moleküle einer idealen homogenen Flüssigkeit, so lange sie nur einer Grenzfläche nicht zu nahe kommen, durchaus wie diejenigen eines idealen Gases. Da nun bei der bekannten kinetischen Theorie der inneren Reibung der Gase (im eigentlichen Sinne des Wortes)

Digitized by Google

Begrenzungsflächen nicht in Betracht gezogen werden, so kann man versuchsweise die dort erhaltenen Resultate auf die idealen Flüssigkeiten übertragen. Demgemäß wenden wir die bekannte Gleichung für den Coefficienten η der inneren Reibung[1])

$$22) \qquad \eta = \tfrac{1}{3}\varrho \Lambda \Omega,$$

in der ϱ die Dichte, Λ die mittlere freie Weglänge und Ω die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle bezeichnet, sowohl auf den Dampf (a), als die mit ihm im Gleichgewicht stehende Flüssigkeit (i) an. Da aber für einatomige Flüssigkeiten nach den Resultaten der letzten Arbeit, so wie G_i und G_a, auch die Mittelwerthe Ω_i und Ω_a einander gleich sind, und da Ω_a immer einfach zu bestimmen ist, so kann man aus beobachtetem η_a und η_i sowohl Λ_a als Λ_i berechnen; zudem gilt

$$23) \qquad \frac{\eta_a}{\eta_i} = \frac{\varrho_a \Lambda_a}{\varrho_i \Lambda_i}.$$

Bezeichnet man weiter als „Stoßkugel" eine um ein Molekül m construirte Kugel, in welche bei der Bewegung der Schwerpunkt keines anderen Moleküles einzudringen vermag, ohne eine Ablenkung zu erfahren, so ist bekanntlich der mittlere Werth von deren Radius R — der klein sein möge gegen den mittleren Abstand E zweier Moleküle — mit Λ verbunden durch die Formel

$$24) \qquad \Lambda = \frac{3m}{4\pi\varrho R^2};$$

ist R^3 nicht neben E^3 zu vernachlässigen, so gilt statt dessen

$$25) \qquad \Lambda = \frac{3m - 4\pi\varrho R^3}{4\pi\varrho R^2}.$$

Setzen wir zunächst den ersteren Fall voraus und wenden die Formel sowohl auf den Dampf, als auf die Flüssigkeit an, so erhalten wir bei Elimination von m

$$26) \qquad \frac{\varrho_i \Lambda_i}{\varrho_a \Lambda_a} = \frac{\eta_i}{\eta_a} = \frac{R_a^2}{R_i^2};$$

im andern Falle erscheint links ein unächter Bruch als Factor.

Wir führen die Rechnung wiederum für Quecksilber durch.

---

1) Ich benutze diese unter Annahme gleicher Geschwindigkeiten der Moleküle gewonnene Formel, weil ich die unter Benutzung des Maxwell'schen Gesetzes abgeleitete für kaum genauer halte. Ueberdies kommt bei den folgenden Anwendungen der statt $\frac{1}{3}$ auftretende Zahlenfactor nicht wesentlich in Betracht.

Digitized by Google

Es ist

für $\tau = 280$, also $T = 553$

$$\varrho_a = 0{,}0_2914,\ \eta_a = 0{,}0_249,$$
$$\varrho_i = 12{,}93,\quad \eta_i = 0{,}0_294,\ \mathfrak{A}_a = \mathfrak{A}_i = 2{,}41.10^4,$$

daher $A_a = 0{,}667.10^{-4}$, $A_i = 0{,}905.10^{-7}$,

$$\frac{R_a}{R_i} = 4{,}37,\ \frac{R_a^2}{R_i^2} = 19{,}18,\ \frac{R_a^3}{R_i^3} = 84;$$

für $\tau = 340$, also $T = 613$

$$\varrho_a = 0{,}0_2286,\ \eta_a = 0{,}0_259,$$
$$\varrho_i = 12{,}79,\quad \eta_i = 0{,}0_290,\ \mathfrak{A}_a = \mathfrak{A}_i = 2{,}53.10^4,$$

daher $A_a = 0{,}244.10^{-4}$, $A_i = 0{,}833.10^{-7}$,

$$\frac{R_a}{R_i} = 3{,}92,\ \frac{R_a^2}{R_i^2} = 15{,}25,\ \frac{R_a^3}{R_i^3} = 60.$$

Während die erhaltenen Werthe der mittleren Weglängen A zu Bemerkungen keine Veranlassung geben, erscheinen die Zahlen für die Potenzen der Verhältnisse R_a/R_i der Stoßradien außerordentlich seltsam. Das Volumen der Stoßkugel insbesondere ist bei 280, resp. 340° C im flüssigen Quecksilber nur der 84ste, resp. der 60ste Theil von demjenigen im Dampf, und es wird sogar noch kleiner, wenn man statt der Formel (24) die genauere (25) benutzt.

Dies Resultat würde gegen unsere gesammte Auffassung sprechen, wenn wir die Moleküle als elastische Kugeln aufzufassen gezwungen wären. Hält man dagegen die viel plausiblere Vorstellung fest, daß die Moleküle für die Zwecke der kinetischen Theorie als bloße Kraftcentra betrachtet werden dürfen, so läßt sich das Ergebniß wohl begreiflich machen; in diesem Falle wird nämlich die auf das stoßende Molekül wirkende Kraft keineswegs nur von dem gestoßenen Molekül ausgeübt, sondern rührt auch von den zahlreichen anderen Molekülen her, die sich nach unserer Annahme in der Wirkungsphäre des gestoßenen befinden, und es entspricht genau den von uns zu Grunde gelegten Vorstellungen, daß diese beiden Wirkungen sich zum größten Theil compensiren. Und hieraus folgt dann auch mit Nothwendigkeit eine Verkleinerung der Sphäre merklicher Ablenkung, d. h. der Stoßkugel.

Auf empirische Thatsachen, die hiermit anscheinend befriedigend harmoniren, gehen wir weiter unten ein. —

Es ist klar, daß man versuchen kann, ebenso, wie die kinetische Theorie der innern Reibung, auch diejenige der Wärmeleitung in Gasen auf die idealen Flüssigkeiten zu übertragen. Ich habe hiervon abgesehen, weil jene ganze Theorie, welche die Strah-

Digitized by Google

lung zwischen den Molekülen vernachlässigt, mir nicht befriedigend erscheint und natürlich um so bedenklicher wird, je näher die Moleküle an einander rücken. Immerhin scheint jene Uebertragung auf wesentliche Widersprüche mit der Erfahrung nicht zu führen.

B. Flüssigkeiten mit mehratomigen Molekülen.

IV. Die Vorstellungen, die wir der Theorie mehratomiger idealer Flüssigkeiten zu Grunde legen, unterscheiden sich nur dadurch von den für einatomige benutzten, daß wir die innere Energie der Moleküle neben der äußern, d. h. neben der lebendigen Kraft ihrer Schwerpunktsgeschwindigkeit, als merklich voraussetzen. Zwar ändern sich durch erstere die Vorgänge im Innern der homogenen Flüssigkeit, resp. des homogenen Dampfes, nicht, und es behält auch das Maxwell'sche Gesetz für die Vertheilung der Schwerpunkts-Geschwindigkeiten auf die Moleküle seine Gültigkeit; aber die Vorgänge beim Uebergang aus der Flüssigkeit in den Dampf und umgekehrt werden komplicirter; und wenn wir auch wegen leicht ersichtlicher Consequenzen eine Polymerisation oder eine Zerlegung der Moleküle in Folge der nächst der Grenze wirkenden (capillaren) Kräfte, wie bisher, so fernerhin ausschließen, so werden jene Kräfte jetzt doch außer auf den äußern, auch auf den innern Zustand der durch die Grenze fahrenden Moleküle einwirken.

Sei wiederum die Grenze zwischen der Flüssigkeit (i) und dem Dampf (a) durch die Ebene ($s = 0$) gegeben, und sei Z die auf ein Molekül in deren Nähe wirkende Kraft; sei V die resultirende Geschwindigkeit des Schwerpunktes eines Moleküles, und seien u, v, w ihre Componenten; sei weiter E die auf die Masseneinheit bezogene gesammte Energie des Moleküles, und sei S die gleichfalls für die Masseneinheit berechnete Arbeit der Kraft Z an dem die Grenze passirenden Molekül. Dann gelten für ein durch die Grenze fahrendes Molekül an zwei Stellen, die beiderseitig nahe der Grenzfläche liegen, die Schwerpunktssätze

$$27) \qquad u_i = u_a,\ v_i = v_a$$

und die Gleichung der Energie

$$28) \qquad E_i - E_a = S.$$

Auf die letzte Beziehung kann man aber eine Theorie erst gründen, wenn ein Zusammenhang zwischen den Werthen E und der äußern Bewegung des Moleküles gegeben ist, und bei unserer vollständigen Unkenntniß der im Innern eines Moleküles wirkenden

Digitized by Google

Kräfte ist ein solcher ohne Zuhilfenahme einer — womöglich auf Erfahrung basirten — Hypothese nicht zu gewinnen.

In Bezug hierauf ist zunächst zu bemerken, daß in der fraglichen Gleichung (28) bei mehratomigen Molekülen sehr wahrscheinlich beträchtliche Theile der ganzen molekularen Energie garnicht zum Ausdruck kommen, weil sie durch die in der Grenze zwischen Dampf und Flüssigkeit wirkenden Kräfte nicht verändert werden und somit für jedes Molekül im Dampf und in der Flüssigkeit gleiche Größe haben. Hierher gehört ohne Zweifel sowohl ein Theil der rotatorischen, als ein Theil der Atomenergie; denn weder die Rotation um eine Axe normal zur Grenze ($s = 0$), noch eine der Grenze parallele Oscillation kann durch eine normal gegen die Grenze wirkende Kraft in ihrer Energie geändert werden. Bezeichnen wir die durch die Arbeit S in der Grenze veränderliche molekulare Energie mit ε, so kann man sonach statt (28) auch schreiben

$$29) \qquad \varepsilon_i - \varepsilon_a = S.$$

Für ein ruhendes ideales Gas besteht bekanntlich zwischen der gesammten mittleren molekularen Energie E_μ und der mittleren molekularen lebendigen Kraft der Schwerpunktsbewegung $(\frac{1}{2}V^2)_\mu$ die Beziehung

$$E_\mu = \frac{2}{3(\varkappa - 1)} (\tfrac{1}{2}V^2)_\mu,$$

worin $\varkappa$ das constante Verhältniß der beiden specifischen Wärmen c_p und c_v bezeichnet.

Wir machen nunmehr hypothetisch den analogen Ansatz

$$\varepsilon_\mu = \tfrac{1}{2}\lambda^2 (V^2)_\mu,$$

in dem λ^2 eine mit der Temperatur wenig oder nicht veränderliche Größe bezeichnet, für den in der Grenze veränderlichen Theil ε der ganzen Energie des Dampfes, und erklären uns das Bestehen dieser Relation genauer dadurch, daß wir sie für jedes einzelne Molekül statuiren, also setzen

$$30) \qquad \varepsilon_a = \tfrac{1}{2}\lambda_a^2 V_a^2.$$

Da jederzeit $\frac{1}{2}V^2 < \varepsilon < E$ ist, so können wir bei Einführung der dem Dampf individuellen Größe $\varkappa_a$ für λ_a^2 die Ungleichung aussprechen:

$$31) \qquad 1 < \lambda_a^2 < \frac{2}{3(\varkappa_a - 1)}.$$

Digitized by Google

Wenn wir aber diese Beziehungen für den als ideal gedachten Dampf annehmen, so drängt uns zugleich die oft benutzte Analogie zwischen den Bedingungen, denen die Moleküle innerhalb des Dampfes, und denjenigen, denen sie innerhalb der Flüssigkeit unterworfen sind, dazu, Gleiches für letztere zu statuiren, also auch zu setzen

32) $$\varepsilon_i = \tfrac{1}{2}\lambda_i^2 V_i^2,$$

wobei nun λ_i^2 als wenigstens angenähert von der Temperatur unabhängig zu betrachten ist, aber nicht von vorn herein bestimmt werden kann.

Unter Rücksicht hierauf gewinnt die Fundamentalgleichung (28) die Gestalt

33) $$V_i^2 \lambda_i^2 - V_a^2 \lambda_a^2 = 2S$$

und wird bei Benutzung von Formel (27) zu

34) $$w_i^2 \lambda_i^2 - w_a^2 \lambda_a^2 + (\lambda_i^2 - \lambda_a^2)(u_i^2 + v_i^2) = 2S.$$

Für den kleinsten Werth c von w_i, der eben noch dem Molekül das Austreten aus der Flüssigkeit gestattet, ergiebt sich die Bedingung

35) $$c^2 = \frac{2S + (\lambda_a^2 - \lambda_i^2)(u_i^2 + v_i^2)}{\lambda_i^2} = s^2 + \lambda(u_i^2 + v_i^2),$$

wobei s und λ Abkürzungen sind; c^2 ist also hier von den Geschwindigkeitscomponenten parallel zur Grenzfläche abhängig. —

Der zweite, beim Durchgang durch die Grenze ($\varepsilon = 0$) unveränderliche Theil $\varepsilon' = E - \varepsilon$ der molekularen Energie kommt unten nur in gewissen Mittelwerthen vor; wir nehmen ihn daher am einfachsten als bei gegebener Temperatur für alle Moleküle gleich an.

V. Ist, wie in der vorigen Arbeit, $2A_i = N_i$ resp. $2A_a = N_a$ die Anzahl Moleküle in der Volumeneinheit von (i) resp. (a), ist $\alpha_i(w)\,dw$ resp. $\alpha_a(w)\,dw$ die Anzahl derjenigen, die hiervon eine Geschwindigkeit parallel Z zwischen w und $w + dw$ besitzen, so stellt

$$\frac{\alpha_i(w)\,dw}{N_i} = \beta_i(w)\,dw, \quad \frac{\alpha_a(w)\,dw}{N_a} = \beta_a(w)\,dw$$

je den entsprechenden Bruchtheil dar.

Nehmen wir für die Vertheilung der Geschwindigkeiten wieder das Maxwell'sche Gesetz an, und verstehen wir wieder unter G_i und G_a den wahrscheinlichsten Werth der Molekulargeschwindigkeit in Flüssigkeit und Dampf, so gilt

Digitized by Google

$$36)\quad \beta_i(w) = \frac{1}{G_i\sqrt{\pi}} e^{-(w/G_i)^2}, \qquad \beta_a(w) = \frac{1}{G_a\sqrt{\pi}} e^{-(w/G)^2};$$

der Bruchtheil aller Moleküle, die gleichzeitig Geschwindigkeiten nach X, Y, Z zwischen u und $u+du$, v und $v+dv$, w und $w+dw$ besitzen, ist demgemäß für jedes der Medien gegeben durch

$$37)\quad \beta(u)\beta(v)\beta(w)\,du\,dv\,dw = \frac{1}{G^3\sqrt{\pi^3}} e^{-(V/G)^2}\,du\,dv\,dw = dF,$$

wobei dF eine neue Bezeichnung darstellt. Es bietet sich nun die Frage, ob ähnlich, wie im Falle einatomiger Moleküle, die Gültigkeit des Maxwell'schen Gesetzes bis hart an die Grenzfläche hin mit dem dort unausgesetzt stattfindenden Austausch zwischen Dampf und Flüssigkeit auch jetzt vereinbar ist.

Hierzu bemerken wir, daß die Zahl der Moleküle, die mit dem soeben vorgeschriebenen Bewegungszustand in der Zeiteinheit aus (i) nach (a) übertreten, gegeben ist durch

$$38)\qquad dn = N_i w_i dF_i = \frac{N_i w_i du_i dv_i dw_i}{G_i^3\sqrt{\pi^3}} e^{-(V_i/G_i)^2},$$

und daß nach dem Uebertritt gemäß der Gleichung (33) oder (34) hieraus wird

$$39)\qquad dn = \frac{N_i w_a du_a dv_a dw_a}{G_i^3\sqrt{\pi^3}} \frac{\lambda_a^2}{\lambda_i^2} e^{-(V_a^2\lambda_a^2 + 2S)/G_i^2\lambda_i^2}.$$

Nun ist aber nach den Formeln (44) und (46), die unten aus der Annahme des Maxwell'schen Gesetzes gefolgert werden, und unter Berücksichtigung von (37) dieser Ausdruck identisch mit

$$40)\qquad dn = \frac{N_a w_a du_a dv_a dw_a}{G_a^3\sqrt{\pi^3}} e^{-(V_a/G_a)^2} = N_a w_a dF_a;$$

und hiermit ist nach S. 350 der früheren Arbeit die Zulässigkeit des Maxwell'schen Gesetzes bis hart an die Grenzebene ($s = 0$) in diesem Falle nachgewiesen, auch wohl zugleich eine Stütze für die in (30) und (32) enthaltene Grundannahme gewonnen. —

Wenn der Dampf mit der Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, so muß bei der molekularen Bewegung je die in der einen und die in der andern Richtung durch die Grenzfläche wandernde Masse und Energie den gleichen Werth haben.

Betrachten wir eine Ebene, die der Grenze ($s = 0$) von der negativen Seite her nahe liegt, so lautet die Bedingung für die Gleichheit der Massen:

Digitized by Google

41)
$$N_i \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_i(u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_i(v)\,dv \int_0^{\infty} \beta_i(w)\,w\,dw$$
$$= N_a \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_a(u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_a(v)\,dv \int_0^{\infty} \beta_a(w)\,w\,dw,$$

diejenige für die Gleicheit der Energien:

42)
$$N_i \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_i(u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_i(v)\,dv \int_0^{\infty} \beta\,(w)\,\lambda_i^2\,V_i^2\,w\,dw$$
$$= N_a \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_a(u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_a(v)\,dv \int_0^{\infty} \beta_a(w)\,(\lambda_a^2\,V_a^2+2S)\,w\,dw.$$

Benutzt man den Ausdruck (35) für c, sowie die Werthe (36) für β_i und β_a und beachtet man, daß

43)
$$1+\lambda = \lambda_a^2/\lambda_i^2$$

ist, so erhält man aus der ersten Formel ohne Schwierigkeit

44)
$$\lambda_i^2\,N_i\,G_i\,e^{-2S/G_i^2\lambda_i^2} = \lambda_a^2\,N_a\,G_a.$$

Für die Berechnung der zweiten ist auszugehen von

$$2\sqrt{\pi}\,N_i \int_0^{\infty} \beta_i(w)\,V_i^2\,w\,dw = \frac{N_i}{G_i} \int_0^{\infty} (u^2+v^2+w^2)\,e^{-(w/G_i)^2}\,dw^2$$
$$= N_i\,G_i^2\left(\frac{u^2+v^2}{G_i^2}\,(1+\lambda)+1+\frac{s^2}{G_i^2}\right) e^{-(s^2+\lambda\,(u^2+v^2))/G_i^2};$$

um die Integration nach u und v auszuführen empfiehlt es sich, $u^2+v^2 = r^2$, $du\,dv = r\,dr\,d\varphi$ zu setzen, wo dann 0 und 2π die Grenzen für φ, 0 und ∞ diejenigen für r sind. Beachtet man noch, daß nach (35) $s^2\lambda_i^2 = 2S$ ist, und benutzt den Werth (43) von $(1+\lambda)$, so folgt nach Beseitigung eines Factors

45)
$$\lambda_i^2\,(\lambda_i^2\,G_i^2+S)\,N_i\,G_i\,e^{-2S/G_i^2\lambda_i^2} = \lambda_a^2\,(\lambda_a^2\,G_a^2+S)\,N_a\,G_a,$$

und, wenn man dies mit Gleichung (44) combinirt, auch

46)
$$\lambda_i^2\,G_i^2 = \lambda_a^2\,G_a^2.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man die Factoren G_i und G_a aus (44) fortschaffen und kommt so zu

47)
$$N_i\,\lambda_i\,e^{-2S/G_i^2\lambda_i^2} = N_a\,\lambda_a.$$

Diese letzten beiden Formeln haben zwar nicht diejenige Einfachheit der analogen (20) in der vorigen Arbeit, in denen die N_λ durch

Digitized by Google

$2A_\lambda$ ersetzt sind, besitzen aber immerhin bemerkenswerthe Natur und Anschaulichkeit. Da das Quadrat der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit G_λ mit dem Mittelwerth der äußern lebendigen Kraft des Moleküles proportional ist, und da letzterer nach S. 32 durch Multiplication mit λ_λ^2 in die gesammte veränderliche Energie ε_λ der Masseneinheit übergeht, so enthält Formel (46) die Aussage

$$48) \qquad (\varepsilon_i)_\mu = (\varepsilon_a)_\mu,$$

welche jetzt an Stelle der für einatomige Moleküle geltenden Beziehung $G_i = G_a$ tritt. Die Verhältnisse sind also hier und dort völlig analog; nur die Theile mit größerer Energie können aus der Flüssigkeit in den Dampfraum austreten, aber durch die in der Grenze wirkenden Kräfte verlieren sie einen solchen Betrag ihres Besitzes, daß die mittlere Energie in Flüssigkeit und Dampf doch den gleichen Werth hat.

Bezeichnen wir, wie $mN_i = \varrho_i$, $mN_a = \varrho_a$ als wirkliche, so $mN\lambda_i = \varrho_i'$, $mN_a\lambda_a = \varrho_a'$ als reducirte Dichten und kürzen die der Flüssigkeit bei gegebener Temperatur individuelle Größe $2S/G_i^2\lambda_i^2$ in σ^2 ab, so nimmt die zweite Gleichung die Formen an

$$49) \qquad \varrho_i\lambda_i e^{-2S/G_i^2\lambda_i^2} = \varrho_a\lambda_a, \quad \varrho_i' e^{-\sigma^2} = \varrho_a',$$

die wiederum der früheren (21) entsprechen.

Es mag ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die vorstehenden Formeln (ebenso wie bei einatomigen Molekülen) gültig bleiben, wenn man in der Weise der kinetischen Gastheorie die Zusammenstöße der Moleküle in Rechnung zieht; nothwendig ist nur, daß die Stöße innerhalb der inhomogenen Uebergangsschicht zwischen den Gebieten (i) und (a) so stattfinden, daß man jedem auf der einen Seite einfahrenden Molekül ein auf der andern Seite austretendes so zuordnen kann, daß es im Sinne der Gleichungen (27) und (28) resp. (29) das erstere zu vertreten vermag.

Auch diese Resultate dürften als einfache und sinngemäße Verallgemeinerungen der für einatomige Moleküle erhaltenen Vertrauen zu unserer Grundannahme über die inneren Energien erwecken. —

Hier kann nun auch sofort der Einfluß besprochen werden, den die Mehratomigkeit der Moleküle auf den Werth des kinetischen Drucks p_i in der Flüssigkeit auszuüben vermag. Es gilt zunächst allgemein nach (19)

$$p_i = \tfrac{1}{2}\varrho_i G_i^2,$$

und da $\lambda_i^2 G_i^2 = \lambda_a^2 G_a^2$ und $G_a^2 = 2B_aT$ ist, unter B_a wieder

Digitized by Google

die Constante des (idealen) Dampfes verstanden, so folgt

$$50) \qquad p_i = \frac{\lambda_a^2}{\lambda_i^2} \varrho_i B_a T = \varrho_i B_i T,$$

d. h., für die Flüssigkeit ist B_a mit einer anderen Größe B_i vertauscht, deren Werth ganz wesentlich von den λ_λ, und somit von der Constitution der Moleküle abhängt.

Bei Berücksichtigung des capillaren Druckes K_i in der S. 26 gezeigten Weise resultirt für den von außen auf die Flüssigkeit wirkenden Druck

$$51) \qquad P = p_i - K_i = \varrho_i B_i T - K_i.$$

Vorstehendes Resultat begründet die auf S. 26 gemachte Bemerkung über die Willkürlichkeit der Annahme einer gleichen Constante B für den Dampf und für die Flüssigkeit, wie mir scheint, in überzeugender Weise.

VI. Um zu einem Ausdruck für die specifische Verdampfungswärme Q zu gelangen, wollen wir — etwas abweichend von der in der ersten Arbeit gewählten Darstellung — von der Gleichung der Energie ausgehen und setzen

$$d\mathrm{A} + \mathfrak{A}\, d\mathrm{W} = d\mathrm{E};$$

hierin ist $d\mathrm{A}$ die dem System zugeführte äußere Arbeit, $d\mathrm{W}$ die gleichfalls zugeführte, calorisch gemessene Wärme, $d\mathrm{E}$ die durch beide bewirkte Energieänderung.

Ist der betrachtete Vorgang die isothermische Condensation der Masse dM des Dampfes, dann besteht $d\mathrm{E}$ aus der Arbeit $-SdM$, welche die innern Kräfte des Systemes bei dem Durchgang der Masse dM durch die Grenze ($s = 0$) leisten, und aus der Differenz $(E_i - E_a)_\mu dM$, die davon herrührt, daß die Masse dM an Dampf verschwindet und ebenso viel an Flüssigkeit hinzukommt. Die äußere Arbeit ist gegeben durch

$$d\mathrm{A} = P_a\left(\frac{1}{\varrho_a} - \frac{1}{\varrho_i}\right) dM,$$

und wenn man noch bedenkt, daß $-dW/dM$ die für jede condensirte Masseneinheit zu entziehende Wärmemenge, und somit die specifische Verdampfungswärme darstellt, so ergiebt sich

$$52) \qquad \mathfrak{A}Q = (E_a - E_i)_\mu + S + P_a\left(\frac{1}{\varrho_a} - \frac{1}{\varrho_i}\right).$$

Da E sich von s nach S. 31 nur um einen Betrag unterscheidet, der sich beim Durchgang durch die Grenze nicht ändert und bei

Digitized by Google

gegebener Temperatur für alle Moleküle gleich gesetzt ist, so verschwinden mit der Differenz $(\varepsilon_a - \varepsilon_i)_\mu$, die nach (48) gleich Null ist, auch $(E_a - E_i)_\mu$, und wir erhalten, wie in (5),

$$\mathfrak{A}Q = S + P_a\left(\frac{1}{\varrho_a} - \frac{1}{\varrho_i}\right).$$

Lassen wir P_a wiederum dem Boyle-Gay Lussac'schen Gesetz folgen, so nimmt dies Resultat in rein kinetischer Deutung die Form an

53) $$\mathfrak{A}Q = \tfrac{1}{2} G_a^2 \left[\sigma^2 \lambda_a^2 + 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_a} e^{-\sigma^2}\right],$$

dagegen durch direct bestimmbare Größen ausgedrückt, die andere

54) $$\mathfrak{A}Q = B_a T\left[\lambda_a^2 l\left(\frac{\varrho_i \lambda_i}{\varrho_a \lambda_a}\right) + 1 - \frac{\varrho_a}{\varrho_i}\right].$$

Combiniren wir die letzte Gleichung wiederum mit der Clausius'schen Formel (9), so resultirt zunächst noch ganz streng

55) $$T\frac{d\varrho_a}{dT}\left(\frac{1}{\varrho_a} - \frac{1}{\varrho_i}\right) = \lambda_a^2 l\left(\frac{\varrho_i \lambda_i}{\varrho_a \lambda_a}\right),$$

eine Gleichung, welche die thermische Veränderlichkeit von ϱ_a bestimmt, wenn diejenige von ϱ_i, und eventuell von λ_i und λ_a gegeben ist.

Vernachlässigt man $1/\varrho_i$ neben $1/\varrho_a$ und sieht die λ_h als constant an, so erhält man einfacher

56) $$d\left(T^{\lambda_a^2} l(\varrho_a \lambda_a)\right) = l(\varrho_i \lambda_i)\, dT^{\lambda_a^2},$$

was integrabel ist, sowie ϱ_i als Function von T bekannt ist. Betrachtet man noch die thermische Veränderlichkeit von ϱ_i als unbedeutend, so erhält man für mäßige Temperaturbereiche als gültig

57) $$T^{\lambda_a^2} l\left(\frac{\varrho_i \lambda_i}{\varrho_a \lambda_a}\right) = C,$$

worin C eine Integrationsconstante bezeichnet.

Entnimmt man den Werth des $l(\varrho_i \lambda_i / \varrho_a \lambda_a)$ aus dieser Formel und setzt ihn in (54) ein, so erhält man bei consequenter Vernachlässigung von ϱ_a neben ϱ_i

58) $$\mathfrak{A}Q = B_a(\lambda_a^2 C T^{1-\lambda_a^2} + T),$$

und damit ein angenähertes Gesetz für die Aenderung der Verdampfungswärme mit der Temperatur, das aber, da $\lambda_a^2 > 1$ sein muß, in der Nähe von $T = 0$ seinen Sinn verlieren dürfte. Aus ihm folgt

Digitized by Google

59) $$\mathfrak{A}\frac{dQ}{dT} = B_a\left(\lambda_a^2(1-\lambda_a^2)CT^{-\lambda_a^2}+1\right),$$

oder unter Berücksichtigung des Werthes von C aus (57) auch

60) $$\mathfrak{A}\frac{dQ}{dT} = -B_a\left(\lambda_a^2(\lambda_a^2-1)l\left(\frac{\varrho_i\lambda_i}{\varrho_a\lambda_a}\right)-1\right).$$

Combinirt man endlich noch die Formel (17) mit den vorstehenden Resultaten, so erhält man für die Differenz der specifischen Wärme $\bar{c}_i$ der Flüssigkeit und $\bar{c}_a$ des gesättigt erhaltenen Dampfes

61) $$\bar{c}_i - \bar{c}_a = \frac{B_a}{\mathfrak{A}}\lambda_a^4 l\left(\frac{\varrho_i\lambda_i}{\varrho_a\lambda_a}\right).$$

VII. Die vorstehenden Formeln enthalten zwei Parameter λ_i und λ_a, die innerhalb mäßiger Grenzen als constant betrachtet sind, und deren Zahlwerthe aus Beobachtungen abgeleitet werden müssen. Indessen liegt es nahe, der Vergleichung mit der Erfahrung zunächst eine vereinfachte Form der obigen Gleichungen zu unterwerfen. Wegen der vollkommenen Analogie, die zwischen dem Verhalten der Moleküle im Innern der Flüssigkeit mit demjenigen in dem Dampfe besteht, kann man vermuthen, daß sich für die coexistirenden Phasen λ_i wenig von λ_a unterscheiden möchte, und kann versuchsweise setzen [1])

$$\lambda_i = \lambda_a = \lambda;$$

λ stellt dann den einzigen Parameter unserer Formeln dar und ist der nach seiner Definition in zwei Grenzen eingeschlossen gemäß der Ungleichung (31)

$$1 < \lambda^2 < \frac{2}{3(\varkappa_a - 1)}.$$

Unsere Fundamentalformeln nehmen nunmehr, wenn wir auch in (54) ϱ_a neben ϱ_i vernachlässigen, die Form an

62) $$Q = \frac{B_a T}{\mathfrak{A}}\left[\lambda^2 l\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_a}\right)+1\right],$$

63) $$T^{\lambda^2} l\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_a}\right) = C,$$

64) $$\frac{dQ}{dT} = -\frac{B_a}{\mathfrak{A}}\left(\lambda^2(\lambda^2-1)l\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_a}\right)-1\right),$$

1) Diese Verfügung würde zulässig sein, auch wenn sich λ_i um einige Procente von λ_a unterscheiden sollte, da der Factor λ_i/λ_a nur unter dem Logarithmus auftritt und deshalb geringen Einfluß übt.

Digitized by Google

$$65) \qquad \bar{c}_i - \bar{c}_a = \frac{B_a \lambda^4}{\mathfrak{A}} l\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_a}\right).$$

Man wird sie passend so verwerthen, daß man aus der ersten von ihnen λ^2 mit Hülfe eines beobachteten Werthes von Q bestimmt und mit diesem in die übrigen eingeht. —

Als erste Substanz wählen wir aus den S. 20 erörterten Gründen Benzol und benutzen die Werthe $\mathfrak{A} = 4{,}23.10^7$, $B_a = 1{,}062.10^6$, $\tau = 80^\circ C$, d. h. $T = 353$, $\varrho_i = 0{,}800$, $\varrho_a = 0{,}00266$, $Q = 93{,}2$. Hieraus folgt für λ^2 der Werth $1{,}66_6$, d. h. 5/3, welcher also aussagt, daß die in der Grenze ($\varepsilon = 0$) veränderliche molekulare Energie dem 5/3fachen der lebendigen Kraft der molekularen Schwerpunktsbewegung gleich ist. Da $2/3(\varkappa_a - 1)$ für Benzol ungefähr 9,11 ist[1]), so genügt das erhaltene λ^2 in der That der obigen Ungleichung.

Es wäre natürlich wünschenswerth, die Größe λ auch noch für andere Temperaturen direct zu bestimmen und dadurch ein Urtheil über den Grad ihrer Veränderlichkeit mit der Temperatur zu erhalten. Indessen mangelt es für eine umfassende Untersuchung an den nöthigen Zahlwerthen für Q. Außer dem oben für $80^\circ C$ (Siedepunkt unter Atmosphärendruck) benutzten Werth 93,2, der zwischen zwei Bestimmungen von Schiff und Wirtz fällt, liegt nur noch eine Bestimmung von Jahn vor, die für $0^\circ C$ (extrapolirt) den Werth 107,63 ergiebt. Verbindet man hiermit die für dieselbe Temperatur geltenden Werthe $\varrho_i = 0{,}899$, $\varrho_a = 0{,}0_3122$, so erhält man $\lambda^2 = 1{,}65$, was dem für $80^\circ C$ berechneten $1{,}66_6$ so nahe liegt, daß jedenfalls für das Intervall zwischen diesen beiden Temperaturen λ^2 constant gesetzt werden darf.

Gehen wir nun mit diesem Werth in Gleichung (63) und benutzen als mittleren Werth von ϱ_i den $80^\circ C$ entsprechenden $\varrho_i = 0{,}800$, so ergiebt sich folgendes System von Werthen

$\tau =$	0°	40°	80°	120°	160°
$T =$	273	313	353	393	433
$\varrho_a =$	$0{,}0_3122$	$0{,}0_2725$	$0{,}0_2266$	$0{,}0_2713$	$0{,}0152_6$
$C =$	100	100	99,5	98,6	97,5.

C, in das eine Potenz von 10 einbezogen ist, findet sich also so constant, als nach der immerhin nur angenäherten Formel irgendwie zu erwarten, und hiermit ist eine befriedigende Bestätigung der Theorie als erbracht anzusehen. Allerdings ist zu bemerken, daß die Constante C wenig empfindlich gegen Veränderungen von

1) O. E. Meyer, l. c. S. 127.

Digitized by Google

ϱ_a ist, und die Berechnung der ϱ_a nach der Formel eine geringere Uebereinstimmung ergeben würde. —

Nachdem die Gleichungen (62) und (63) sich in guter Uebereinstimmung mit der Erfahrung erwiesen haben, hat die Vergleichung der Formel (64) mit der Beobachtung geringeres Interesse; in der That ist sie ja nur eine Folgerung aus jenen und wird im Allgemeinen stimmen, wenn jene zutreffend sind. Wirklich liegt das aus ihr berechnete $dQ/dT = -0{,}160$ dem Werth $-0{,}180$, welcher aus den bei $0^0\,C$ und $80^0\,C$ beobachteten Zahlen für Q nach dem Schema $dQ/dT = (Q_{80} - Q_0)/80$ folgt, so nahe, als nur irgend zu erwarten war.

Die Gleichung (65) gestattet keine directe Vergleichung mit der Beobachtung, da $\bar{c}_a$ einer Messung nicht zugänglich ist; der berechnete Werth von $\bar{c}_i - \bar{c}_a$ ist bei $80^0\,C$ etwa gleich 0,40. —

Wegen seiner großen practischen Wichtigkeit theile ich noch einige auf Wasser bezügliche Zahlen mit, wenngleich es unsicher ist, inwieweit die Annahme nur einer Molekülgattung hier der Wirklichkeit entspricht.

Wir nehmen zunächst, um λ nach (62) zu berechnen, $\tau = 100^0\,C$, $T = 373$, $B_a = 4{,}61.10^6$, $1/\varrho_i = 1{,}043$, $1/\varrho_a = 1650$, $Q = 534$. Es resultirt $\lambda^2 = 1{,}65$, — also dem früher für Benzol gefundenen Werth $1{,}66_5$ überaus nahe liegend. Dies Resultat legt die Vermuthung nahe, daß der Zahlenwerth $\lambda^2 = 5/3$ hier eine besondere Bedeutung habe.

Bei Wasser läßt sich ebenfalls die Abhängigkeit des Parameters λ von der Temperatur wenigstens einigermaßen übersehen, da der Werth von Q für $0^0\,C$ nach den vorliegenden Beobachtungen jedenfalls nicht erheblich von 598 abweicht. Verbindet man hiermit $1/\varrho_i = 1$, $1/\varrho_a = 208000$, so erhält man $\lambda^2 = 1{,}56_5$, also etwas kleiner, als oben für $100^0\,C$ gefunden, was nicht weiter zu verwundern ist, da ja in unserer Ausgangsformel für E_μ (p. 30) $\varkappa$ auch mit der Temperatur variirt. Immerhin zeigt sich, daß man auch hier λ angenähert constant setzen darf.

Da $2/3\,(\varkappa_a - 1)$ für Wasser den Werth 2,41 besitzt, so sind beide von uns für λ^2 erhaltene Werthe mit der dafür geltenden Ungleichung in Uebereinstimmung.

Um die Gleichung (63) mit der Erfahrung zu vergleichen, wählen wir $100^0\,C$ als mittlere Temperatur, und demgemäß $\lambda^2 = 1{,}65$, $1/\varrho_i = 1{,}043$. Dann resultirt folgende Tabelle

Digitized by Google

$\tau =$	0	50	100	150	200
$T =$	273	323	373	423	473
$1/\varrho_a =$	208000	12050	1650	384	125,7
$C =$	$127_{,5}$	129	129	127	124.

Die Constante C, in die wieder eine Potenz von 10 einbezogen ist, variirt nur außerordentlich wenig, obgleich die Dichte fast das 2000fache des kleinsten Werthes erreicht. Die gewiß auffallende Bestätigung der nur angenäherten Formel hängt offenbar damit zusammen, daß sich die Inconstanz von λ und die von ϱ_i größtentheils gegenseitig compensiren.

Auch für Wasser wollen wir die Gleichung (64) prüfen, wenngleich die geringe Aenderung von λ mit T eine angenäherte Uebereinstimmung garantirt; die Berechnung giebt $dQ/dT = -0{,}75$, die Beobachtung $-0{,}71$. Auch der Werth $\overline{c}_a$, nach (65) berechnet, stimmt natürlich mit dem aus Q und dQ/d direct abzuleitenden.

VIII. Wie in § III auf einatomige, so wollen wir nunmehr die Gleichungen für die innere Reibung der Gase auch auf mehratomige Flüssigkeiten anwenden und dabei, wie in § VII, $\lambda_i = \lambda_a$ und deshalb $G_i = G_a = G$, und somit $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{Q}_a = \mathfrak{Q}$ annehmen.

Für Benzol von $80^0\,C$ ist $G = 2{,}40.10^4$, demgemäß bei $16{,}8^0\,C$, für welche Temperatur Bestimmungen der innern Reibung sowohl des Dampfes, wie der Flüssigkeit vorliegen, $G = 1{,}97.10^4$; hieraus folgt dann die mittlere Geschwindigkeit $\mathfrak{Q} = 2{,}23.10^4$. Da für die genannte Temperatur $\varrho_a = 0{,}0_3281$, $\varrho_i = 0{,}890$, $\eta_a = 0{,}0_4732$, $\eta_i = 0{,}0_3688$ ist, so resultirt nach (22) und (26) für die beiden coexistirenden Phasen

$$A_a = 0{,}35.10^{-4}, \quad A_i = 0{,}96.10^{-4},$$

$$\frac{R_a}{R_i} = 9{,}7, \quad \frac{R_a^2}{R_i^2} = 94, \quad \frac{R_a^3}{R_i^3} = 910.$$

Für Wasser von $20^0\,C$ ist $G = 5{,}20.10^4$. also $\mathfrak{Q} = 5{,}87.10^4$; ferner gilt zugleich $1/\varrho_a = 58720$, $1/\varrho_i = 1{,}002$, $\eta_a = 0{,}0_4975$, $\eta_i = 0{,}0103$. Die genannten Gleichungen ergeben hier für die coexistirenden Phasen

$$A_a = 2{,}93.10^{-4}, \quad A_i = 0{,}525.10^{-6},$$

$$\frac{R_a}{R_i} = 10{,}3, \quad \frac{R_a^2}{R_i^2} = 106, \quad \frac{R_a^3}{R_i^3} = 1090.$$

Die Zahlen für $(R_a/R_i)^s$, die nach dem zu (26) Gesagten Minimalwerthe darstellen, zeigen im Einklang mit den bei Quecksilber

Digitized by Google

erhaltenen eine ganz außerordentliche Verminderung des Stoßradius beim Uebergang aus dem dampfförmigen in den flüssigen Zustand; die sogenannte „Molekularsphäre“ oder, wie wir sagen, die „Stoßkugel“ reducirt sich hierbei gar auf den ungefähr tausendsten Theil. Ein solcher Betrag weicht nicht so außerordentlich von den für Quecksilber erhaltenen ab, wie es zunächst scheinen möchte, denn das Verhältniß R_e/R_i wächst stark mit fallender Temperatur — es übersteigt z. B. bei Wasser von $0^0\,C$ schon 14 — und bei Quecksilber sind die Temperaturen 280 und $340^0\,C$ vorausgesetzt. Die Veränderlichkeit des Quotienten R_e/R_i ist übrigens in erster Linie durch die Inconstanz von R_i bedingt, während R_e nahezu constant bleibt.

Daß der Stoßradius bei der Condensation so beträchlich abnimmt, rechtfertigt vielleicht nachträglich die an die Spitze dieser ganzen Untersuchung gestellte Hypothese, daß die wirklichen Flüssigkeiten durch das Modell der idealen — deren innere Moleküle sich den Gasmolekülen analog verhalten — einigermaßen zutreffend abgeschildert werden. —

Was die mögliche Erklärung dieser Resultate betrifft, so ist einiges hierher Gehörige schon auf S. 28 gesagt. Durch die Mitwirkung der übrigen in der Wirkungssphäre des gestoßenen Moleküles befindlichen Massen wird dessen Einwirkung auf ein stoßendes Theilchen zum großen Theil compensirt, und damit hängt zusammen, daß die Sphäre seiner merklichen Stoß-Wirkung (Stoßkugel) in der Flüssigkeit kleiner ist, als im Dampf, wo sich im Allgemeinen kein zweites Molekül in seiner Wirkungssphäre befindet. Da dies letztere Verhältniß sich durch eine beliebige Dilation resp. eine mäßige Kompression nicht ändert, so ist auch einleuchtend, daß R_e in den beiden oben berechneten Fällen, wie überhaupt bei Dampf mäßiger Dichte, angenähert constant sein muß.

Schwieriger zu verstehen ist die erhebliche thermische Aenderung von R_i, die auf einer ausschließlichen Wirkung der geänderten Dichtigkeit nicht beruhen kann. Ob hier bei fallender Temperatur die Abnahme der innern Bewegung der Moleküle oder aber ein Ueberhandnehmen von Doppelmolekülen in der Flüssigkeit eine Rolle spielt, wie solches selbst bei verschwindend geringem Auftreten derselben im Dampf auch nach unserer Theorie möglich ist, muß zunächst dahin gestellt bleiben. —

IX. Eine directe Prüfung der durch die Uebertragung der kinetischen Reibungstheorie auf die idealen Flüssigkeiten gewonnenen Resultate ist, so weit ich sehe, nicht möglich. Dagegen

Digitized by Google

kann man einige Erfahrungsthatsachen angeben, welche mit ihnen in gutem Einklang zu stehen scheinen.

Weniger Gewicht möchte ich dabei dem Umstand beilegen, daß Herr van der Waals [1]) bei Berechnung der Andrews'schen Beobachtungen über die Condensation von Kohlensäure nach seiner Theorie eine die Verflüssigung stets begleitende Verkleinerung der „Molekularsphäre" erhält; denn die Deutung der hier in Frage kommenden Constanten b scheint mir nicht ganz unzweifelhaft.

Dagegen halte ich von einiger Bedeutung für die angeregte Frage die bekannte Entdeckung Herrn van t'Hoff's, daß für den osmotischen Druck eines in Lösung befindlichen Körpers die Gasgesetze mit demselben Werth der Constanten gültig sind, wie für die vergaste Substanz. Dies Resultat erscheint sehr schwer verständlich, wenn man den Molekülen des Lösungsmittels denselben Eigenraum zuspricht, wie sie ihn im dampfförmigen Zustand besitzen; es rückt dem Verständniß aber erheblich näher, wenn man eine Verkleinerung dieses Raumes in der oben angegebenen Höhe zugiebt. In der That würde hiernach in Wasser von $20^0\,C$ den Molekülen des gelösten Körpers ebensoviel freier Raum bleiben, wie in Dampf von der 54-fachen Dichte des bei 20^0 gesättigten, d. h., wie in dem bei ca. $112^0\,C$ gesättigten Dampf. —

Weiter kommen für uns in Frage die Resultate der kinetischen Theorie der Diffusion und der Electrolyse in verdünnten Lösungen von Herrn E. Riecke [2]), die im Wesentlichen auf denselben Grundvorstellungen über die Constitution der Flüssigkeiten beruht, als die vorstehenden Entwicklungen. Nach diesen ist die freie mittlere Weglänge einer Reihe von nicht dissociirten Körpern (z. B. Chloralhydrat) von Molekulargewichten um 170 in Wasser bei 20^0 etwas unter $0{,}1.10^{-8}$, diejenige einer Reihe von Ionen mit Molekulargewichten von 1 bis 126 zwischen 0,1 und $1{,}8.10^{-8}$ gelegen.

Nun zeigt die kinetische Theorie, daß für die Moleküle m' des gelösten Körpers die mittlere freie Weglänge innerhalb einer weit überwiegenden Zahl von Molekülen m des Lösungsmittels gegeben ist durch

$$66)\qquad \begin{aligned} A' &= \frac{3m\sqrt{m\,m'}}{\pi\varrho\,R'^2\,(3m+m')} \quad \text{für } m'>m, \\ A' &= \frac{3m^2}{\pi\varrho\,R'^2\,(3m+m')} \quad \text{für } m'<m \end{aligned}$$

1) Van der Waals, Die Continuität etc. Leipzig 1887, p. 81.

2) E. Riecke, Zeitschr. für phys. Chemie, VI, p. 564, 1890.

Digitized by Google

wobei R' der Radius der für das Zusammentreffen von m mit m' maßgebenden Stoßkugel ist. Combinirt man diese Formel mit der Gleichung (24), d. h. mit

$$\Lambda_i = \frac{3m}{4\pi\varrho_i R_i^2},$$

unter Voraussetzung gleicher Größen ϱ und m, so erhält man

$$67) \quad \begin{aligned} \frac{\Lambda_i}{\Lambda'} &= \frac{R'^2(3m+m')}{R_i^2 4\sqrt{m m'}}, \text{ für } m' > m, \\ \frac{\Lambda_i}{\Lambda'} &= \frac{R'^2(3m+m')}{R_i^2 4m} \text{ für } m' < m; \end{aligned}$$

man kann also, wenn das Verhältniß der Molekulargewichte bekannt ist, aus gegebenen Λ_i und Λ' das Verhältniß R'/R_i berechnen.

Wählt man das Beispiel von Chloralhydrat ($m' = 165$), so ist m'/m nahe 10, der Factor von $(R'/R_i)^2$ also wenig von Eins verschieden. Da auf S. 40 Λ_i für Wasser von $20^0\,C$ etwa gleich $0{,}525.\,10^{-6}$ gefunden ist, so ergiebt sich nach der ersten Formel (67) rund $R'/R_i = 23$, $(R'/R_i)^2 = 525$, $(R'/R_i)^3 = 12000$. Der Eigenraum eines gelösten Moleküles ist also viel größer als der eines Wassermoleküles, und das ist nach der S. 31 und S. 38 vertretenen Auffassung einigermaßen plausibel; denn bei dem Stoß eines Wassermoleküles gegen ein Chloralhydratmolekül (oder umgekehrt) sind nach der Annahme keine andern Moleküle der letzteren Art in der Wirkungssphäre vorhanden, und die Stoßkugel kann sich daher recht wohl von derselben Größenordnung ergeben, wie im Dampf.

Wirklich zeigt die Vergleichung der vorstehenden Zahlen mit den nach S. 40 für Wasser geltenden, daß $(R'/R_i)^3 = 11$. $(R_e/R_i)^3$ ist, was bei der Größe des Verhältnisses m'/m unbedenklich scheint.

Für ein Wasserstoffion ($m = 1$) findet Herr Riecke $\Lambda_i = 0{,}82.\,10^{-6}$; hier wird also nach der zweiten Formel (67)

$$R'/R_i = 9{,}3,\ (R'/R_i)^2 = 87,\ (R'/R_i)^3 = 810;$$

die Stoßkugel für ein Wasserstoffion gegen ein Wassermolekül ergiebt sich hier gleich acht Zehntel der Stoßkugel für ein Molekül des Wasserdampfes beim Zusammentreffen mit einem andern unter der gleichen Temperatur, und das ist ein sehr wohl verständliches Verhältniß.

Die von der Theorie gelieferten zunächst frappierenden Werthe

Digitized by Google

für den Eigenraum eines Flüssigkeitsmoleküles führen also bei ihrer Verwerthung zu Zahlen, die durchaus begreiflich sind.

X. Die Arbeit S, welche die nächst der Grenze ($\varepsilon = 0$) wirkenden Molekularkräfte Z an der hindurchgehenden Masseneinheit leisten, ist nach Formel (1) der vorigen Arbeit gegeben durch

$$-mS = \int_{(i)}^{(a)} Z d\varepsilon,$$

der ganze kapillare Druck in der Grenze nach Formel (3) ebenda durch

$$-mK = \int_{(i)}^{(a)} \varrho Z d\varepsilon;$$

setzt man an Stelle der schnell, aber stetig von ϱ_i nach ϱ_a übergehenden Dichte eine sprungweis veränderliche, und betrachtet die Größenordnung des zweiten Integrales als dadurch ungeändert, so folgt aus diesen beiden Ausdrücken gemäß der alten Formel (5)

$$K (=) \tfrac{1}{2} (\varrho_i + \varrho_a) S,$$

und damit eine Gleichung für die Größenordnung von K.

Nun ist aber nach den Formeln (46) und (47) dieser Arbeit für mehratomige Moleküle

69) $$S = \tfrac{1}{2} G_i^2 \lambda_i^2 l\left(\frac{\varrho_i \lambda_i}{\varrho_a \lambda_a}\right) = \tfrac{1}{2} G_a^2 \lambda_a^2 l\left(\frac{\varrho_i \lambda_i}{\varrho_a \lambda_a}\right),$$

was sich in dem S. 37 vorausgesetzten Fall, daß $\lambda_a = \lambda_i = \lambda$ also $G_i = G_a = G$ ist, auf

69) $$S = \tfrac{1}{2} G^2 \lambda^2 l\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_a}\right)$$

reducirt. Nimmt man hinzu, daß $\frac{1}{2} G^2 = B_a T$ ist, so erhält man in der Gleichung

70) $$K (=) \tfrac{1}{2} (\varrho_i + \varrho_a) B_a T \lambda^2 l\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_a}\right)$$

ein sehr einfaches Mittel, die Größenordnung, resp. einen angenäherten Zahlenwerth von K zu bestimmen. Im Falle einatomiger Moleküle ist dabei $\lambda = 1$ zu setzen.

Wir wollen die Formel (70) auf die drei Flüssigkeiten anwenden, die uns schon oben als Beispiele gedient haben.

Für Quecksilber erhält man unter Benutzung des Werthes $B_a = 0{,}423 . 10^6$

Digitized by Google

bei $100^0\,C$, wo $\varrho_i = 13{,}35$, $\varrho_a = 0{,}0_5234$ ist, $K = 15800$ Atm,
bei $350^0\,C$, wo $\varrho_i = 12{,}76$, $\varrho_a = 0{,}0_334$ ist, $K = 13400$ Atm.

Bei niedrigeren Temperaturen ist die Unsicherheit in der Bestimmung des äußerst kleinen ϱ_a zu groß, als daß die Berechnung der entsprechenden K lohnte.

Für Benzol liefert die Benutzung der Werthe $B_a = 1{,}062.10^6$, $\lambda^2 = 1{,}65$

bei $0^0\,C$, wo $\varrho_i = 0{,}899$, $\varrho_a = 0{,}0_3122$ ist, $K = 1900$ Atm.

Für Wasser ergiebt sich aus $B_a = 4{,}61.10^6$, $\lambda^2 = 1{,}57$

bei $0^0\,C$, wo $1/\varrho_i = 1{,}00$, $1/\varrho_a = 208000$ ist, $K = 12000$ Atm.

Die letzteren Werthe gestatten die Vergleichung mit von Herrn van der Waals u. A. aus seiner Formel erschlossenen und liegen jenen (1500 resp. 10500—10700 Atm.) so nahe, daß man, angesichts der nur angenäherten Gültigkeit der beiden Formeln, von Uebereinstimmung sprechen kann. Aehnliches gilt für einige andere Flüssigkeiten, die ich der Rechnung unterworfen habe; die vorstehend entwickelte Theorie schließt sich also nach dieser Richtung einer anderen, wohlbewährten, widerspruchslos an. —

Die im Vorstehenden mitgetheilten Entwickelungen sind, abgesehen von dem willkürlichen Gleichsetzen der Parameter λ_i und λ_a, vornehmlich nach zwei Seiten hin im Interesse der Einfachheit specialisirt. Einerseits sind Körper mit nur einer Molekülgattung im flüssigen und dampfförmigen Zustande vorausgesetzt, andererseits ist für die Dämpfe das Boyle-Gay Lussac'sche Gesetz als gültig angenommen. Die Erweiterung der Theorie in diesen beiden Richtungen, wie auch die Beibringung umfänglicheren Zahlenmateriales bleibt einer späteren Mittheilung vorbehalten.

Schluss.

Die im Vorstehenden zusammengestellten Resultate werden unzweifelhaft manchen Bedenken begegnen. Deshalb mögen die Grundlagen, auf denen sie ruhen, nochmals aufgezählt werden.

Die für einatomige Flüssigkeiten erhaltenen Gleichungen (1) bis (8) sind strenge Folgerungen aus der alleinigen Annahme der Gültigkeit des Maxwell'schen Geschwindigkeitsgesetzes für Dampf und Flüssigkeit; die Gleichungen (9)—(18) benutzen daneben nur noch sichergestellte Beziehungen der allgemeinen Thermodynamik. Diese Grundlagen sind mit den von Herrn van der Waals benutzten anscheinend vollkommen vereinbar; sie sind aber insofern allgemeiner, wie die seinigen, als für das hier verfolgte speciellere Ziel diejenigen weiteren Hypothesen, welche jener Forscher zum Zweck der Ableitung seiner berühmten Gleichung eingeführt hat,

Digitized by Google

nicht nöthig waren. Die Abweichungen, welche zwischen unsern Formeln (8) für die Verdampfungswärme, (11) für die Dampfdichte und den aus der van der Waal'schen Formel zu gleichem Zwecke abgeleiteten bestehen, beruhen ganz wesentlich auf diesen Hypothesen. Ein Einwand gegen jene Kategorie unserer Formeln wäre sonach nur gegen die Annahme des Maxwell'schen Gesetzes für die Flüssigkeit zu richten, das in der That hier eine ganz anders fundamentale Bedeutung hat, wie in der van der Waals'schen Theorie, wo es nur beiläufig herangezogen wird. Aber durch den geführten Nachweis, daß sich jenes Gesetz in der Flüssigkeit bis zu einem gewissen Grade durch die aus dem Dampf einfahrenden Moleküle von selbst herstellt, wird ein solcher Einwand nicht eben wahrscheinlich. —

Die für mehratomige Moleküle aufgestellten Gleichungen (46) bis (55) beruhen, außer auf dem Maxwell'schen Gesetz, noch auf einer Hypothese über die Veränderung der inneren molekularen Energie beim Durchgang durch die Grenze, die so gewählt ist, daß sie die gleichzeitige Gültigkeit jenes Gesetzes für Flüssigkeit und Dampf nicht in Frage stellt. Diese Hypothese bietet selbstverständlich zu Einwänden mancherlei Gelegenheit, aber bei ihrer Billigung sind auch die genannten Gleichungen zuzugeben. Gleiches gilt von den Formeln (56) bis (61), die außer jenen Grundlagen nur noch die Principien der allgemeinen Thermodynamik voraussetzen. —

Die Uebertragung der Gleichungen der innern Reibung von den Gasen auf die idealen Flüssigkeiten steht mit den bisher recapitulirten Betrachtungen in keinem nothwendigen Zusammenhang. Man kann, vor den seltsamen hier sich ergebenden Resultaten zurückschreckend, jene Uebertragung aus irgend welchen Gründen beanstanden, ohne schon dadurch gegen die übrigen mitgetheilten Gesetze Stellung zu nehmen. Ich hielt die Uebertragung für so naheliegend, und die daraus zu gewinnenden Folgerungen für so eigenartig, daß ich ihre Mittheilung für angezeigt hielt. Der Widerspruch, in welchem sie sich auf den ersten Blick mit dem van der Waals'schen Gesetz, speciell mit der gebräuchlichen Deutung der Constanten b, befinden, ist mir natürlich nicht entgangen. Indessen ist jene Deutung wohl nicht die einzig mögliche; z. B. kann man die van der Waals'sche Formel aus der Beziehung

$$B T \varrho = p + K$$

erhalten, wenn man B nicht als Constante, sondern als Function

Digitized by Google

des Volumens betrachtet, etwa gleich $B_0/(1-b\varrho)$ setzt. Daß eine solche Auffassung möglich ist, findet sich u. a. auf S. 35 dargethan.

Indessen handelt es sich im Vorstehenden nicht um die Aufstellung einer Zustandsgleichung, sondern allein um die möglichst strenge und möglichst weitgehende analytische Verfolgung derjenigen Vorstellung über den Mechanismus des Verdampfsvorganges, die seit Clausius allgemein angenommen ist, die aber eine exacte Behandlung, soviel mir bekannt, bisher noch nicht gefunden hatte. Unter diesem Gesichtspunkt ist die mitgetheilte Untersuchung zu beurtheilen.

Göttingen, Februar 1897.

Digitized by Google

Ueber Diophantische Gleichungen.

Von

David Hilbert.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Februar 1897.)

Die Diskriminante D der Gleichung $n$ten Grades in t

$$x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + \cdots + x_n = 0 \tag{1.}$$

mit den unbestimmten Coefficienten $x_0, x_1, \cdots, x_n$ und den Wurzeln $t_1, \cdots, t_n$ wird durch den Ausdruck

$$D = x_0^{2n-2} \Pi_{(i,k)} (t_i - t_k)^2$$
$$(i = 1, 2, \ldots n;\ k = i+1, i+2, \ldots, n)$$

definirt; die Diskriminante D ist eine ganze rationale Function vom Grade $2n-2$ in den Unbestimmten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und mit ganzen rationalen Zahlencoefficienten. Im Folgenden behandeln wir die diophantische Gleichung

$$D = \pm 1. \tag{2.}$$

I. Die Diophantische Gleichung (2.) ist stets in rationalen Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ auflösbar.

Um dies einzusehen, setzen wir in der Gleichung (1.) $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_{n-2} = 0$; es entsteht dann eine trinomische Gleichung, und wir finden für die Discriminante derselben den Wert:

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \{n^n x_0^{n-1} x_n^{n-1} + (1-n)^{n-1} x_0^{n-2} x_{n-1}^n\}.$$

Der rechts in geschwungener Klammer stehende Ausdruck wird gleich ± 1, sobald wir bezüglich

bei ungeradem n

$$x_0 = (1-n)^{\frac{n-1}{2}},\ x_{n-1} = (n-1)^{\frac{n+1}{2}},\ x_n = 0$$

Digitized by Google

bei geradem n

$$x_0 = (1-n)^{\frac{n}{2}-1},\quad x_{n-1} = (1-n)^{-\frac{n}{2}+1},\quad x_n = n^{-1}(1-n)^{-\frac{n}{2}+1}$$

einsetzen.

Von erheblichem Interesse erscheint mir nun die Frage nach den ganzen rationalen Lösungen der Diophantischen Gleichung (2.); diese Frage wird durch folgenden Satz beantwortet:

II. Die Diophantische Gleichung (2.) ist für $n>3$ in **ganzen** rationalen Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nicht lösbar. Die einzigen Gleichungen mit **ganzen** rationalen Coefficienten und mit der Diskriminante ± 1 sind

die quadratische

$$(ut+v)(u't+v')$$

und die cubische

$$(ut+v)(u't+v')([u+u']t+[v+v']);$$

dabei bedeuten u, u', v, v' beliebige ganze rationale Zahlen mit der Bedingung

$$uv'-u'v = \pm 1.$$

Wir beweisen zunächst die folgende Thatsache:

Es sei eine im Bereich der rationalen Zahlen irreducible Gleichung $n$ten Grades in t vorgelegt

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{3.}$$

deren Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze rationale Zahlen sind; es sei α eine Wurzel dieser Gleichung und k der durch α bestimmte Zahlkörper $n$ten Grades: dann ist die Diskriminante D dieser Gleichung (3.) stets eine solche ganze rationale Zahl, welche die Diskriminante d des Körpers k als Factor enthält.

Zum Beweise setzen wir $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ so, daß α_1, α_2 ganze Zahlen des Körpers k sind; wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{a}$ den größten gemeinsamen Idealtheiler der beiden Zahlen α_1, α_2 und verstehen unter $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ solche Ideale des Körpers k, daß

$$\alpha_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1,\quad \alpha_2 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$$

wird. Endlich sei β_2 eine durch $\mathfrak{a}_2$ theilbare ganze Zahl in k von der Art, daß der Quotient $\frac{\beta_2}{\mathfrak{a}_2}$ zu der Diskriminante d des Körpers k prim ausfällt. Das Product $\alpha\beta_2$ ist eine ganze Zahl des Körpers k, weil $\alpha_1\beta_2$ durch das Ideal $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$ theilbar ist; wir

Digitized by Google

setzen $\beta_1 = \alpha\beta_2$ und haben dann $\alpha = \frac{\beta_1}{\beta_2}$. Um den größten gemeinsamen Idealtheiler $\mathfrak{b}$ der beiden ganzen Zahlen β_1, β_2 zu bestimmen, bezeichnen wir die den ganzen Zahlen β_1, β_2 entsprechenden Hauptideale des Körpers k ebenfalls bezüglich mit β_1, β_2; wir erhalten dann

$$\beta_1 = \frac{\beta_2}{\mathfrak{a}_2}\mathfrak{a}_1, \quad \beta_2 = \frac{\beta_2}{\mathfrak{a}_2}\mathfrak{a}_2.$$

Da $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ den größten gemeinsamen Idealtheiler 1 haben, so ergiebt sich der größte gemeinsame Theiler $\mathfrak{b}$ der beiden ganzen Zahlen β_1, β_2 gleich dem Quotient $\frac{\beta_2}{\mathfrak{a}_2}$ und folglich fällt $\mathfrak{b}$ zu der Diskriminante d des Körpers k prim aus.

Bezeichnen wir die zu den Zahlen α, β_1, β_2 conjugirten Zahlen bezüglich mit $\alpha', \ldots, \alpha^{(n-1)}$, $\beta_1', \ldots, \beta_1^{(n-1)}$; $\beta_2', \ldots, \beta_2^{(n-1)}$, so ergiebt sich für die Diskriminante D der Gleichung (3.) der Werth

$$D = a_0^{2n-2}\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \ldots & \alpha^{n-1} \\ 1 & \alpha' & \ldots & \alpha'^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha^{(n-1)} & \ldots & (\alpha^{(n-1)})^{n-1} \end{vmatrix}^2$$

und, wenn wir $\alpha = \frac{\beta_1}{\beta_2}$, $\alpha' = \frac{\beta_1'}{\beta_2'}$, $\ldots$, $\alpha^{(n-1)} = \frac{\beta_1^{(n-1)}}{\beta_2^{(n-1)}}$ einsetzen

$$D = \frac{a_0^{2n-2}B}{(n(\beta_2))^{2n-2}}, \tag{4.}$$

wo $n(\beta_2)$ die Norm der Zahl β_2 in k bedeutet und wo zur Abkürzung

$$B = \begin{vmatrix} \beta_1^{n-1}, & \beta_1^{n-2}\beta_2, & \ldots, & \beta_2^{n-1} \\ \beta_1'^{n-1}, & \beta_1'^{n-2}\beta_2', & \ldots, & \beta_2'^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\beta_1^{(n-1)})^{n-1}, & (\beta_1^{(n-1)})^{n-2}\beta_2^{(n-1)}, & \ldots, & (\beta_2^{(n-1)})^{n-1} \end{vmatrix}^2 \tag{5.}$$

gesetzt ist.

Verstehen wir unter t einen unbestimmten Parameter, so ist das Product

$$(\beta_2 t - \beta_1)(\beta_2' t - \beta_1') \ldots (\beta_2^{(n-1)} t - \beta_1^{(n-1)})$$

eine ganze rationale Function von t mit ganzen rationalen Zahlen-

Digitized by Google

coefficienten. Nach einem zuerst von Kronecker[1]) aufgestellten und bewiesenen Satze ist der größte gemeinsame Teiler dieser ganzen rationalen Coefficienten gleich der Norm $n(\mathfrak{b})$ des Ideals $\mathfrak{b}$. Es ist für unseren Beweis offenbar keine Einschränkung, wenn wir annehmen, daß die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in (3.) den größten gemeinsamen Theiler 1 haben. Unter dieser Voraussetzung ergeben unsere Ausführungen die in t identische Relation

$$(\beta_2 t-\beta_1)(\beta_2' t-\beta_1')\ldots(\beta_2^{(n-1)} t-\beta_1^{(n-1)}) = \pm n(\mathfrak{b})(a_0 t^n+a_1 t^{n-1}+\cdots+a_n)$$

und durch Vergleichung der Coefficienten von t^n erhalten wir somit

$$n(\beta_2) = \pm a_0 n(\mathfrak{b}).$$

Mit Benutzung dieser Gleichung nimmmt die Gleichung (4.) die Gestalt an

$$D = \frac{B}{(n(\mathfrak{b}))^{2n-2}}.$$

Da B, wie man sofort aus (5.) sieht, durch die Diskriminante d des Körpers k theilbar ist und da $\mathfrak{b}$ und folglich auch $n(\mathfrak{b})$ zu d prim ausfällt, so folgt aus dieser Gleichung die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung.

Um nun den Satz II über die Diophantische Gleichung (2.) zu beweisen, wenden wir den Satz von H. Minkowski[2]) an, demzufolge die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers stets von ± 1 verschieden ist. Mit Rücksicht auf die vorhin bewiesene Tatsache muß hiernach auch jede im Bereich der rationalen Zahlen irreducible Gleichung (3.) eine Diskriminante haben, die von ± 1 verschieden ist. Ist andererseits eine reducible Gleichung mit ganzen rationalen Zahlencoefficienten vorgelegt, so muß ihre Diskriminante einem bekannten Satze zufolge durch die Diskriminante eines jeden ganzzahligen Factors ihrer linken Seite teilbar sein. Hieraus folgt, daß die Diskriminante D einer Gleichung jedenfalls nur dann gleich ± 1 sein kann, wenn ihre linke Seite in lauter lineare Factoren mit ganzen rationalen Zahlencoefficienten zerfällt.

Soll nun die Diskriminante einer Gleichung $n$ten Grades

---

1) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Journ. für Math. Bd. 92. Vgl. ferner meinen demnächst erscheinenden Bericht für die Deutsche Mathematiker-Vereinigung „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper" Satz 20, S. 190.

2) Geometrie der Zahlen. Leipzig 1896 S. 130. Vgl. auch meinen oben citirten Bericht, Satz 44, S. 211.

Digitized by Google

$$(6.) \qquad (ut+v)(u't+v')\ldots(u^{(n-1)}t+v^{(n-1)}) = 0,$$

worin u, v, u', v' ... $u^{(n-1)}$, $v^{(n-1)}$ ganze rationale Zahlen bedeuten, gleich ± 1 werden, so muß notwendig jede der $\frac{n(n-1)}{2}$ Determinanten

$$(7.) \qquad uv'-u'v,\ uv''-u''v,\ \ldots,\ u^{(n-2)}v^{(n-1)}-u^{(n-1)}v^{(n-2)}$$

den Wert ± 1 haben. Setzen wir in (6.)

$$t = \frac{-v+v't'}{u-u't'}$$

und multipliciren dann mit $(u-u't')^n$, so geht die linke Seite der Gleichung (6.) in eine Gleichung von der nämlichen Gestalt (6.) über; doch ist nunmehr

$$u = \pm 1,\ v = 0,\ u' = 0,\ v' = \pm 1.$$

Da die Ausdrücke (7.) den Wert ± 1 haben sollen, so ergiebt sich daraus leicht, daß der Grad n nur gleich 2 oder gleich 3 sein kann und daß im letzteren Falle

$$u'' = \pm 1,\ v'' = \pm 1$$

sein muß; damit ist der Satz II vollständig bewiesen.

Ich schließe hier noch einige allgemeine Bemerkungen über Diophantische Gleichungen an.

Wenn es sich um den Nachweis handelt, daß eine vorgelegte Diophantische Gleichung in rationalen Zahlen nicht lösbar ist, so gelingt dieser Nachweis in vielen Fällen dadurch, daß man die Diophantische Gleichung in eine Congruenz umwandelt und dann die Unmöglichkeit einer Lösung dieser Congruenz nach einer Primzahl oder Primzahlpotenz feststellt. Für den Fall einer quadratischen Diophantischen Gleichung mit zwei Unbekannten folgt umgekehrt aus der Lösbarkeit sämmtlicher aus ihr entspringenden Congruenzen die Lösbärkeit der Gleichung in rationalen Zahlen. Wir können nämlich auf Grund der bekannten Kriterien für die Lösbarkeit einer quadratischen ternären Diophantischen Gleichung den folgenden Satz[1]) ableiten:

Wenn m, n beliebige ganze rationale Zahlen bedeuten, so ist die Diophantische Gleichung

$$mx^2+ny^2 = 1$$

in rationalen Zahlen x, y stets dann lösbar, wenn die Congruenz

1) Vgl. meinen oben citirten Bericht, Satz 102, S. 299.

Digitized by Google

$$m x^2 + n y^2 \equiv 1$$

nach jeder Primzahl und nach jeder Primzahlpotenz in ganzen rationalen Zahlen x, y lösbar ist.

Daß dieser Satz auf Diophantische Gleichungen höheren Grades jedenfalls nicht unmittelbar übertragen werden darf, zeigen die Beispiele:

(8.) $$y^2 + 7(x^3+1)(x^3-2)^2(x^3+2)^2 = 0,$$

(9.) $$y^2 - 3(x^3+1)^2(x^3-2)^2(x^3+2)^2(x^3+7) = 0.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind irreducible Functionen von x, y. Keine der beiden Gleichungen (8.), (9.) ist in rationalen Zahlen x, y lösbar. Bedeutet p eine beliebige ungerade Primzahl, so ist jedenfalls eine der drei Zahlen -1, $+2$, -2, quadratischer Rest nach p; bezeichnen wir denselben mit r und bedeutet e einen beliebigen ganzzahligen Exponenten, so läßt sich offenbar eine ganze rationale Zahl a finden, für welche $a^3 \equiv r$ nach p^e ausfällt und es hat mithin die Congruenz

$$y^2 + 7(x^3+1)(x^3-2)^2(x^3+2)^2 \equiv 0, \quad (p^e)$$

die Lösung $x = a$, $y = 0$. Ist ferner 2^e eine beliebige Potenz von 2, so giebt es, wie leicht zu sehen, stets eine ganze rationale Zahl b, so daß $b^2 + 7 \cdot 2^4 \equiv 0$ nach 2^e wird, und es ist mithin $x = 0$, $y = b$ eine Lösung der Congruenz

$$y^2 + 7(x^3+1)(x^3-2)^2(x^3+2)^2 \equiv 0. \quad (2^e)$$

Aehnlich folgt die Richtigkeit unserer Behauptung für die Diophantische Gleichung (9.).

Das eben besprochene Vorkomniß legt uns die Vermutung nahe, daß es sehr wohl ganze rationale Functionen von t mit ganzen rationalen Zahlencoefficienten geben könnte, die im Bereich der rationalen Zahlen irreducibel sind und trotzdem im Sinne der Congruenz nach jeder Primzahl und nach jeder Primzahlpotenz reducibel sind. In der That stellt beispielsweise das Produkt

(10.) $$\left(t + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{-31}}{2}\right)\left(t + \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{-31}}{2}\right)\left(t + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{-31}}{2}\right)\left(t + \frac{-\sqrt{5}-\sqrt{-31}}{2}\right)$$
$$= t^4 + 13t^2 + 81$$

eine irreducible Function 4ten Grades mit ganzen rationalen Coefficienten dar, welche im Sinne der Congruenz nach jeder Primzahl und nach jeder Primzahlpotenz in das Product von zwei ganzen

Digitized by Google

Functionen mit ganzen rationalen Zahlencoefficienten zerfällt. Der Beweis ergiebt sich leicht in folgender Weise. Die Primzahl 31 ist in dem durch $\sqrt{5}$ bestimmten quadratischen Körper $k_1 = k(\sqrt{5})$ und die Primzahl 5 ist in dem durch $\sqrt{-31}$ bestimmten quadratischen Körper $k_2 = k(\sqrt{-31})$ je in zwei von einander verschiedene Primideale zerlegbar. Ferner ist leicht zu sehen, daß jede von 5 und 31 verschiedene Primzahl mindestens in einem der drei quadratischen Körper k_1, k_2 oder $k_3 = k(\sqrt{-5 \cdot 31})$ als Produkt zweier von einander verschiedener Primideale zerlegt werden kann. Es bedeute nun p irgend eine Primzahl und k einen solchen unter den drei quadratischen Körpern k_1, k_2, k_3, in dem p in zwei von einander verschiedene Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ zerfällt; dann wählen wir in dem Produkt auf der linken Seite von (10.) zwei Factoren aus derart, daß ihr Produkt eine quadratische Funktion

$$t^2 + \alpha t + \beta$$

mit ganzen algebraischen, in k gelegenen Coefficienten wird. Das Produkt der beiden übrigen Faktoren sei

$$t^2 + \alpha' t + \beta';$$

hierin sind dann α', β' ebenfalls ganze Zahlen in k. Da $\mathfrak{p}$ ein in p nur zur ersten Potenz vorkommendes Primideal ersten Grades in k ist, so giebt es, wenn e einen beliebigen Exponenten bedeutet, stets vier ganze rationale Zahlen a, b, a', b', so daß $\alpha \equiv a$, $\beta \equiv b$, $\alpha' \equiv a'$, $\beta' \equiv b'$ nach $\mathfrak{p}^e$ ausfällt. Daraus folgt

$$(t^2 + \alpha t + \beta)(t^2 + \alpha' t + \beta') \equiv (t^2 + a t + b)(t^2 + a' t + b'), \ (\mathfrak{p}^e)$$

und folglich auch

$$t^4 + 13 t^2 + 81 \equiv (t^2 + a t + b)(t^2 + a' t + b'), \quad (p^e).$$

Göttingen, den 20. Februar 1897.

Digitized by Google

Note über die Vertauschungsgruppen von acht Dingen.

Von

A. Wiman in Lund.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Februar 1897 von F. Klein.)

1. Das Problem der Lösung einer algebraischen Gleichung von beliebiger Galois'scher Gruppe ist ersichtlich in der folgenden allgemeinen Aufgabe enthalten: es sei gegeben eine endliche Gruppe homogener linearer Substitutionen von n Veränderlichen; es sollen die Werthe der n Veränderlichen aus den Invarianten der Gruppe berechnet werden. Für die Behandlung dieser Classe von Aufgaben hat Hr. Klein die folgende Formulirung gegeben: unter den Aufgaben mit isomorphen Gruppen darf man diejenige von der möglichst geringen Dimensionenzahl als die einfachste betrachten; man benenne dieselbe das Normalproblem; der eigentlich algebraische Theil der Lösung besteht dann in der Reduction der isomorphen Aufgaben auf ein Normalproblem[1]). Diesem Standpunkte entsprechend, führt Hr. Klein die allgemeine Gleichung 5. Grades auf das binäre Ikosaederproblem zurück. Er hat auch gezeigt[2]), wie die allgemeinen Gleichungen 6. u. 7. Grades auf quaternäre Formenprobleme reducirt werden können, wobei es ihm freilich noch unbekannt war, daß es schon im ternären Gebiete eine mit der alternirenden Gruppe von 6 Dingen holoedrisch isomorphe Collineationsgruppe giebt. Eine ähnliche Reduction der allgemeinen Gleichungen 8. Grades ist nicht gefunden. Hr. Klein hat auch bemerkt[3]), daß dieselben wahrscheinlich ihr eigenes Nor-

1) Man sehe etwa Klein, *Evanston Colloquium*, Lecture IX. Dort findet man auch weitere Litteratur-Nachweisungen.

2) Math. Ann. XXVIII.

3) Ev. Coll., S. 74.

Digitized by Google

malproblem bilden. Daß diese Vermuthung richtig ist, wollen wir hier nachweisen.

2. Durch Einführung überzähliger homogener Coordinaten, für welche die Relation

$$\sum_{i}^{n} x_i = 0$$

identisch erfüllt wird, erhält man unmittelbar die symmetrische Gruppe von n Dingen als Vertauschungsgruppe der x_i in einem Raume von $n-2$ Dimensionen dargestellt. Unser oben angegebenes Ziel wird also erreicht, wenn wir nur beweisen können, daß in einem Raume von weniger als 6 Dimensionen keine mit der symmetrischen oder alternirenden Gruppe von 8 Dingen isomorphe Collineationsgruppe construirt werden kann. Nun läßt sich aber der fragliche Beweis schon für eine Untergruppe vom Grade 56 erbringen. Ausgezeichnete Untergruppe dieser G_{56} ist eine Abel'sche G_8, welche außer der Identität lauter Elemente von der Periode zwei enthält:

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{ll} (a_1a_2)(a_3a_4)(a_5a_6)(a_7a_8), & (a_1a_3)(a_2a_4)(a_5a_7)(a_6a_8), \\ (a_1a_4)(a_2a_3)(a_5a_8)(a_6a_7), & (a_1a_5)(a_2a_6)(a_3a_7)(a_4a_8), \\ (a_1a_6)(a_2a_5)(a_3a_8)(a_4a_7), & (a_1a_7)(a_2a_8)(a_3a_5)(a_4a_6), \\ (a_1a_8)(a_2a_7)(a_3a_6)(a_4a_5). & \end{array}$$

Wir bezeichnen diese Elemente der Reihe nach mit den Indices: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7. Hier gelten ersichtlich die Relationen:

$$A_3 = A_1A_2, \quad A_5 = A_1A_4, \quad A_6 = A_2A_4, \quad A_7 = A_1A_2A_4.$$

Combinirt man diese G_8 mit einer von $8G_7$, etwa

$$(a_2a_3a_5a_4a_7a_8a_6),$$

so erhält man eine G_{56} der besprochenen Art. In der That erleiden durch diese G_7 die A_i die cyclische Permutation

$$(A_1A_2A_4A_3A_6A_7A_5).$$

Die G_8 ist also ausgezeichnete Untergruppe innerhalb der G_{56}, und letztere Gruppe enthält noch $7G_7$, welche durch die Permutationen:

$$\begin{array}{lll} (a_1a_4a_6a_2a_3a_7a_5), & (a_4a_1a_7a_2a_5a_6a_3), & \\ (a_2a_3a_6a_1a_4a_5a_7), & (a_6a_7a_1a_3a_2a_4a_5), & \\ (a_5a_6a_2a_7a_4a_3a_1), & (a_3a_5a_2a_6a_1a_2a_4), & (a_7a_6a_4a_5a_2a_1a_3), \end{array}$$

erzeugt werden.

Digitized by Google

Nun lehrt eine leichte Abzählung, daß in der Gesammtgruppe von acht Dingen $\frac{|\underline{8}}{2^4|\underline{4}} = 105$ Elemente existiren, welche mit den in der G_8 enthaltenen G_2 gleichberechtigt sind. Anderseits findet man sofort, daß jede G_2 in zwei Gruppen G_8 enthalten ist. So erhält man z. B. aus (I) dieselbe neue G_8, wenn man eine beliebige von den Transpositionen $(a_1 a_2)$, $(a_3 a_4)$, $(a_5 a_6)$ oder $(a_7 a_8)$ ausführt, wobei aber nur das erste Element unverändert bleibt. Aus der Bildungsweise der G_8 erhellt aber auch, daß dieses Element in keiner anderen G_8 eingeht. Die Zahl der G_8 ist also $= \frac{2 \cdot 105}{7} = 30$. Jede G_8 muß also innerhalb der symmetrischen Gruppe von 8 Dingen in einer $G\frac{|\underline{8}}{30} = G_{1344}$ ausgezeichnet enthalten sein. Diese 30 G_{1344} gehören aber schon zur alternirenden $G\frac{|\underline{8}}{2}$; dieselben sind also innerhalb letzterer Gruppe nicht alle gleichberechtigt, sondern zerlegen sich in zwei Systeme von je 15 gleichberechtigten Gruppen. Die obige Behauptung folgt einfach daraus, daß jede G_{1344} durch Operationen, welche der alternirenden Gruppe angehören, erzeugt wird. So erhält man z. B. die zur Gruppe (I) gehörige G_{1344} durch Combination der G_8 selbst mit einer einfachen G_{168}, welche a_1 ungeändert läßt. Die in dieser G_{168} enthaltenen 8 G_7 erzeugt man durch die Permutationen:

$$(a_2 a_3 a_5 a_4 a_7 a_8 a_6), \quad (a_2 a_3 a_5 a_6 a_8 a_4 a_7),$$
$$(a_2 a_3 a_6 a_4 a_8 a_7 a_5), \quad (a_2 a_3 a_6 a_5 a_7 a_4 a_8),$$
$$(a_2 a_3 a_7 a_4 a_5 a_6 a_8), \quad (a_2 a_3 a_7 a_8 a_6 a_4 a_5),$$
$$(a_2 a_3 a_8 a_4 a_6 a_5 a_7), \quad (a_2 a_3 a_8 a_7 a_5 a_4 a_6).$$

Die A_i werden bei dieser G_{168} durch eine isomorphe Gruppe von Permutationen transformirt. In der That lassen sich die Vertauschungen, welche die A_i bei den obigen G_7 erleiden, sofort aufschreiben, wenn man nur jedesmal a_i durch A_{i-1} ersetzt. Da die A_i bei der G_8 unvertauscht bleiben, so ersieht man, daß der vollständigen G_{1344} der a_i nur die soeben besprochene G_{168} der A_i entspricht.

Die G_{1344} besitzt zwei Systeme von je acht gleichberechtigten einfachen G_{168}. Das eine System ist durch das Festbleiben je eines einzelnen a_i definirt; für das andere System wollen wir die zu einer G_{168} gehörigen G_7 aufschreiben:

Digitized by Google

$$(a_2\,a_3\,a_5\,a_4\,a_7\,a_8\,a_6),\quad (a_1\,a_6\,a_4\,a_5\,a_8\,a_7\,a_2),$$
$$(a_1\,a_2\,a_7\,a_4\,a_6\,a_8\,a_5),\quad (a_1\,a_2\,a_8\,a_7\,a_2\,a_6\,a_4),$$
$$(a_1\,a_5\,a_6\,a_8\,a_3\,a_2\,a_7),\quad (a_1\,a_4\,a_2\,a_6\,a_5\,a_3\,a_8),$$
$$(a_1\,a_7\,a_3\,a_2\,a_4\,a_5\,a_6),\quad (a_1\,a_8\,a_5\,a_3\,a_7\,a_4\,a_2).$$

Diese Gruppe wird dann durch die G_8 in die anderen gleichberechtigten G_{168} transformirt. Man erinnere sich hier an die Analogie der G_{1344} mit der symmetrischen oder alternirenden Gruppe von 6 Dingen, welche ja zwei Systeme von je 6 gleichberechtigten G_{120} bez. Ikosaedergruppen enthalten [1]).

In der alternirenden Gruppe von 8 Dingen giebt es, außer Permutationsgruppen von bloß 7 Dingen, 120 gleichberechtigte einfache G_{168}. Jede dieser G_{168} tritt als Untergruppe in je einer G_{1344} der beiden erwähnten Systeme auf. Je zwei G_{168}, welche derselben G_{1344} angehören, haben eine Oktaedergruppe gemein, so daß die beiden G_{1344}, welche dieselbe G_{168} enthalten, auch den beiden Systemen von je 7 gleichberechtigten Oktaedergruppen der G_{168} zugeordnet sind.

3. Es ist jetzt ein Leichtes zu zeigen, daß in einem Raume von weniger als 6 Dimensionen keine mit der G_{1344} oder gar G_{56} holoedrisch isomorphe Collineationsgruppe construirt werden kann. Durch die fraglichen Gruppen erleiden ja die A_i, welche den in der ausgezeichneten G_8 enthaltenen $7\,G_2$ zugeordnet sind, Vertauschungsgruppen G_{168} bez. G_7, welche zweifach bez. einfach transitiv sind. Wir brauchen also nur zu erweisen, daß in dieser Transitivität Bedingungen für die G_8 enthalten sind, welche bei den niedrigeren Dimensionenzahlen nicht erfüllt werden können. Jede der 7 involutorischen Transformationen muß nämlich auf dieselbe kanonische Form gebracht werden können:

$$x_1' = x_1,\ \cdots\ x_i' = x_i,\ x_{i+1}' = -x_{i+1},\ \cdots\ x_n' = -x_n,$$

wobei die festen Punkte einen linearen Raum R_{i-1}, $x_{i+1} = \cdots = x_n = 0$, und einen R_{n-i-1}, $x_1 = \cdots = x_i = 0$, erfüllen. Aus der zweifachen Transitivität folgert man nun, daß die gegenseitige

---

1) Die G_{56} wurde bei den Untersuchungen von Hrn. Askwith („*On groups of substitutions that can be formed with eight letters*", Quarterly Journal XXIV) und Cayley (*On the substitution groups for two, three, four, five, six, seven and eight letters*", Quarterly Journal XXV) nicht beachtet. Dieselbe wurde erst von Hrn. Cole (Quarterly Journal XXVI) aufgestellt. Dagegen scheint die G_{1344} bisher nicht bemerkt zu sein, und doch ist diese Gruppe als dreifach transitiv der größten Aufmerksamkeit werth.

Digitized by Google

Lage der zu jedem G_2-Paare gehörigen festen Gebilde eine bestimmte sein muß; aus der einfachen Transitivität folgt selbstverständlich nur, daß die bei einer beliebigen G_2 festen Gebilde zur Gesammtheit der übrigen eine bestimmte Lage einnehmen müssen. Bei der G_8 muß jedes der 7 Paare R_{i-1} und R_{n-i-1} invariant bleiben, da ja in derselben jede G_2 ausgezeichnet auftritt.

Wir betrachten zuerst die Fälle, wo $i = n-i$. Hier liegt die Möglichkeit vor, daß die zu einer G_2 gehörigen R_{i-1} und R_{n-i-1} bei der G_8 vertauscht werden; doch müssen dieselben jeder in sich durch eine Untergruppe G_4 transformirt werden. Drei Fälle sollen hier behandelt werden:

1) Wenn $i = 1$, also auch die Dimensionenzahl $n-1 = 1$, würde die ungereimte Forderung entstehen, daß dieselben zwei Punkte bei den drei G_2 einer Vierergruppe invariant bleiben. Es ist ja auch bekannt, daß auf der geraden Linie keine andere G_8 als diejenige vom Diedertypus existirt.

2) $i = 2$. Eine Collineation können wir hier durch die Gleichungen:

$$(A_1) \qquad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = -x_3, \quad x_4' = -x_4,$$

definiren. Von den 6 übrigen, welche in der G_8 enthalten sein sollen, müssen wenigstens zwei, etwa A_2 und A_3, jede der Axen $x_1 = x_2 = 0$ und $x_3 = x_4 = 0$ in sich überführen. Bei A_2 müssen ersichtlich auf jeder der erwähnten Axen zwei Punkte unverändert bleiben, und diese Punkte können wir als Coordinatenecken wählen. Durch dieselben Punkte müssen aber auch die zu A_3 gehörigen Axen gehen, so daß wir für letztere Collineation die Gleichungen:

$$(A_2) \qquad x_1' = x_1, \quad x_3' = x_3, \quad x_2' = -x_2, \quad x_4' = -x_4,$$

schreiben können. Hieraus ergiebt sich aber die dritte Collineation:

$$(A_1 A_2 = A_3) \qquad x_1' = x_1, \quad x_4' = x_4, \quad x_2' = -x_2, \quad x_3' = -x_3.$$

Sollten nun bei der Hälfte der Operationen der G_8 die zu einer G_2 gehörigen Axen vertauscht werden, so wäre es erforderlich, daß bei den übrigen 4 Collineationen der G_8 jede Axe des Coordinatentetraeders in die gegenüberliegende überginge; dann würden aber drei Axen, welche in eine Ecke zusammenstoßen, in diejenigen drei Axen, welche die gegenüberliegende Coordinatenebene enthält, übergehen, was natürlich unmöglich ist. Sollten anderseits auch bei den übrigen 4 G_2 jede Coordinatenaxe in sich übergeführt

Digitized by Google

werden, so würde man daraus die unmögliche Folgerung ziehen können, daß die zu denselben gehörigen Axen mit jeder der 6 Coordinatenaxen zusammentreffen müßten.

3) $i = 3$. Eine erste Collineation sei durch die Gleichungen:

$$(A_1) \quad x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = -x_4,\ x_5' = -x_5,\ x_6' = -x_6,$$

gegeben. Von den übrigen müssen wenigstens zwei, etwa A_2 und A_3, jede der Ebenen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und $x_4 = x_5 = x_6$ in sich überführen. Durch A_2 mögen diese Ebenen Collineationen:

$$x_4' = -x_4,\ x_5' = -x_5,\ x_6' = x_6;$$

bez.
$$x_1' = -x_1,\ x_2' = -x_2,\ x_3' = x_3$$

erleiden. Da auch bei A_2 die festen Punkte zwei Ebenen erfüllen sollen, und diese Ebenen die festen Pole und Axen in den erwähnten Ebenen enthalten müssen, so kann man für A_2 die definirenden Gleichungen in der folgenden Form schreiben:

$$(A_2) \quad x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_6' = x_6,\ x_3' = -x_3,\ x_4' = -x_4,\ x_5' = -x_5.$$

Bei der durch die Combination von A_1 und A_2 bewirkten Collineation:

$$(A_3) \quad x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_4' = x_4,\ x_5' = x_5,\ x_3' = -x_3,\ x_6' = -x_6,$$

würde der Ort der festen Punkte eine Gerade und einen dreidimensionalen Raum bilden, wodurch schon die Gleichberechtigung von A_1 und A_2 mit A_3 in einer höheren Gruppe sich als unmöglich erweist.

Nächstens wollen wir zeigen, daß die G_3 nicht aus Perspectivitäten bestehen kann. Wäre nämlich das der Fall, so würden wir ersichtlich irgend zwei Perspectivitäten durch die Gleichungen:

$$(A_1) \quad x_1' = -x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3,\ \cdots\cdots\ x_n' = x_n;$$
$$(A_2) \quad x_1' = x_1,\ x_2' = -x_2,\ x_3' = x_3,\ \cdots\cdots\ x_n' = x_n,$$

darstellen können. Die durch Combination entstandene Collineation:

$$(A_3) \quad x_1' = -x_1,\ x_2' = -x_2,\ x_3' = x_3,\ \cdots\cdots\ x_n' = x_n,$$

ist aber keine Perspectivität, es sei denn, daß $n = 3$. Doch gelangt man auch in letzterem Falle zu keiner G_3, da ja die Bedingung, daß die folgenden Perspectivitätsaxen durch die zu A_1, A_2 und A_3 gehörigen Centren (welche nicht in gerader Linie liegen) gehen sollen, nicht erfüllt werden kann.

4. Es bleiben nur noch zwei Fälle zu berücksichtigen, nämlich je einen im vierdimensionalen und fünfdimensionalen Raume, bei denen die gegenüber einer einzelnen G_3 festen Punkte eine

Digitized by Google

Gerade und eine Ebene bez. einen dreidimensionalen Raum erfüllen.

1) Im ersten Falle sei eine Collineation:

(A_1) $x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = -x_4,\ x_5' = -x_5.$

Die Gerade $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und die Ebene $x_4 = x_5 = 0$, welche den Ort der festen Punkte bilden, bezeichnen wir bez. mit L_1 und E_1. In gleicher Weise nennen wir die zu einer anderen Collineation A_i gehörigen festen Gebilde L_i und E_i. Jede Gerade L_i soll bei der G_8 invariant bleiben, also auch, falls deren zwei zusammentreffen, der bezügliche Schnittpunkt. Wir können zuerst annehmen, daß bei keiner anderen Collineation alle Punkte von L_1 fest bleiben; dann muß die G_8 auf derselben eine Vierergruppe bewirken, so daß keiner Punkt von L_1 bei der ganzen G_8 invariant bleiben kann. L_1 würde also eine Gerade L_i nicht schneiden dürfen, und doch müßten ersichtlich von den zwei auf L_1 bei A_i fest bleibenden Punkten einer auf L_i, der andere auf E_i liegen.

Die andere Möglichkeit wäre, daß etwa bei A_2 alle Punkte von L_1 eine feste Lage beibehalten. Die Gerade L_1 muß dann in der Ebene E_2 enthalten sein, und wir können die Gleichungen für A_2 in der folgenden Gestalt schreiben:

(A_2) $x_1' = -x_1,\ x_2' = -x_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = x_4,\ x_5' = x_5.$

Die durch Combination von A_1 und A_2 erzeugte Collineation A_3 erweist sich aber als eine Perspectivität und kann also in keiner Gruppe mit A_1 und A_i gleichberechtigt sein.

2) In dem noch übrigen Falle können wir mit der Collineation:

(A_1) $x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = x_4,\ x_5' = -x_5,\ x_6' = -x_6,$

anfangen. Die Gerade $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ und den Raum $x_5 = x_6 = 0$ bezeichnen wir mit L_1 bez. F_1 und in ähnlicher Weise mit L_i und F_i die entsprechenden Gebilde bei einer anderen Collineation A_i der G_8.

Hier nehmen wir zuerst an, daß bei keiner anderen Collineation der G_8 alle Punkte von L_1 fest bleiben. Dann erschließt man wie im vorigen Falle, daß die G_8 auf derselben eine Vierergruppe erzeugen und jede Gerade L_i dieselbe schneiden muß, wobei der Schnittpunkt einerseits bei der obigen Vierergruppe nicht fest bleiben kann, anderseits doch auf Grund der Beschaffenheit der G_8 invariant sein soll. Dadurch ist aber der Widerspruch der obigen Annahme dargethan.

Es sollen also alle Punkte von L_1 bei A_2 fest bleiben. Wir können dann letztere Collineation in der folgenden Weise definiren:

Digitized by Google

(A_2) $x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = -x_3,\ x_4' = -x_4,\ x_5' = x_5,\ x_6' = x_6.$

Durch Combination von A_1 und A_2 erhält man:

(A_3) $x_1' = -x_1,\ x_2' = -x_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = x_4,\ x_5' = x_5,\ x_6' = x_6.$

Wir sehen, daß das Verhältniß der drei Collineationen A_1, A_2, A_3 zu einander ein gegenseitiges ist, so daß die zu zweien gehörigen Räume F_i, F_k die zur dritten gehörige Gerade L_i enthält. Soll nun bei den weiteren 4 Collineationen eine Vertauschung der Punkte von L_1 bewirkt werden, so muß das auch, auf Grund der vorausgesetzten Transitivität der A_i, auf L_2 und L_3 der Fall sein. Dann müssen aber die 4 übrigen Geraden L_i jede der Geraden L_1, L_2 und L_3 schneiden. Letzteres erweist sich aber als unmöglich, da der durch L_1 und L_2 gelegte dreidimensionale Raum $x_1 = x_2 = 0$ keinen Punkt von L_3 ($x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$) enthält. Die noch übrige Annahme wäre, daß bei der vollständigen G_8 jeder Punkt von L_1, und somit auch von L_2 und L_3, fest bliebe. Dann würde aber die schon als unmöglich nachgewiesene Bedingung hinzutreten, daß die zu den weiteren 4 Collineationen gehörigen dreidimensionalen Räume F_i die drei Geraden L_1, L_2 und L_3 enthalten sollten.

5. Wir haben also das Resultat gefunden, daß man in einem Raume von weniger als 6 Dimensionen keine G_8 construiren kann, deren 7 Elemente von der Periode 2 in einer umfassenderen Gruppe unter sich und mit keinen anderen gleichberechtigt sind. In einem solchen Raume giebt es also keine mit der G_{56} oder G_{1344}, geschweige denn mit der symmetrischen oder alternirenden Gruppe von 8 Dingen, holoedrisch isomorphe Collineationsgruppe. — Die nämliche Behauptung gilt auch für eine einfache Gruppe vom Grade 504, welche Hr. Cole sowohl durch Behandlung der Gruppen von 9 Dingen [1]) als auch durch directe Aufsuchung von einfachen Gruppen [2]) gefunden hat. Die gedachte G_{504} enthält nämlich als gleichberechtigte Untergruppen 9 G_{56} der oben beschriebenen Art. Betrachtet man die in der 2. Nummer besonders aufgestellte G_{56} als Untergruppe, so gelangt man nach Hrn. Cole zur G_{504} durch die Permutation $(a_1 a_2 a_3 a_6 a_7 a_2 a_4 a_5 a_6)$. Ob nun die G_{504} wirklich in einem sexdimensionalen Raume als Collineationsgruppe dargestellt werden kann, oder man dazu 7 Dimensionen braucht, lassen wir einstweilen unentschieden.

1) Quarterly Journal XXVI.

2) „*Simple groups as far as order 660*", American Journal for Mathematics XV.

Lund, Februari 1897.

Digitized by Google

Ueber die Entwickelung einer beliebigen analytischen Function einer Variabeln in eine unendliche nach ganzen rationalen Functionen fortschreitende Reihe.

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 6. März 1897.

In der vorliegenden Note soll der folgende Satz bewiesen werden:

Es sei in der Ebene der complexen Variabeln z irgend ein endliches, einfach zusammenhängendes und die Ebene nirgends mehrfach überdeckendes Gebiet J und ferner eine im Inneren dieses Gebietes J überall reguläre analytische Function $f(z)$ der complexen Variabeln z vorgelegt: dann läßt sich diese Function $f(z)$ stets in eine unendliche Reihe

$$f(z) = G_1(z) + G_2(z) + G_3(z) + \cdots$$

entwickeln, welche in der Umgebung jedes Punktes im Inneren von J gleichmäßig convergirt und deren Glieder $G_1(z)$, $G_2(z)$, $G_3(z)$, ... sämmtlich ganze rationale Functionen von z sind.

Wir denken uns das Gebiet J durch eine Curve begrenzt, die aus endlich vielen Stücken mit stetig sich ändernden Tangenten und Krümmungen besteht, wenngleich diese beschränkende Annahme für das Folgende keine wesentliche ist. Unter dem Inneren des Gebietes J verstehen wir die innerhalb J und nicht auf der Grenzcurve von J gelegenen Punkte. Auch sei bemerkt, daß der Satz noch gültig bleibt, wenn das Gebiet J sich ins Unendliche hin erstreckt; nur muß dann der unendlichferne Punkt selbst zur Begrenzung des Gebietes J gehören. Die analytische Function

Digitized by Google

$f(z)$ darf auf der Grenzcurve und außerhalb des Gebietes J beliebige Singularitäten besitzen. So gestattet beispielsweise nach der eben erwähnten Erweiterung des aufgestellten Satzes jede der Functionen $\frac{1}{z}$, $\sqrt{z}$, $l(z)$ eine Entwickelung in eine unendliche Reihe, die nach ganzen rationalen Functionen fortschreitet und in der ganzen Ebene gleichmäßig convergirt, wenn man allein die Punkte der positiven Axe der reellen Zahlen ausnimmt.

Die Forderungen des einfachen Zusammenhanges von J und der einfachen Ueberdeckung der Ebene durch J sind offenbar notwendig, wenn jede in J reguläre Function die verlangte Entwickelung gestatten soll.

Es ist nicht schwer, die Function $f(z)$ in eine unendliche, innerhalb J gleichmäßig convergente Reihe von der Form

$$f(z) = R_1(z) + R_2(z) + R_3(z) + \cdots$$

zu entwickeln, wo R_1, R_2, R_3, ... rationale, innerhalb J reguläre Functionen sind. Um dies zu erkennen, bezeichnen wir mit $\zeta_1^{(1)}$ einen beliebigen Punkt auf der Grenze von J, mit $\zeta_1^{(2)}$, $\zeta_2^{(2)}$ ein System von zwei Punkten auf der Grenze von J, mit $\zeta_1^{(3)}$, $\zeta_2^{(3)}$, $\zeta_3^{(3)}$ ein System von drei Punkten auf der Grenze von J u. s. f., derart, daß die Punkte eines jeden Systems in der Weise geordnet sind, wie sie beim Durchlaufen der Grenzcurve aufeinander folgen und daß schließlich die Punkte der Systeme an jeder Stelle der Grenzcurve von J sich verdichten; es ist dann, vorausgesetzt, daß $f(z)$ in jedem Punkte der Grenzcurve von J sich regulär verhält

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(J)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\operatorname*{L}_{h=\infty}\left\{\sum_{(k=1,2,\ldots,h-1)}\frac{f(\zeta_k^{(h)})(\zeta_{k+1}^{(h)} - \zeta_k^{(h)})}{\zeta_k^{(h)} - z}\right\},$$

wo das Integral in positiver Richtung längs der Begrenzung von J zu erstrecken ist. Setzen wir daher

$$S_h(z) = \sum_{(k=1,2,\ldots,h-1)}\frac{f(\zeta_k^{(h)})(\zeta_{k+1}^{(h)} - \zeta_k^{(h)})}{\zeta_k^{(h)} - z}$$

so folgt die unendliche Reihenentwickelung

$$f(z) = S_1(z) + [S_2(z) - S_1(z)] + [S_3(z) - S_2(z)] + \cdots,$$

deren Glieder rationale Funktionen von z sind. Besitzt $f(z)$ auf

Digitized by Google

der Grenzcurve des Gebietes J Singularitäten, so ist noch eine Hülfsbetrachtung erforderlich, wie sie dem bei III am Schluß dieser Note dargelegten Verfahren entspricht.

Aus der eben bewiesenen Thatsache kann der zu Anfang aufgestellte Satz für den Fall geschlossen werden, daß das Gebiet J überall convex nach außen gekrümmt ist. In der That unter dieser Voraussetzung läßt sich durch jeden Punkt $\zeta_h^{(h)}$ ein Kreis legen, welcher das Gebiet J umschließt. Ist $z = c_h^{(h)}$ der Mittelpunkt eines solchen Kreises, so möge die Function $\frac{1}{\zeta_h^{(h)} - z}$ in eine unendliche nach steigenden Potenzen von $z - c_h^{(h)}$ fortschreitende Reihe entwickelt werden. Indem wir dann genügend viele Glieder dieser Potenzreihe in Anspruch nehmen, erkennen wir, daß die Funktion $\frac{1}{\zeta_h^{(h)} - z}$ und folglich auch die Funktionen $S_1(z)$, $S_2(z)$, $S_3(z)$, ... sämmtlich für jeden Punkt innerhalb J mit beliebiger Genauigkeit durch ganze rationale Funktionen angenähert werden können.

Weit schwieriger ist der Nachweis unseres Satzes für ein beliebiges Gebiet J.

Wir verstehen im Folgenden unter einer Lemniscate L eine jede solche geschlossene Curve in der Ebene der complexen Variabeln z, in deren Innerem sich eine gewisse Anzahl n von einander verschiedener Punkte $z = c$, $z = c_1$, ..., $z = c_{n-1}$ derart bestimmen lassen, daß die n Abstände eines beliebigen Punktes der Curve von $z = c$, $z = c_1$, ..., $z = c_{n-1}$ ein constantes Product R besitzen. Die Gleichung der Lemniscate L ist demnach

$$(1) \qquad |z-c|\,|z-c_1|\,\ldots\,|z-c_{n-1}| = R.$$

Wir führen nun den Nachweis des aufgestellten Satzes in drei Schritten:

I. Der zu Anfang dieser Note aufgestellte Satz gilt, falls die Grenzcurve des Gebietes J eine Lemniscate L ist.

Um dies einzusehen, nehmen wir an, es seien $z = c$, $z = c_1$, ..., $z = c_{n-1}$ die n von einander verschiedenen Punkte innerhalb der Lemniscate L, derart daß (1) die Gleichung der Lemniscate L vorstellt. Setzen wir

$$(2) \qquad \zeta = (z-c)(z-c_1)\ldots(z-c_{n-1}),$$

so ergiebt sich hieraus durch Umkehrung z als algebraische Func-

Digitized by Google

tion von ζ und die n Zweige $z, z_1, \ldots, z_{n-1}$ dieser Function gestatten in der Umgebung der Stelle $\zeta = 0$ Entwickelungen von der Form

$$(3)\qquad \begin{aligned} z &= c + c'\zeta + c''\zeta^2 + \cdots \\ z_1 &= c_1 + c_1'\zeta + c_1''\zeta^2 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n-1} &= c_{n-1} + c_{n-1}'\zeta + c_{n-1}''\zeta^2 + \cdots \end{aligned}$$

Diese n Potenzreihen mögen sämmtlich in einem Kreise mit dem Radius r $(< R)$ um den Anfangspunkt der ζ-Ebene convergiren.

Die Diskriminante der Gleichung $n$ten Grades in z

$$(4)\qquad (z-c)(z-c_1)\ldots(z-c_{n-1}) - \zeta = 0$$

ist eine ganze rationale Function von ζ und wird, wenn wir in ihr für ζ den Werth aus (2) eintragen eine ganze rationale Function der Veränderlichen z; es besteht also, wenn wir diese ganze rationale Function von z mit $D(z)$ bezeichnen für jene n Zweige die vermöge (3) in ζ identische Relation

$$(5)\qquad (z-z_1)^2(z-z_2)^2\ldots(z-z_{n-1})^2(z_1-z_2)^2\ldots(z_{n-2}-z_{n-1})^2 = D(z).$$

Nunmehr sei $f(z)$ die gegebene innerhalb J reguläre analytische Function von z: dann läßt sich stets eine ganze rationale Function $G(z)$ bestimmen, so daß innerhalb J der Quotient

$$(6)\qquad \varphi(z) = \frac{f(z)-G(z)}{D(z)}$$

eine reguläre analytische Function von z wird; man hat, um dies zu erreichen, nur nötig, $G(z)$ so zu wählen, daß $f(z)-G(z)$ alle innerhalb J gelegenen Punkte, in denen $D(z)$ von der $m$ten Ordnung verschwindet, als Nullstellen $m$ter oder höherer Ordnung aufweist.

Wir betrachten nun, indem wir für $z, z_1, \ldots, z_{n-1}$ die Entwickelungen (3) benutzen, die n Ausdrücke

$$(7)\qquad \begin{aligned} \varphi(z) + \varphi(z_1) + \cdots + \varphi(z_{n-1}) &= \Phi(\zeta), \\ z\varphi(z) + z_1\varphi(z_1) + \cdots + z_{n-1}\varphi(z_{n-1}) &= \Phi'(\zeta), \\ z^2\varphi(z) + z_1^2\varphi(z_1) + \cdots + z_{n-1}^2\varphi(z_{n-1}) &= \Phi''(\zeta), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z^{n-1}\varphi(z) + z_1^{n-1}\varphi(z_1) + \cdots + z_{n-1}^{n-1}\varphi(z_{n-1}) &= \Phi^{(n-1)}(\zeta) \end{aligned}$$

als Funktionen von ζ. Da die Potenzreihen (3) für $|\zeta| < r$ con-

Digitized by Google

vergiren, so sind diese Functionen sicherlich regulär im Inneren des Kreises mit dem Radius r um den Nullpunkt der ζ-Ebene. Lassen wir nun die Variabele ζ sich beliebig innerhalb des concentrischen Kreises mit dem Radius $R(>r)$ bewegen, so werden die vermöge (2) entsprechenden Werte der n Zweige $z, z_1, \ldots, z_{n-1}$ in der z-Ebene sämmtlich durch Punkte innerhalb der Lemniscate (1) dargestellt, und hieraus folgt, daß die Functionen $\Phi(\zeta)$ $\Phi'(\zeta)$, $\ldots$, $\Phi^{n-1}(\zeta)$ gewiß in das Innere des Kreises mit dem Radius R fortsetzbar sind. Da sich ferner die n Zweige (3) bei der Umkreisung der Verzweigungspunkte in der ζ Ebene nur unter einander vertauschen, so sind die Functionen $\Phi(\zeta)$, $\Phi'(\zeta)$, $\ldots$ $\Phi^{(n-1)}(\zeta)$ innerhalb des Kreises mit dem Radius R eindeutige Functionen von ζ. Endlich sind wegen (4) $z, z_1, \ldots, z_{n-1}$ die Zweige einer ganzen algebraischen Function von ζ und mithin sind $\Phi(\zeta)$, $\Phi'(\zeta)$, $\Phi^{(n-1)}(\zeta)$ im Inneren des Kreises mit dem Radius R überall endlich und stetig. Hieraus folgt, daß diese Functionen innerhalb des Kreises mit dem Radius R sich regulär verhalten; entwickeln wir sie also in unendliche Reihen nach aufsteigenden Potenzen von ζ, so convergiren diese Reihen für $|\zeta| < R$.

Die Gleichungen (7) liefern, wie man leicht durch Elimination von $\varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_{n-1})$ und mit Rücksicht auf (5) erkennt, eine Relation von der Gestalt

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} D(z)\varphi(z) = {} & H(z; z_1, \ldots, z_{n-1})\Phi(\zeta) + H'(z; z_1, \ldots, z_{n-1})\Phi'(\zeta) + \ldots \\ & \ldots + H^{(n-1)}(z; z_1, \ldots, z_{n-1})\Phi^{(n-1)}(\zeta), \end{aligned}\right.$$

worin $H, H', \ldots, H^{(n-1)}$ ganze rationale Functionen von $z, z_1, \ldots, z_{n-1}$ bedeuten, die in $z_1, \ldots, z_{n-1}$ symmetrisch ausfallen. Berücksichtigen wir, daß vermöge (4) jede ganze rationale symmetrische Function von $z_1, \ldots, z_{n-1}$ als ganze rationale Function von z dargestellt werden kann, so ergiebt sich wegen (6) aus der Gleichung (8) eine Relation von der Gestalt

$$(9)\quad f(z) = G(z) + K(z)\Phi(\zeta) + K'(z)\Phi'(\zeta) + \cdots + K^{(n-1)}(z)\Phi^{(n-1)}(\zeta),$$

wo $K, K', \ldots, K^{(n-1)}$ ganze rationale Functionen von z sind. Hierin denken wir uns rechter Hand für ζ den Ausdruck (2) in z eingesetzt; dann haben wir in (9) eine Reihenentwickelung von der verlangten Art und der Beweis für die Behauptung I ist damit erbracht.

II. Wenn J ein durch eine geschlossene doppelpunktslose Curve begrenztes Gebiet der z-Ebene und J_1 ein im Innern von J gelegenes Gebiet von der

Digitized by Google

nämlichen Beschaffenheit ist, so daß die Grenzcurven von J und J_1 keinen Punkt mit einander gemein haben, so giebt es stets innerhalb J eine Lemniskate L, die das Gebiet J_1 umschließt und die weder mit der Grenzkurve von J noch mit derjenigen von J_1 einen Punkt gemein hat.

Um diese Behauptung zu beweisen, nehmen wir wiederum an, daß die Grenzkurven von J und J_1 aus endlich vielen aneinander gereihten Curvenstücken zusammengesetzt sind, deren jedes eine stetig sich ändernde Tangente und Krümmung besitzt. Die Gesammtlänge der Grenzcurve von J_1 sei l. Wir wählen auf J_1 einen beliebigen Punkt $s = c$ als Anfangspunkt und bezeichnen die Bogenlänge der Grenzcurve des Gebietes J_1 vom Puncte c bis zu einem beliebigen Punkte dieser Grenzkurve mit s, so daß durch die Werte des zwischen 0 und l variirenden Parameters s die Punkte der Grenzkurve von J_1 eindeutig bestimmt sind. Auf Grund des Schwarz-Neumann'schen alternirenden Verfahrens und mit Hinzuziehung bekannter Sätze der Potentialtheorie [1]) folgt, daß es eine stetige Function $\delta(s)$ der reellen Veränderlichen s giebt, die keine negativen Werte annimmt und überdies folgende Eigenschaften aufweist: wenn wir mit p einen beliebigen Punkt außerhalb J_1, ferner mit $E(p, s)$ die geradlinige Entfernung des Punktes p bis zum Punkte s auf der Grenzcurve von J_1 bezeichnen und dann das Integral

$$V(p) = \int_0^l lE(p, s)\delta(s)ds$$

bilden, so stellt dasselbe ein logarithmisches Potential dar, welches sich einem gewissen constanten Werte γ unbegrenzt nähert, wenn der Punkt p nach irgend einem Punkte s der Grenzcurve von J_1 rückt; es ist endlich

$$\int_0^l \delta(s)ds = 1.$$

Die so beschaffene Function $\delta(s)$ stellt die Dichtigkeit der Massenverteilung auf der Grenzcurve von J_1 dar, welche C. Neumann [2]) die Minimalverteilung oder die natürliche Belegung nennt.

Es sei $\varkappa$ der kleinste Wert, den $V(p)$ annimmt, wenn p auf

1) Vgl. A. Harnack, Theorie des logarithmischen Potentials. Leipzig 1887, § 27.

2) Vgl. Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. Leipzig 1877, Kap. III § 9.

Digitized by Google

der Grenzcurve des Gebietes J wandert; dann ist nothwendig $\varkappa > \gamma$. Wir setzen $\mu = \frac{\varkappa+\gamma}{2}$ und bestimmen eine positive Zahl ε, so daß $\mu+\varepsilon < \varkappa$ und $\mu-\varepsilon > \gamma$ wird. Bezeichnen wir den Ort aller Punkte p, für welche $V(p) = \mu+\varepsilon$ ist, mit $O^{(+)}$ und den Ort aller Punkte p, für welche $V(p) = \mu-\varepsilon$ ist, mit $O^{(-)}$, so ist $O^{(+)}$ eine geschlossene im Innern von J gelegene Curve, und $O^{(-)}$ eine geschlossene im Innern von $O^{(+)}$ gelegene Curve, welche J_1 umschließt.

Nunmehr bezeichnen wir mit n eine beliebige ganze rationale Zahl (>1) und bestimmen auf der Grenzcurve von J_1 die $n-1$ aufeinander folgenden Punkte $s = s_1, \ldots, s = s_{n-1}$ derart, daß

$$\int_0^{s_1} \delta(s)ds = \frac{1}{n}, \int_{s_1}^{s_2} \delta(s)ds = \frac{1}{n}, \ldots, \int_{s_{n-2}}^{s_{n-1}} \delta(s)ds = \frac{1}{n}$$

wird. Auf Grund der Definition des bestimmten Integrals ist, da sich jene Punkte für unendlich wachsendes n überall auf der Curve verdichten,

$$V(p) = \mathrm{L}_{n=\infty} \frac{1}{n}\Big\{lE(p,0)+lE(p,s_1)+\cdots+lE(p,s_{n-1})\Big\}.$$

Wegen dieses Umstandes läßt sich die ganze rationale Zahl n so groß wählen, daß für jeden Punkt p des durch $O^{(+)}$ und $O^{(-)}$ begrenzten ringförmigen Gebietes die Ungleichungen

$$\varepsilon > V(p) - \frac{1}{n}\Big\{lE(p,0)+lE(p,s_1)+\cdots+lE(p,s_{n-1})\Big\} > -\varepsilon$$

erfüllt sind. Ist diese Wahl getroffen, so folgt leicht, daß der Ort der Punkte p, für welche

$$\frac{1}{n}\Big\{lE(p,0)+lE(p,s_1)+\cdots+lE(p,s_{n-1})\Big\} = \mu \tag{10}$$

ist, eine geschlossene Curve darstellt, die in dem durch $O^{(+)}$ begrenzten Gebiete verläuft und das durch $O^{(-)}$ begrenzte Gebiet umschließt. Bezeichnen wir die den Punkten p, $s = 0$, $s = s_1$, $\ldots$, $s = s_{n-1}$ entsprechenden complexen Zahlen bez. mit z, c, c_1, $\ldots$, c_{n-1}, so können wir die Gleichung (10) in die Form

$$|z-c|\,|z-c_1|\ldots|z-c_{n-1}| = e^{n\mu}$$

bringen und hieraus erkennen wir, daß jene Curve eine Lemniskate ist. Diese Lemniskate hat die Beschaffenheit, welche in II verlangt wurde.

Digitized by Google

III. Um nun den zu Anfang dieser Note aufgestellten Satz für jedes beliebige einfach zusammenhängende und die Ebene nirgends mehrfach bedeckende Gebiet J zu beweisen, bestimmen wir irgend ein unendliches System von Gebieten $J_1, J_2, J_3, \ldots$, welche sämmtlich im Inneren des Gebietes J liegen und die so in einander geschachtelt sind, daß J_1 im Inneren von J_2, J_2 im Inneren von J_3, J_3 im Inneren von J_4 liegt, u. s. f.; dabei sollen die Grenzcurven der Gebiete $J, J_1, J_2, \ldots$ keinen Punkt miteinander gemein haben, und endlich soll jeder Punkt, welcher im Innern von J liegt, von einem genügend großen h ab, in jedem Gebiete J_h jenes Systems gelegen sein, so daß der Gebietstheil der z-Ebene, welche von den Gebieten $J_1, J_2, J_3, \ldots$ insgesammt bedeckt wird, mit dem Innern des Gebietes J genau übereinstimmt.

Nach II ist es möglich, eine Lemniscate zu construiren, welche im Innern von J verläuft und J_1 umschließt; wir bezeichnen eine solche Lemniscate mit L_1. Ferner sei L_2 eine Lemniscate, welche im Inneren von J verläuft und J_2 umschließt; L_3 sei eine solche, die innerhalb J verläuft und J_3 umschließt, u. s. f. Es sei $f(z)$ die in J zu entwickelnde Function. Da nach I unser Satz für die durch $L_1, L_2, L_3, \ldots$ begrenzten Gebiete gilt, so läßt sich die Function $f(z)$ bez. in $J_1, J_2, J_3, \ldots$ mittelst ganzer rationaler Functionen beliebig genau annähern; es giebt also insbesondere gewiß eine ganze rationale Function $G_1(z)$, so daß für sämmtliche in J_1 gelegenen Punkte z die Gleichung

$$|f(z) - G_1(z)| < 1$$

erfüllt ist; desgleichen giebt es eine ganze rationale Function $G_2(z)$, so daß für sämmtliche in J_2 gelegenen Punkte z die Ungleichung

$$|f(z) - G_2(z)| < \tfrac{1}{2}$$

gilt; allgemein sei $G_h(z)$ eine ganze rationale Funktion von z, so daß für sämmtliche in J_h gelegenen Punkte

$$|f(z) - G_h(z)| < \frac{1}{h}$$

ausfällt. Dann haben wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \underset{h=\infty}{L} G_h(z) \\ &= G_1(z) + [G_2(z) - G_1(z)] + [G_3(z) - G_2(z)] + \cdots \end{aligned}$$

und hiermit ist der zu Anfang aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

Göttingen den 6. März 1897.

Digitized by Google

Ueber die Erzeugung der Invarianten durch Integration.

Von

A. Hurwitz in Zürich,
correspondirendem Mitgliede der Gesellschaft.

Vorgelegt von dem vorsitzenden Secretär in der Sitzung am 6. März 1897.

Es liege eine endliche Gruppe von discreten Substitutionen vor, die sich auf die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ beziehen. Dann giebt es ein einfaches Verfahren, um alle Invarianten dieser Gruppe herzustellen. Man wende nämlich auf eine beliebige Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ die sämmtlichen Substitutionen der Gruppe an und bilde sodann die Summe aus allen so entstehenden Functionen. Diese Summe stellt offenbar eine Invariante der Gruppe vor, und zwar die allgemeinste, da eine beliebige Invariante $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ jedenfalls durch die Annahme $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{1}{r}\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ erhalten wird, wo r die Anzahl der in der Gruppe enthaltenen Substitutionen bezeichnet. In ähnlicher Weise kann man bekanntlich auch die Invarianten von unendlichen discontinuirlichen Gruppen bilden. Ich habe nun den Gedanken verfolgt, dieses sich so zu sagen von selbst darbietende Verfahren zur Erzeugung der Invarianten auf die continuirlichen Gruppen zu übertragen, wo dann naturgemäß bestimmte Integrale an die Stelle der Summen treten. Dabei richtete ich mein Augenmerk zunächst auf die ganzen rationalen Invarianten der algebraischen Formen, also auf diejenigen ganzen rationalen Functionen der Coefficienten einer Form, die sich nicht ändern, wenn man auf die Variabeln der Form eine beliebige lineare, homogene, unimodulare Substitution ausübt. Die Untersuchung führte mich indessen bald dazu, neben diesen Functionen der Coefficienten einer Form, auch solche zu betrachten,

Digitized by Google

von welchen die Invarianz nur bezüglich einer in der Gruppe aller linearer unimodularer Substitutionen enthaltenen Untergruppe gefordert wird. Insbesondere zeigte es sich, daß der oben erwähnte Gedanke sich in sehr einfacher Weise für die Invarianten verwirklichen läßt, welche zu der von allen orthogonalen Substitutionen gebildeten Untergruppe gehören. Ich betrachte deshalb im Folgenden zuerst diese „orthogonalen" Invarianten der Formen und gehe sodann zu den Invarianten der Gesammtgruppe der linearen unimodularen Substitutionen über, die ich Invarianten schlechthin nennen werde.

Zur Erleichterung der Schreibweise will ich festsetzen, daß die ersten Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des griechischen Alphabets unabhängig von einander die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ durchlaufen sollen. Es sei nun

$$x_\alpha = \sum_\beta r_{\alpha\beta} x'_\beta \tag{1}$$

eine orthogonale Substitution von der Determinante $+1$. Ich fasse die n^2 Coefficienten $r_{\alpha\beta}$ dieser Substitution als rechtwinklige Coordinaten in einem Raume von n^2 Dimensionen auf. Dann wird die Substitution (1) durch einen bestimmten Punkt dieses Raumes repräsentirt. Die Gesammtheit aller Punkte, welche in dieser Weise den sämmtlichen orthogonalen Substitutionen (1) entsprechen, erfüllt ein Gebilde R, welches durch die Gleichungen

$$\sum_\gamma r_{\alpha\gamma} r_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}, \quad |r_{\alpha\beta}| = 1 \tag{2}$$

definirt ist, wobei $r_{11}, r_{12}, \ldots r_{nn}$ als laufende Coordinaten anzusehen sind. In üblicher Weise bedeutet hier das Zeichen $\delta_{\alpha\beta}$ den Wert $+1$ oder 0, je nachdem die Indices α, β einander gleich oder von einander verschieden sind. Infolge der Gleichungen $\sum_\gamma r^2_{\alpha\gamma} = 1$ ist jede der Coordinaten $r_{\alpha\beta}$ auf das Intervall -1 bis $+1$ eingeschränkt. Das Gebilde R liegt also ganz im Endlichen, woraus die Convergenz der weiterhin zu betrachtenden Integrale folgt.

Setzt man die Substitution (1) mit der orthogonalen Substitution

$$x'_\alpha = \sum_\beta s_{\alpha\beta} x''_\beta \tag{3}$$

zusammen, so ergiebt sich eine neue orthogonale Substitution

$$x_\alpha = \sum_\beta r'_{\alpha\beta} x''_\beta, \tag{4}$$

Digitized by Google

wobei

$$r'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} r_{\alpha\gamma} s_{\gamma\beta} \tag{5}$$

gesetzt worden ist. Hier will ich nun für einen Augenblick die $2n^2$ Coefficienten $r_{\alpha\beta}$, $r'_{\alpha\beta}$ als Veränderliche ansehen. Dann stellen die Gleichungen (5) eine lineare Transformation des Raumes von n^2 Dimensionen vor, bei welcher das Gebilde R in sich übergeht. Und zwar ist diese Transformation ihrerseits eine orthogonale, weil die Gleichung

$$\sum_{\alpha,\beta} r'^2_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta} r^2_{\alpha\beta}$$

besteht. Daraus geht hervor, daß das Inhalts-Element dR des Gebildes R bei der Transformation (5) invariant ist.

Es sei nun eine Form der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ vorgelegt [1]). Die Coefficienten dieser Form, welche als unabhängig veränderliche Größen anzusehen sind, bezeichne ich in irgend einer Reihenfolge mit $a_1, a_2, \ldots a_m$ [2]), die Form selbst mit

$$\Phi(a; x), \tag{6}$$

wo die Buchstaben a und x für die Variabelnsysteme $a_1, a_2, \ldots a_m$ und $x_1, x_2, \ldots x_n$ bez. stehen. Diese kurze Bezeichnung eines Variabelnsystems durch einen einzigen Buchstaben werde ich in der Folge stets anwenden, wenn ein Mißverständniß nicht zu befürchten ist.

Vermöge der Substitution (1) werde jetzt

$$\Phi(a; x) = \Phi(a'; x').$$

Die durch den Buchstaben a' vertretenen Coefficienten $a'_1, a'_2, \ldots a'_m$ der transformirten Form sind linear und homogen in den Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_m$ und ganze homogene Functionen der Substitutionscoefficienten $r_{\alpha\beta}$. Ich wähle jetzt eine beliebige homogene ganze rationale Function $F(a)$ der Coefficienten von $\Phi(a; x)$. Dieselbe geht durch die Substitution (1) über in die Function $F(a')$, welche ihrerseits eine homogene ganze rationale Function der Coefficienten a und der Substitutionscoefficienten $r_{\alpha\beta}$ ist. Die letz-

---

1) Der Einfachheit wegen betrachte ich hier und nachher bei der Gruppe aller unimodularen Substitutionen nur die Invarianten einer einzigen Form. Die zu beweisenden Sätze gelten indessen, wie man ohne Weiteres erkennt, in entsprechender Weise auch für die Simultan-Invarianten eines beliebigen Formensystems.

2) Bekanntlich ist $m = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$, wo p den Grad der Form bezeichnet.

Digitized by Google

teren mögen, wie oben, als die Coordinaten eines Punktes des Gebildes R angesehen werden. Beschreibt dieser Punkt das Gebilde R, so stellt $F(a')$ nach und nach alle Functionen dar, in welche $F(a)$ vermöge aller orthogonalen Transformationen übergeht.

Das über das Gebilde R ausgedehnte Integral

$$J(a) = \int F(a')\,dR \tag{7}$$

stellt nun eine orthogonale Invariante der Form $\Phi(a; x)$ dar.

In der That: ersetzt man in diesem Integral $a_1, a_2, \ldots a_m$ durch die Coefficienten $a_1'', a_2'', \ldots a_m''$ einer Form, die aus $\Phi(a, x)$ vermöge irgend einer orthogonalen Substitution hervorgeht, so kommt dieses auf das Gleiche hinaus, als wenn man auf die Integrationsparameter $r_{\alpha\beta}$ eine Transformation der Gestalt (5) anwendet. Bei einer solchen Transformation vertauschen sich aber die Elemente des Integrales nur unter einander und das Integral selbst bleibt also ungeändert.

Daß die Function $F(a)$ so gewählt werden kann, daß das Integral (7) eine beliebig vorgeschriebene orthogonale Invariante liefert, mit anderen Worten, daß das Integral (7) die allgemeinste orthogonale Invariante darstellt, ergiebt sich auf folgende Weise: Es bezeichne

$$M = \int dR \tag{8}$$

das über das Gebilde R ausgedehnte Integral $\int dR$, also den Gesammtinhalt des Gebildes. Ist nun $i(a)$ eine beliebig vorgelegte orthogonale Invariante, so nehme man

$$F(a) = \frac{1}{M} i(a).$$

Das Integral (7) reducirt sich dann auf

$$J(a) = \frac{1}{M}\int i(a')\,dR = \frac{i(a)}{M}\int dR = i(a).$$

Die vorstehenden Betrachtungen gestatten es, den Nachweis der Endlichkeit der orthogonalen Invarianten einer Form $\Phi(a; x)$ allgemein zu führen. Mit den bisherigen Methoden war dies nur in den niedrigsten Fällen, nämlich für binäre und ternäre Formen möglich [1]). Nach dem ersten Fundamentaltheorem von Hil-

1) Vgl. die Ausführungen, die Herr Hilbert auf pag. 531 ff. seiner Abhandlung: „Ueber die Theorie der algebraischen Formen“ (Mathematische Annalen Bd. 36) giebt.

Digitized by Google

bert[1]) giebt es unter den orthogonalen Invarianten der Form $\Phi(a; x)$ eine endliche Anzahl, etwa die Invarianten $i_1, i_2, \ldots i_k$, durch welche sich jede andere orthogonale Invariante i in der Gestalt

$$i = F_1 i_1 + F_2 i_2 + \cdots + F_k i_k \tag{9}$$

darstellen läßt. Hier bedeuten $F_1, F_2, \ldots F_k$ Formen der Coefficienten a, deren Grade kleiner vorausgesetzt werden können, als der Grad von i. Man ersetze jetzt in der Gleichung (9) die Coefficienten a durch die Coefficienten a', multiplicire sodann mit $\frac{1}{M} dR$ und integriere über das Gebilde R. Auf diese Weise ergiebt sich die Gleichung

$$i = J_1 i_1 + J_2 i_2 + \cdots + J_k i_k, \tag{10}$$

wo die Factoren $J_1, J_2, \ldots J_k$, soweit sie nicht constant (das heißt von $a_1, \ldots a_m$ unabhängig) sind, orthogonale Invarianten vorstellen. Es läßt sich also jede orthogonale Invariante linear durch $i_1, i_2, \ldots i_k$ ausdrücken mit Coefficienten, die constant oder orthogonale Invarianten niederen Grades sind. Indem man diese Thatsache wiederholt zur Anwendung bringt, erkennt man, daß sich jede orthogonale Invariante ganz und rational durch $i_1, i_2, \ldots i_k$ darstellen läßt.

Wie man sieht vertritt hier die Integration über das Gebilde R, also so zu sagen die Summation über alle Gleichungen, die aus (9) durch Anwendung aller orthogonalen Substitutionen hervorgehen, die Stelle der Differentiationsprocesse, deren sich Herr Hilbert bei seinen Endlichkeitsbeweisen bedient.

Es leuchtet ein, daß dieses Summationsprincip zum Nachweise der Endlichkeit der Invarianten, die zu irgend einer algebraischen Gruppe gehören, ausreicht, sobald nur die in Betracht kommenden Integrale convergiren und die der Größe M entsprechende Zahl einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Diese Bedingungen sind offenbar für jede in der orthogonalen Gruppe enthaltene Untergruppe erfüllt.

Die Darstellung (7) der orthogonalen Invarianten läßt sich so weit entwickeln, daß sie unmittelbar zur expliciten Herstellung dieser Invarianten brauchbar wird.

Um dieses auszuführen, muß ich folgende allgemeine Bemerkung vorausschicken. Es mögen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ rechtwinklige Coor-

1) l. c. pag. 474.

Digitized by Google

dinaten in einem Raume von τ Dimensionen bezeichnen. In diesem Raume sei durch die Gleichungen

$$(11)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \varphi_1(p_1, p_2, \dots p_\sigma) \\ \xi_2 = \varphi_2(p_1, p_2, \dots p_\sigma) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_\tau = \varphi_\tau(p_1, p_2, \dots p_\sigma) \end{cases}$$

ein Gebilde von σ Dimensionen definirt. Hier bedeuten $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\tau$ reelle Functionen der reellen Parameter $p_1, p_2, \dots p_\sigma$. Wenn nun das Quadrat des Linienelements sich wie folgt darstellt:

$$(12)\qquad ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \dots + d\xi_\tau^2 = \sum_{\lambda,\mu} B_{\lambda,\mu}\, dp_\lambda\, dp_\mu, \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots \sigma),$$

wenn ferner

$$(13)\qquad \Delta = \sqrt{|B_{\lambda\mu}|}$$

die positiv genommene Quadratwurzel aus der Discriminante der quadratischen Form $\sum B_{\lambda\mu} dp_\lambda dp_\mu$ bedeutet, so ist

$$(14)\qquad \Delta dp_1 dp_2 \dots dp_\sigma$$

das Inhalts-Element des betrachteten Gebildes von σ Dimensionen.

Hiernach läßt sich das Element dR im Integral (7) ausdrücken, sobald eine analytische Darstellung des Gebildes R in der Form (11) vorliegt. Schon Euler[1]) hat eine solche Darstellung gegeben und es hat sich diese für den vorliegenden Zweck zunächst als brauchbarer erwiesen, als die bekannten Cayley-Hermite'schen Formeln. Um nach Euler die allgemeinste orthogonale Substitution (1) zu bilden, hat man so zu verfahren: Man bezeichne mit α einen der Indices $1, 2, \dots n-1$ und mit β jeden von α und $\alpha+1$ verschiedenen Index der Reihe $1, 2, \dots n$; sodann bedeute

$$E_\alpha(\varphi)$$

die orthogonale Substitution

$$(15)\qquad \begin{cases} x_\alpha = \cos\varphi . x'_\alpha + \sin\varphi . x'_{\alpha+1}, \\ x_{\alpha+1} = -\sin\varphi . x'_\alpha + \cos\varphi . x'_{\alpha+1}, \\ x_\beta = x'_\beta. \end{cases}$$

Nun nehme man $\frac{n(n-1)}{2}$ Winkel

$$\varphi_{0,1};\ \varphi_{0,2},\ \varphi_{1,2};\ \varphi_{0,3},\ \varphi_{1,3},\ \varphi_{2,3};\ \dots\ \varphi_{0,n-1},\ \varphi_{1,n-1},\ \dots\ \varphi_{n-2,n-1}$$

1) Commentationes arithmeticae collectae. Tom. I, pag. 427. Vgl. auch C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke, Bd. III. S. 601 und Kronecker: „Ueber orthogonale Systeme," Sitzungsberichte der Kgl. preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1890. S. 1068.

Digitized by Google

an und bilde mit ihnen die orthogonalen Substitutionen

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} E_1 = E_{n-1}(\varphi_{01}), \\ E_2 = E_{n-2}(\varphi_{12})\,E_{n-1}(\varphi_{02}), \\ E_3 = E_{n-3}(\varphi_{23})\,E_{n-2}(\varphi_{13})\,E_{n-1}(\varphi_{03}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_{n-1} = E_1(\varphi_{n-2,\,n-1})\,E_2(\varphi_{n-3,\,n-1})\cdots E_{n-1}(\varphi_{0,\,n-1}). \end{array}\right.$$

Dann stellt die aus diesen zusammengesetzte Substitution

$$(17)\qquad S = E_1 E_2 E_3 \cdots E_{n-1}$$

jede orthogonale Substitution (1) von der Determinante 1 und jede nur ein Mal vor, wenn die Winkel φ_{rs} alle durch die Ungleichungen

$$(18)\qquad 0 \leqq \varphi_{0s} < 2\pi, \quad 0 \leqq \varphi_{rs} < \pi \qquad (r > 0)$$

bestimmten Werthsysteme erhalten. Die Coefficienten $r_{\alpha\beta}$ der Substitution S sind offenbar ganze rationale Functionen der Sinus und Cosinus der Winkel φ_{rs} und zwar des Näheren ganze lineare Functionen von $\cos\varphi_{rs}$ und $\sin\varphi_{rs}$, wenn r, s ein beliebiges aber bestimmtes Indicespaar bezeichnen. Durch diese Euler'sche Darstellung der orthogonalen Substitutionen erscheint das Gebilde R eindeutig umkehrbar auf das durch die Ungleichungen (18) definirte Parallelotop im Raume von $\frac{n(n-1)}{2}$ Dimensionen bezogen. Hieraus folgt beiläufig, daß das Gebilde R irreducibel ist[1]).

Um nun den Ausdruck für das Quadrat des Linienelementes des Gebildes R zu erhalten, führe ich zunächst die Differentiale

$$(19)\qquad \sum_{\gamma} r_{\alpha\gamma}\,dr_{\beta\gamma} = dR_{\alpha\beta}$$

ein, zwischen welchen infolge der Gleichungen des Gebildes R die Relationen

$$dR_{\alpha\beta} = -dR_{\beta\alpha}$$

bestehen. Aus den Gleichungen (19) folgt

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta} dr_{\alpha\beta}^2 = \sum_{\alpha,\beta} dR_{\alpha\beta}^2 = 2[(dR_{12})^2 + (dR_{13})^2 + \cdots + (dR_{n-1,\,n})^2].$$

Die $\frac{n(n-1)}{2}$ Differentiale $dR_{12}, \ldots dR_{n-1,\,n}$ sind nun lineare

1) Einen andern, aber weniger einfachen Beweis für die Irreducibilität von R hat Kronecker gegeben (l. c. pag. 873). Die Abbildung von R auf das Parallelotop (18) giebt überdies Aufschluß über die Zusammenhangsverhältnisse des Gebildes im Sinne Riemann's.

Digitized by Google

homogene Functionen der $\frac{n(n-1)}{2}$ Differentiale $d\varphi_{rs}$, und wenn D den absoluten Werth der Determinante dieser Functionen bezeichnet, so ist offenbar

$$dR = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} D \prod_{r,s} d\varphi_{rs}$$

das Inhalts-Element des Gebildes R. Die Berechnung von D habe ich auf folgendem Wege ausgeführt. Setzt man

$$\overline{S} = E_1 E_2 \dots E_{n-2},$$

so wird

$$\overline{S} = S E_{n-1},$$

und es stellen sich die Differentiale $dR_{\alpha\beta}$ in einfacher Weise durch die Coefficienten der Substitutionen $\overline{S}$ und E_{n-1} und durch die Differentiale dieser Coefficienten dar. Nun hängen die Coefficienten von E_{n-1} nur von den Parametern $\varphi_{0,n-1}, \varphi_{1,n-1}, \dots \varphi_{n-2,n-1}$ ab, die Coefficienten von $\overline{S}$ ausschließlich von den übrigen Parametern. Infolgedessen zerfällt die Determinante D in zwei Factoren, von denen der eine nur von der Substitution E_{n-1} abhängt und sich leicht berechnen läßt, während der andere gerade so von der allgemeinsten auf die $n-1$ Variabeln $x_2, x_3, \dots x_n$ bezüglichen orthogonalen Substitution $\overline{S}$ abhängt, wie D selbst von S. Die Ausführung der Rechnung ergiebt schließlich das folgende einfache Resultat:

Das Inhalts-Element dR des Gebildes R hat den Ausdruck:

$$dR = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{r,s} (\sin\varphi_{rs})^r \, d\varphi_{rs}. \tag{20}$$

Das Produkt auf der rechten Seite erstreckt sich auf die $\frac{n(n-1)}{2}$ Indicespaare:

$$r, s = 0,1;\ 0,2;\ 1,2;\ 0,3;\ 1,3;\ 2,3;\ \dots;\ 0,n-1;\ 1,n-1;$$
$$2,n-1;\ \dots;\ n-2,n-1.$$

Mit Benutzung der Gleichung

$$\int_0^\pi (\sin\varphi)^r d\varphi = \Gamma(\tfrac{1}{2}) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)}$$

ergiebt sich aus (20) zunächst für die oben mit M bezeichnete

Digitized by Google

Constante, also für den Gesammtinhalt des Gebildes R der Werth

$$(21) \qquad M = \frac{2^{\frac{(n-1)(n+4)}{4}} \cdot \pi^{\frac{n(n+1)}{4}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

oder

$$(22) \begin{cases} M = \dfrac{2^{\frac{1}{4}(2n^2+n-4)} \cdot \pi^{\frac{n^2}{4}}}{2!\,4!\,6!\ldots(n-2)!}, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ M = \dfrac{2^{\frac{1}{4}(2n^2+3n-5)} \cdot \pi^{\frac{n^2-1}{4}} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{2!\,4!\,6!\ldots(n-1)!}, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Denkt man sich die Coefficienten $r_{\alpha\beta}$ der Substitution (1) durch die Cosinus und Sinus der $\frac{n(n-1)}{2}$ Winkel φ_{rs} ausgedrückt, so geht die unter dem Integrale (7) auftretende Function $F(a')$ über in eine ganze Function von $a_1, a_2, \ldots a_m$, deren Coefficienten ganze rationale Functionen der erwähnten Cosinus und Sinus sind. Dem entsprechend setze ich

$$(23) \qquad F(a') = F(a; \cos\varphi_{rs}, \sin\varphi_{rs}).$$

Der allgemeine Ausdruck (7) der orthogonalen Invarianten von $\varphi(a; x)$ wird dann

$$(24) \qquad J(a) = \int F(a; \cos\varphi_{rs}, \sin\varphi_{rs}) \prod (\sin\varphi_{rs})^r d\varphi_{rs},$$

wo die Integration auf die Werthsysteme der Integrationsvariabeln φ_{rs} auszudehnen ist, welche die Ungleichungen

$$0 \leqq \varphi_{0s} \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq \varphi_{rs} \leqq \pi \qquad (r > 0)$$

befriedigen.

Den Zahlenfactor $2^{\frac{n(n-1)}{4}}$ habe ich, was offenbar gestattet ist, unterdrückt. Ordnet man die Function $F(a; \cos\varphi_{rs}, \sin\varphi_{rs})$ nach den Potenzprodukten der $\cos\varphi_{rs}$, $\sin\varphi_{rs}$ an und integrirt sodann gliedweise, so erkennt man, daß das Integral (24) sich sofort ausführen läßt. Die bei der gliedweisen Integration auftretenden Integrale sind nämlich sämmtlich Produkte von Integralen der Gestalt

$$(25) \qquad C_{p,q} = \int_0^{\pi} (\cos\varphi)^p (\sin\varphi)^q d\varphi, \quad D_{p,q} = \int_0^{2\pi} (\cos\varphi)^p (\sin\varphi)^q d\varphi$$

Digitized by Google

und diese haben bekanntlich die Werthe

$$(26)\quad \begin{cases} C_{p,q} = (1+(-1)^p)\dfrac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}, \\ D_{p,q} = (1+(-1)^p)(1+(-1)^q)\dfrac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}. \end{cases}$$

Ich gehe nun zur Betrachtung der gewöhnlichen Invarianten einer Form $\Phi(a; x)$ über, also zur Betrachtung derjenigen homogenen ganzen rationalen Functionen der Coefficienten a, die gegenüber allen unimodularen Substitutionen

$$(27)\qquad x_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta} x'_\beta$$

invariant sind. Werden die Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ als reell vorausgesetzt und als rechtwinklige Coordinaten in einem Raume von n^2 Dimensionen gedeutet, so wird die Gesammtheit aller Substitutionen (27) in diesem Raume durch das Gebilde

$$(28)\qquad |c_{\alpha\beta}| = 1$$

repräsentirt. Wenn nun vermöge der Substitution (27) die Form $\Phi(a, x)$ in $\Phi(a', x')$ übergeht, so gehen aus einer beliebig gewählten Function $F(a)$ der Coefficienten der Form $\Phi(a, x)$ durch Anwendung aller Substitutionen (27) die Functionen $F(a')$ hervor, wobei die Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ nach und nach alle die Gleichung (28) befriedigenden Werthsysteme anzunehmen haben. Das über das Gebilde (28) erstreckte Integral

$$\int F(a')\,dw$$

stellt nun, falls es convergirt, eine Invariante vor. Dabei bezeichnet dw ein geeignet zu wählendes differentielles Element. Es tritt hier nun die Schwierigkeit auf, daß dieses Integral stets divergirt, sobald man für $F(a)$ eine ganze rationale Function der Coefficienten a wählt. Auf diesem Wege ist es daher unmöglich, die gewöhnlichen Invarianten der Form $\Phi(a; x)$ zu bilden. Die Schwierigkeit läßt sich aber auf folgende Weise überwinden. In der Substitution (27) will ich zunächst die Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ als complexe Größen annehmen. Indem ich die reellen und imaginären

Digitized by Google

Componenten der Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ als rechtwinklige Coordinaten deute, wird die Substitution (27) durch einen bestimmten Punkt eines Raumes von $2n^2$ Dimensionen repräsentirt. Nun mögen auch die Variabeln x und x' als complex veränderlich betrachtet und die Substitutionsgleichungen (27) durch Trennung der reellen und imaginären Theile in $2n$ Gleichungen zwischen reellen Größen umgesetzt werden. Diese $2n$ Gleichungen stellen dann eine auf $2n$ reelle Variable bezügliche Substitution vor, deren Coefficienten von den $2n^2$ Componenten der $c_{\alpha\beta}$ abhängen. Der Gruppe aller unimodularen Substitutionen (27) entspricht auf diese Weise offenbar eine ihr holoedrisch isomorphe Gruppe von Substitutionen bei $2n$ reellen Variabeln. Aus dieser letzteren Gruppe scheide ich nun diejenigen Substitutionen aus, welche orthogonal sind. Diese bilden eine Untergruppe, welche, wie sich weiterhin zeigen wird, von n^2-1 reellen Parametern abhängt. Die ihr in der Gruppe aller unimodularen Substitutionen (27) entsprechende Untergruppe heiße G.

Dann werden die Substitutionen von G im Raume von $2n^2$ Dimensionen durch ein ganz im Endlichen liegendes Gebilde T repräsentirt, weil dieses Gebilde einen Theil desjenigen ausmacht, welches die reellen orthogonalen Substitutionen bei $2n$ Variabeln darstellt. Nun ist jede Invariante sicher bei den Substitutionen von G invariant. Aber auch das Umgekehrte gilt. Denn es zeigt sich, daß die Untergruppe G wieder in die Gesammtgruppe aller unimodularen Substitutionen (27) übergeht, wenn man die n^2-1 Parameter, von welchen sie abhängt, als complex veränderlich annimmt. Daher wird nun die allgemeinste Invariante der Form $\Phi(a; x)$ durch das Integral

$$J(a) = \int F(a')\, dT \tag{29}$$

dargestellt, wo $F(a')$ eine homogene ganze rationale Function der transformirten Coefficienten a' ist, dT das Inhalts-Element des Gebildes T bezeichnet und die Integration über dieses ganze Gebilde auszudehnen ist.

Wird allgemein mit a^0 die zu der beliebigen Größe a conjugirt imaginäre Größe bezeichnet, so sind die Substitutionen (27), welche der Gruppe G angehören, dadurch charakterisiert, daß sie die Form

$$x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \cdots + x_n x_n^0$$

in sich transformiren[1]). Das Gebilde T ist daher durch die Glei-

1) Diese Substitutionen kommen auch bei anderen Untersuchungen in Betracht. Vgl. Frobenius: „Ueber die principale Transformation der Thetafunctionen mehrerer Variabeln.“ Crelle's Journal, Bd. 95 S. 264.

Digitized by Google

chungen definirt:

$$\sum_{\gamma} c_{\gamma\alpha} c^{0}_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}; \quad |c_{\alpha\beta}| = 1, \tag{30}$$

wobei man die reellen und imaginären Componenten der n^2 Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ als laufende Coordinaten anzusehen hat. Die Gleichungen (30) lassen eine ähnliche Behandlung zu, wie diejenigen, welche zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution bestehen. Zunächst ergiebt sich leicht, daß die Relationen

$$\sum_{\gamma} c_{\alpha\gamma} c^{0}_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta} \tag{31}$$

eine Folge der Gleichungen (30) sind. Sodann lassen sich in ähnlicher Weise, wie bei den reellen orthogonalen Substitutionen, die Lösungen $c_{\alpha\beta}$ des Systemes (30) durch unabhängig veränderliche Parameter ausdrücken. Zu dem Zwecke hat man die Zerlegung der Substitutionen der Gruppe G in „elementare" vorzunehmen, welche der Euler'schen Zerlegung der orthogonalen Substitutionen entspricht. Dabei ergiebt sich das folgende Resultat:

Die Substitution

$$\begin{cases} x_{\alpha} &= a x'_{\alpha} + b x'_{\alpha+1}, \\ x_{\alpha+1} &= -b^0 x'_{\alpha} + a^0 x'_{\alpha+1}, \\ x_{\beta} &= x'_{\beta}, \end{cases} \tag{32}$$

in welcher

$$a = \cos\varphi e^{\psi i}, \quad b = \sin\varphi e^{\chi i}, \quad a^0 = \cos\varphi e^{-\psi i}, \quad b^0 = \sin\varphi e^{-\chi i} \tag{33}$$

ist, möge mit

$$E_{\alpha}(\varphi, \psi, \chi)$$

bezeichnet werden. Nun bilde man die Substitutionen

$$\begin{cases} \mathrm{E}_1 &= E_{n-1}(\varphi_{01}, \psi_{01}, \chi_1) \\ \mathrm{E}_2 &= E_{n-2}(\varphi_{12}, \psi_{12}, 0)\, E_{n-1}(\varphi_{02}, \psi_{02}, \chi_2) \\ \mathrm{E}_3 &= E_{n-3}(\varphi_{23}, \psi_{23}, 0)\, E_{n-2}(\varphi_{13}, \psi_{13}, 0)\, E_{n-1}(\varphi_{03}, \psi_{03}, \chi_3) \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{E}_{n-1} &= E_1(\varphi_{n-2,\,n-1}, \psi_{n-2,\,n-1}, 0)\, E_2(\varphi_{n-3,\,n-1}, \psi_{n-3,\,n-1}, 0) \cdots E_{n-1}(\varphi_{0,\,n-1}, \psi_{0,\,n-1}, \chi_{n-1}), \end{cases} \tag{34}$$

wobei die φ_{rs}, ψ_{rs}, χ_s beliebige reelle Winkel bezeichnen. Dann stellt

Digitized by Google

$$T = E_1 E_2 E_3 \dots E_{n-1} \tag{35}$$

jede Substitution (26), welche zur Gruppe G gehört, und jede nur ein Mal dar, wenn die Winkel $\varphi_{r,s}$, $\psi_{r,s}$, χ_s auf die Intervalle

$$0 \leqq \varphi_{r,s} < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqq \psi_{r,s} < 2\pi, \quad 0 \leqq \chi_s < 2\pi \tag{36}$$

eingeschränkt werden.

Die Anzahl dieser Winkel beträgt

$$3+5+7+\dots+(2n-1) = n^2-1,$$

und es erscheint also durch die Gleichung (35) das Gebilde T auf ein Parallelotop von n^2-1 Dimensionen bezogen. Werden die in (33) auftretenden Größen φ, ψ, χ als complex veränderlich angenommen, so können die Coefficienten a, b, $-b^0$, a^0 der Substitution (32) jedes mit der Bedingung $aa^0+bb^0 = 1$ verträgliche Werthsystem erhalten. Hieraus folgt leicht, daß die Substitution (35) jede unimodulare Substitution (27) darstellt, falls man die n^2-1 Parameter $\varphi_{r,s}$, $\psi_{r,s}$, χ_s als complex veränderlich annimmt.

Die Berechnung des Inhalts-Elementes dT habe ich in ähnlicher Weise, wie die von dR, ausgeführt. An die Stelle der Hülfs-Differentiale $dR_{\alpha\beta}$ (vgl. (19)) treten hier die Differentiale

$$\sum_\gamma c_{\alpha\gamma} dc^0_{\beta\gamma} = dC_{\alpha\beta},$$

zwischen welchen infolge der Gleichungen (30) die Relationen

$$dC_{\beta\alpha} = -dC^0_{\alpha\beta}, \quad dC_{11}+dC_{22}+\dots+dC_{nn} = 0$$

bestehen. Das Quadrat des Linienelementes von T wird

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta} dc_{\alpha\beta} dc^0_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta} dC_{\alpha\beta} dC^0_{\alpha\beta},$$

und durch genauere Untersuchung der Gleichungen, welche die Differentiale $dC_{\alpha\beta}$ durch die Parameter $\varphi_{r,s}$, $\psi_{r,s}$, χ_s darstellen, ergiebt sich schließlich das Resultat:

Das Inhalts-Element dT hat den folgenden Ausdruck:

$$dT = \sqrt{n!}\, 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \prod_{r,s} \cos\varphi_{r,s} (\sin\varphi_{r,s})^{2r+1} d\varphi_{r,s} d\psi_{r,s} \cdot \prod_s d\chi_s. \tag{37}$$

Hier hat der Index s der Reihe nach die Werthe $1, 2, \dots n-1$ zu erhalten und im ersten Produkte muß für jeden stehenden Werth

Digitized by Google

von s der Index r die Werthe $0, 1, \ldots s-1$ durchlaufen. Hiernach erhält man nun für die allgemeinste Invariante der Form $\Phi(a; x)$ die folgende Darstellung.

Vermöge der Substitution (35) gehe $\Phi(a; x)$ in $\Phi(a'; x')$ über. Die transformierten Coefficienten a' sind dann ganze Functionen der Größen

$$\cos\varphi_{rs},\ \sin\varphi_{rs},\ e^{i\psi_{rs}},\ e^{-i\psi_{rs}},\ e^{i\chi_s},\ e^{-i\chi_s}.$$

Nun bilde man eine homogene ganze rationale Function

$$F(a') = F(a;\ \varphi_{rs},\ \psi_{rs},\ \chi_s)$$

der transformirten Coefficienten a'. Dann ist

$$(38)\quad J(a) = \int F(a;\ \varphi_{rs},\ \psi_{rs},\ \chi_s)\prod_{rs}\cos\varphi_{rs}(\sin\varphi_{rs})^{2r+1}d\varphi_{rs}d\psi_{rs}\prod_s d\chi_s$$

die allgemeinste Invariante der Form $\Phi(a; x)$. Die Integration erstreckt sich für jede der Integrations-Variabeln φ_{rs} auf das Intervall $0 \ldots \frac{\pi}{2}$, für jede der übrigen Integrations-Variabeln auf das Intervall $0 \ldots 2\pi$.

Die Ausführung der Integration führt offenbar auf Produkte von Integralen der Gestalt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^r(\sin\varphi)^s d\varphi,\quad \int_0^{2\pi} e^{ip\psi}d\psi.$$

Zur Erläuterung will ich das vorstehende allgemeine Ergebniß auf den Fall der binären Invarianten anwenden. Hier hat man die Form

$$(39)\qquad \Phi(a; x) = a_0x_1^m + a_1x_1^{m-1}x_2 + \cdots + a_mx_2^m$$

der Transformation

$$(40)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2' \\ x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2' \end{cases}$$

zu unterziehen, wobei

$$(41)\quad \alpha = \cos\varphi\cdot e^{\psi i},\ \beta = \sin\varphi\ e^{\chi i},\ \gamma = -\sin\varphi e^{-\chi i},\ \delta = \cos\varphi\cdot e^{-\psi i}$$

anzunehmen ist. Wird vermöge der Transformation (40)

$$(42)\quad \Phi(a; x) = \Phi(a'; x') = a_0'x_1'^m + a_1'x_1'^{m-1}x_2' + \cdots + a_m'x_2'^m,$$

so stellt das Integral

Digitized by Google

$$(43) \qquad J(a) = \int F(a') \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi d\psi d\chi \qquad \begin{pmatrix} \varphi = 0 \ldots \frac{\pi}{2} \\ \psi = 0 \ldots 2\pi \\ \chi = 0 \ldots 2\pi \end{pmatrix}$$

die allgemeinste Invariante von $\Phi(a; x)$ vor, unter $F(a')$ eine beliebige homogene ganze rationale Function der transformirten Coefficienten a' verstanden.

Um die Integration auszuführen, ordne ich $F(a')$ nach den Potenzprodukten der Substitutionscoefficienten an. Auf diese Weise kommt:

$$(44) \qquad F(a') = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} A \alpha^{k_1} \beta^{k_2} \gamma^{k_3} \delta^{k_4},$$

wo die Coefficienten A ganze homogene Functionen von $a_0, a_1, \ldots a_m$ sind.

Offenbar wird nun

$$(45) \qquad J(a) = \sum KA,$$

wenn mit K das Integral

$$K = \int \alpha^{k_1} \beta^{k_2} \gamma^{k_3} \delta^{k_4} \cos\varphi \sin\varphi \, d\psi \, d\chi \, d\varphi$$
$$= (-1)^{k_3} \int_0^{2\pi} e^{(k_1 - k_4)\psi i} d\psi \cdot \int_0^{2\pi} e^{(k_2 - k_3)\chi i} d\chi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{k_1 + k_4 + 1} (\sin\varphi)^{k_2 + k_3 + 1} d\varphi$$

bezeichnet wird. Der Werth von K ist gleich Null, außer wenn $k_4 = k_1$, $k_3 = k_2$ ist. Im letzteren Falle ist

$$K = (-1)^{k_3} (2\pi)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2k_1 + 1} (\sin\varphi)^{2k_2 + 1} d\varphi = \frac{(2\pi)^2}{2(k_1 + k_2 + 1)!} (-1)^{k_3} \cdot k_1! \, k_2!.$$

Beachtet man noch, daß $k_1 + k_2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$ constant ist für alle Glieder von $F(a')$, die hier in Betracht kommen, so erkennt man, daß sich die Invarianten von $\Phi(a; x)$ nach folgender Vorschrift bilden lassen:

Man ordne eine beliebige homogene ganze Function der transformirten Coefficienten a' nach den Substitutionscoefficienten α, β, γ, δ und ersetze sodann alle Potenzprodukte

$$\alpha^{k_1} \beta^{k_2} \gamma^{k_3} \delta^{k_4}$$

durch Null, mit Ausnahme derjenigen, bei welchen $k_4 = k_1$ und $k_3 = k_2$ ist. Diese letzteren ersetze man

Digitized by Google

durch $(-1)^{k_2} k_1! k_2!$. Die hierdurch entstehende Function der Coefficienten a stellt die allgemeinste Invariante der Form $\Phi(a; x)$ vor.

Diese Vorschrift stimmt nun, wie man leicht einsieht, genau mit derjenigen überein, die man durch die explicite Ausführung des Ω-Processes findet. Ueberhaupt läßt sich allgemein zeigen, daß das Integral (38) abgesehen von einem constanten Factor dieselbe Invariante darstellt, welche durch wiederholte Anwendung des Ω-Processes auf die Function $F(a')$ entsteht.

Was die binären Invarianten angeht, so erwähne ich noch, daß eine leichte Umformung des Integrales (43) eine andere bemerkenswerthe Darstellung dieser Invarianten ergiebt, die übrigens auch eine einfache directe Begründung zuläßt. Wenn nämlich die binäre Form $\Phi(a; x)$ durch die Transformation (40), in welcher jetzt

$$\begin{cases} \alpha = r+is, & \beta = t+iu, \\ \gamma = -t+iu, & \delta = r-is \end{cases} \tag{46}$$

angenommen werde, in $\Phi(a'; x')$ übergeht, so stellt das vierfache Integral

$$J(a) = \int F(a') e^{-(r^2+s^2+t^2+u^2)} dr\, ds\, dt\, du \tag{47}$$

die allgemeinste Invariante von $\Phi(a; x)$ dar. Die Integration ist für jede der Integrations-Variabeln von $-\infty$ bis $+\infty$ auszuführen und $F(a')$ bedeutet wie früher eine beliebige homogene ganze Function der transformirten Coefficienten a'.

An die vorstehenden Betrachtungen knüpfe ich noch den Beweis eines Satzes an, welcher zeigt, daß das Princip, die Invarianten durch Integration herzustellen, auf jede endliche continuirliche Gruppe anwendbar ist. Dabei bediene ich mich der von Herrn Lie, dem Begründer der allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen, eingeführten Begriffe und Bezeichnungen. Es seien $p_1, p_2, \ldots p_r$ rechtwinklige Coordinaten in einem Raume von r Dimensionen. Einen r-dimensionalen Theil dieses Raumes will ich als einen „Körper“ bezeichnen. Ferner fasse ich der Anschaulichkeit wegen die Werthe, welche irgend eine Function $\psi(p_1, p_2, \ldots p_r)$ in den Punkten des Raumes annimmt, als Dichtigkeiten in den betreffenden Punkten auf, so daß der Function eine bestimmte Dichtigkeitsvertheilung in dem Raume entspricht und das über irgend

Digitized by Google

: erstreckte Integral

$$\int \psi(p_1, p_2, \ldots p_r)\, dp_1 dp_2 \ldots dp_r$$

des Körpers zu bezeichnen ist. Dies vorausgeschickt,
ine beliebige (reelle) einfach transitive Gruppe[1]) des
geben sein, deren Gleichungen

$$p_i' = \varphi_i(p_1, p_2, \ldots p_r; x_1, x_2, \ldots x_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

gen. Hier bezeichnen $x_1, x_2, \ldots x_r$ die Parameter der

ı beweisende Satz lautet nun:
Dichtigkeit läßt sich stets und wesentlich
eine Weise so bestimmen, daß jeder belie-
rper des Raumes von r Dimensionen bei allen
rmationen der vorgelegten Gruppe (48) seine
onservirt.
ei K irgend ein Körper des Raumes von r Dimensionen;
gehe durch irgend eine der Transformationen (48) der
K' hervor. Dann ist die Behauptung des Satzes, daß bei
r Wahl der Function $\psi(p_1, p_2, \ldots p_r)$ die Gleichung

$$\psi(p_1, p_2, \ldots p_r)\, dp_1 dp_2 \ldots dp_r = \int_{(K')} \psi(p_1', p_2', \ldots p_r')\, dp_1' dp_2' \ldots dp_r'$$

. Diese Gleichung wird aber stets und nur dann für jede
les Körpers K stattfinden, wenn

$$\frac{d(p_1', p_2', \ldots p_r')}{d(p_1, p_2, \ldots p_r)} = \frac{\psi(p_1, p_2, \ldots p_r)}{\psi(p_1', p_2', \ldots p_r')}$$

vo auf der linken Seite die aus den Gleichungen (48) zu be-
nde Functionaldeterminante der Variabeln p' nach den Va-
n p steht. Um nun die Existenz einer die Gleichung (50)
digenden Function $\psi(p_1, p_2, \ldots p_r)$ nachzuweisen, bemerke
zunächst, daß die Functionaldeterminante

$$\frac{d(p_1', p_2', \ldots p_r')}{d(p_1, p_2, \ldots p_r)} = \left| \frac{\partial \varphi_i(p; x)}{\partial p_\varkappa} \right| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots r)$$

ı jedenfalls als Function der Variabeln p und p' darstellen läßt,

1) Vgl. Theorie der Transformationsgruppen. Unter Mitwirkung von Dr. riedrich Engel bearbeitet von Sophus Lie. Bd. I, S. 212. (Leipzig, 388).

Digitized by Google

da die Parameter $x_1, x_2, \ldots x_r$ sich vermöge der Gleichungen (48) durch die genannten Variabeln ausdrücken lassen.

Es sei etwa

$$\frac{d(p_1', p_2', \ldots p_r')}{d(p_1, p_2, \ldots p_r)} = \Psi(p; p'). \tag{51}$$

Wenn sodann die Zusammensetzung der Transformation (48) mit

$$p_i'' = \varphi_i(p_1', p_2', \ldots p_r'; \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

zu der neuen Transformation

$$p_i'' = \varphi_i(p_1, p_2, \ldots p_r; \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

führt, so hat man

$$\frac{d(p_1', p_2', \ldots p_r')}{d(p_1, p_2, \ldots p_r)} = \frac{d(p_1'', p_2'', \ldots p_r'')}{d(p_1, p_2, \ldots p_r)} : \frac{d(p_1'', p_2'', \ldots p_r'')}{d(p_1', p_2', \ldots p_r')}$$

und also

$$\Psi(p; p') = \frac{\Psi(p; p'')}{\Psi(p'; p'')}. \tag{52}$$

Hier darf man nun wegen der Transitivität der Gruppe die drei Punkte p, p', p'' als frei veränderlich ansehen. Dem Punkte p'' gebe man eine beliebige aber feste Lage $p^{(0)}$ und setze

$$\Psi(p; p^{(0)}) = \psi(p_1, p_2, \ldots p_r).$$

Dann zeigen die Gleichungen (51) und (52), daß die so bestimmte Function $\psi(p_1, p_2, \ldots p_r)$ die Gleichung (50) befriedigt. Da die Gleichung

$$\frac{\psi_1(p_1, p_2, \ldots p_r)}{\psi_1(p_1', p_2', \ldots p_r')} = \frac{\psi(p_1, p_2, \ldots p_r)}{\psi(p_1', p_2', \ldots p_r')}$$

nicht anders bestehen kann, als wenn

$$\frac{\psi_1(p_1, p_2, \ldots p_r)}{\psi(p_1, p_2, \ldots p_r)} = \text{const.}$$

ist, so ist die Function $\psi(p_1, p_2, \ldots p_r)$ durch die Gleichung (50) bis auf einen constanten Factor völlig bestimmt [1]).

---

1) Ein anderer Beweis des obigen Satzes ergiebt sich leicht (zunächst für die Parametergruppe und sodann allgemein für jede einfach transitive Gruppe) aus Lie's allgemeiner Theorie. Vgl. die Gleichungen (8') auf Seite 405 Bd. I des citirten Werkes über Transformationsgruppen.

Digitized by Google

Der soeben bewiesene Satz bildet nun die Grundlage für die Herstellung der Invarianten einer beliebigen continuirlichen Gruppe durch Integration. Es seien

$$(53) \quad a_k' = f_k(a_1, a_2, \ldots a_m; p_1, p_2, \ldots p_r) = f_k(a; p) \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

die Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe. Die Parameter p_1, p_2, $\ldots p_r$ sollen als reell-veränderlich vorausgesetzt und als rechtwinklige Coordinaten in einem Raume von r Dimensionen gedeutet werden. Die Gruppeneigenschaft der durch (53) dargestellten Transformationen findet ihren Ausdruck in den Gleichungen

$$(54) \quad f_k[f_1(a; x), f_2(a; x), \ldots f_m(a; x); p_1, p_2, \ldots p_r] = f_k(a_1, a_2, \ldots a_m; p_1', p_2', \ldots p_r'),$$

wo die Variabeln a und die Parametersysteme x_1, x_2, $\ldots$ x_r, p_1, p_2, $\ldots$ p_r frei veränderlich sind, während $p_1', p_2', \ldots p_r'$ Functionen der x und p, etwa die folgenden

$$(55) \quad p_i' = \varphi_i(p_1, p_2, \ldots p_r; x_1, x_2, \ldots x_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

bedeuten. Faßt man in den letzteren Gleichungen die p und p' als Variable, die x als Parameter auf, so stellen sie eine einfach transitive Gruppe, die „Parametergruppe" der Gruppe (53), vor[1]). Ich betrachte jetzt eine beliebige Function $F(a_1, a_2, \ldots a_m)$ der Variabeln $a_1, a_2, \ldots a_m$. Ersetzt man die a durch die a', bildet man also

$$F[f_1(a; p), f_2(a; p), \ldots f_m(a; p)],$$

so entstehen hierdurch alle Functionen, in welche die Function $F(a_1, a_2, \ldots a_m)$ durch die Transformationen (53) übergeht, wenn die Parameter $p_1, p_2, \ldots p_r$ alle ihre Werthe durchlaufen. Es erhebt sich jetzt die Frage, ob die Function $\Psi(p_1, p_2, \ldots p_r)$ so gewählt werden kann, daß die Elemente des Integrales

$$(56) \quad J(a_1, a_2, \ldots a_m) = \int F[f_1(a; p), f_2(a; p), \ldots f_m(a; p)]\, \Psi(p_1, p_2, \ldots p_r)\, dp_1 dp_2 \ldots dp_r$$

sich bei einer beliebigen Transformation der Gruppe (53) nur unter einander vertauschen, so daß dieses Integral, falls es convergirt, eine Invariante der Gruppe vorstellt. Um dieses zu untersuchen, ersetze ich a_k durch $f_k(a_1, a_2, \ldots a_m; x_1, x_2, \ldots x_r)$, unter x_1, x_2, $\ldots$ x_r ein beliebiges System von Parametern verstanden. Hierdurch geht nach (54) das Integral (56) über in

1) Lie, l. c. pag. 404.

Digitized by Google

$$\int F[f_1(a; p'), f_2(a; p'), \ldots f_m(a; p')]\, \Psi(p_1, p_2, \ldots p_r)\, dp_1 dp_2 \ldots dp_r$$

und man erkennt jetzt, daß die geforderte Eigenschaft des Integrales (56) wirklich (und nur dann) stattfindet, wenn man die Function $\Psi(p_1, p_2, \ldots p_r)$ mit der zur Parametergruppe (55) gehörigen Dichtigkeitsfunction $\psi(p_1, p_2, \ldots p_r)$ zusammenfallen läßt. Hiermit ist nun die allgemeine Anwendbarkeit des Principes, die Invarianten einer continuirlichen Gruppe durch Integration zu erzeugen, nachgewiesen.

Zürich, d. 1. März 1897.

Digitized by Google

Zur Algebra des Riemann-Roch'schen Satzes.

Von

Georg Landsberg in Heidelberg.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Mai 1897 von D. Hilbert.)

Der Riemann-Roch'sche Satz ist seit seiner Begründung Gegenstand vielfacher und verschieden gerichteter Forschung gewesen. Ursprünglich auf dem transscendenten Felde der Theorie der Abel'schen Functionen hervorgewachsen, ist er wegen seiner fundamentalen Bedeutung und seines elementaren Charakters zum Ausgangspuncte algebraisch-geometrischer und algebraisch-arithmetischer Untersuchungen geworden. In jener Hinsicht sind es vorzüglich die Arbeiten der Herren Brill und Nöther, in dieser eine umfassende Abhandlung der Herren Dedekind und Weber, welche für eine rein algebraische Fundirung des Satzes von grundlegender Bedeutung geworden sind. Die neueren Untersuchungen über die charakteristischen Eigenschaften der Fundamentalsysteme, wie sie von Kronecker geschaffen, von Herrn Hensel durch ein fruchtbares Princip, nach welchem der größte gemeinschaftliche Theiler eines Systemes conjugirter Functionen als Wurzelgröße dargestellt werden kann, in wesentlicher Weise gefördert worden sind, gestatten nun einerseits eine selbständige und von allen Einschränkungen freie Begründung des Satzes; andererseits aber führen die der arithmetischen Betrachtungsweise eigenthümlichen Methoden in genuiner Weise zu einem allgemeineren Theoreme hin, welches als Quelle des Riemann-Roch'schen Satzes erscheint und welches neu und des Interesses werth sein dürfte. In einer in den mathematischen Annalen demnächst erscheinenden Arbeit habe ich dieses Theorem, ausschließlich auf der wohlbekannten Theorie der Reihenentwickelung der algebraischen

Digitized by Google

Functionen fußend, in ausführlichem Zusammenhange entwickelt; in dieser vorläufigen Mittheilung mag es gestattet sein, die hierbei sich ergebenden Sätze und Begriffsbildungen mit einer kurzen Andeutung der Beweise zusammenzustellen.

Gegeben sei eine algebraische Function y durch eine irreductibele Gleichung $n$ten Grades

$$(1) \qquad y^n + a_1(x)y^{n-1} + a_2(x)y^{n-2} + \cdots + a_n(x) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen der unabhängigen Variabelen x sind. Um die unendlich fernen Puncte der zugehörigen Riemann'schen Fläche in gleicher Weise, wie die im Endlichen gelegenen Puncte untersuchen zu können, setzen wir $x = \frac{x_1}{x_2}$; hierdurch gehe die Gleichung (1) über in

$$(2) \qquad b_0y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \cdots + b_n = 0,$$

worin $b_0, b_1, \ldots b_n$ ganze rationale Formen gleicher Dimension von x_1 und x_2 sind. Wir betrachten nun alle Größen der Form

$$(3) \qquad u = u_0 + u_1y + u_2y^2 + \cdots + u_{n-1}y^{n-1},$$

wobei $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$ irgend welche rationale Formen gleicher Dimension μ von x_1 und x_2 sein können. Die Gesammtheit dieser Größen bilden einen Körper algebraischer Formen; ein derartiger Körper ist eine einfache Erweiterung der Riemann'schen Classe algebraischer Functionen, zu welcher wir gelangen, wenn wir die Dimension μ der Form u gleich Null setzen, wodurch u eine Function von $x = \frac{x_1}{x_2}$ allein wird.

Eine algebraische Form des Körpers heißt ganz, wenn sie in keinem Puncte der Riemann'schen Fläche unendlich wird. Für diese ganze Formen H giebt es nun, wie man weiß, ein Fundamentalsystem

$$(4) \qquad H_1, H_2, \ldots H_n,$$

d. i. ein System von n Formen von der Art, daß man alle ganzen algebraischen Formen des Körpers erhält, wenn man in

$$(5) \qquad H = u_1H_1 + u_2H_2 + \cdots + u_nH_n$$

für $u_1, u_2, \ldots u_n$ alle möglichen ganzen rationalen binären Formen nimmt, deren Dimensionen nur so angenommen werden müssen, daß H in x_1, x_2 homogen ist. Ein solches Fundamentalsystem steht in innigem Zusammenhange mit der Verzweigungsart der dem Körper zugehörigen Riemann'schen Fläche. Es sei nämlich $\eta = a_2x_1 - a_1x_2$ eine beliebige Linearform, welche in den ν Puncten

Digitized by Google

$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\nu$ resp. in den Ordnungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ Null wird, so ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = n, \tag{6}$$

und die Puncte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\nu$ sind nach Riemann'scher Bezeichnung Windungspuncte der Ordnung $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots \alpha_\nu - 1$. Bildet man nun das quadratische System

$$A = \begin{pmatrix} H_1' & H_2' & \ldots & H_n' \\ H_1'' & H_2'' & \ldots & H_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_1^{(n)} & H_2^{(n)} & \ldots & H_n^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

in welchem, wie überall im folgenden, $H_\varrho', H_\varrho'', \ldots H_\varrho^{(n)}$ die Conjugirten der Form H_ϱ bedeuten, und berechnet seine Elementartheiler, so sind dieselben, soweit die Linearform η in sie eintritt, die folgenden Wurzelgrößen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^0 \; \eta^{\frac{1}{\alpha_1}} \; \eta^{\frac{2}{\alpha_1}} \ldots \eta^{\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}} \\ \eta^0 \; \eta^{\frac{1}{\alpha_2}} \; \eta^{\frac{2}{\alpha_2}} \ldots \eta^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta^0 \; \eta^{\frac{1}{\alpha_\nu}} \; \eta^{\frac{2}{\alpha_\nu}} \ldots \eta^{\frac{\alpha_\nu - 1}{\alpha_\nu}} . \end{array} \right. \tag{8}$$

Aus diesem wichtigen Satze folgt unter Anderem, wenn man mit $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ die Dimensionen der Formen $H_1, H_2, \ldots H_n$ bezeichnet, die stets der Größe nach angeordnet sein sollen, daß die Gesammtdimension des Fundamentalsystemes

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = \frac{w}{2} \tag{9}$$

ist, wo w die Riemann'sche Verzweigungszahl bedeutet. Für das Geschlecht p des Körpers hat man hiernach, da stets $\mu_1 = 0$, $\mu_2, \mu_3, \ldots \mu_n > 0$ sind:

$$p = \frac{w}{2} - n + 1 = (\mu_2 - 1) + (\mu_3 - 1) + \cdots + (\mu_n - 1). \tag{10}$$

Neben dieses Fundamentalsystem für die ganzen algebraischen Formen des Körpers stellt sich ein zweites, welches einem weiteren Formenreich zu Grunde liegt. Wir gelangen zu diesem Fundamentalsystem am einfachsten dadurch, daß wir das reciproke System zu dem Systeme A in (7) bilden. Bezeichnen wir

Digitized by Google

dieses mit

$$B = \begin{pmatrix} Z_1' & Z_1'' & \dots & Z_1^{(n)} \\ Z_2' & Z_2'' & \dots & Z_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_n' & Z_n'' & \dots & Z_n^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

so sieht man leicht, wie dies durch die Schreibweise gekennzeichnet ist, daß die in der g^{ten} Zeile stehenden Größen die Conjugirten einer und derselben algebraischen Form Z_g des Körpers ist. Bilden wir nun alle möglichen Formen

$$Z = v_1 Z_1 + v_2 Z_2 + \cdots + v_n Z_n, \tag{12}$$

worin $v_1, v_2, \dots v_n$ irgend welche ganze rationale binäre Formen von solchen Dimensionen sind, daß Z in x_1, x_2 homogen ist, so sind diese Formen im allgemeinen nicht ganz, aber sie werden nur in den Verzweigungspuncten der Riemann'schen Fläche, und zwar in einem Verzweigungspuncte der Ordnung ν höchstens von der Ordnung ν unendlich. Eine derartige Form heißt eine Form erster Gattung, und die Formen

$$Z_1, Z_2, \dots Z_n \tag{13}$$

bilden also ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung; ihre Dimensionen sind der Reihe nach $-\mu_1$, $-\mu_2, \cdots -\mu_n$. Da eine ganze Form der Dimension μ stets μn Nullstellen hat, so hat eine Form erster Gattung der Dimension μ $(w + \mu n)$ Nullstellen; nur muß man bei dieser Abzählung, wie das naturgemäß ist, einen Verzweigungspunct der Ordnung ν schon dann wie eine Nullstelle betrachten, wenn die Form erster Gattung in ihm von geringerer als der ν^{ten} Ordnung unendlich wird, und zwar zählt man ihn wie eine α-fache Nullstelle, wenn die Ordnung des Unendlichwerdens bei gewöhnlicher Abzählung gleich $\nu - \alpha$ ist.

Beiläufig mag hier kurz auf den Zusammenhang hingewiesen werden, in welchem die Formen erster Gattung mit den Integralen erster Gattung stehen. Ist ζ eine Form erster Gattung, deren Dimension gleich -2 ist, so ist

$$\int \zeta (x_2 dx_1 - x_1 dx_2)$$

ein Integral erster Gattung. Dann folgt aus den früheren Sätzen sogleich durch directe Abzählung, daß die Integranden erster Gattung ζ eine lineare Schaar bilden, welche aus p von ihnen linear und homogen mit constanten Coefficienten componirt werden

Digitized by Google

kann, oder daß — wie wir dies ausdrücken wollen — die Mannigfaltigkeit der Integranden erster Gattung gleich p ist.

Der Kernpunct in der Weiterführung der Untersuchung liegt nun in einer merkwürdigen und wichtigen Verallgemeinerung der Fundamentalsysteme H und Z und der Reciprocitätsbeziehung, welche zwischen ihnen statt hat. Es sei nämlich $\mathfrak{H}$ eine Gruppe von m' ganz willkürlich gewählten Puncten (ein Polygon nach Dedekind-Weber'scher Bezeichnung), welche auch zu einem Theile coincidiren oder in die Verzweigungspuncte der Riemann'schen Fläche hineinrücken dürfen. Betrachtet man jetzt die Gesammtheit der ganzen algebraischen Formen des Körpers, welche in dem Polygon $\mathfrak{H}$ verschwinden, so besitzt dieses engere Formengebiet ebenfalls ein Fundamentalsystem

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n, \tag{14}$$

dergestalt daß man alle ganzen Formen, die in $\mathfrak{H}$ verschwinden, erhält, wenn man in der Gleichung

$$\Phi = u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2 + \cdots + u_n\Phi_n \tag{15}$$

die Coefficienten $u_1 \dots u_n$ alle möglichen ganzen rationalen binären Formen bedeuten läßt, für welche Φ homogen in x_1, x_2 wird. Die Dimensionen der Formen $\Phi_1 \dots \Phi_n$ seien der Reihe nach $\varrho_1 \dots \varrho_n$, so hat man für die Gesammtdimension des Fundamentalsystemes die Relation

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n = \frac{w}{2} + m'. \tag{16}$$

Diese Sätze kann man in ganz ähnlicher Weise herleiten wie die entsprechenden, die für das Gebiet aller ganzen Formen des Körpers gelten, in welchem Falle $m' = 0$ ist.

Eine ganz analoge Verallgemeinerung besteht im Bereiche der Formen erster Gattung. Es sei nämlich $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe von m Puncten, so giebt es für die Formen erster Gattung, die in $\mathfrak{G}$ verschwinden, ein Fundamentalsystem

$$\Psi_1, \Psi_2, \dots \Psi_n, \tag{17}$$

dergestalt daß man alle Formen erster Gattung, welche in $\mathfrak{G}$ verschwinden, erhält, wenn man in der Gleichung

$$\Psi = v_1\Psi_1 + v_2\Psi_2 + \cdots + v_n\Psi_n \tag{18}$$

für die Coefficienten v irgend welche ganze rationale binäre Formen nimmt, deren Dimensionen so gewählt sind, daß Ψ in x_1, x_2 homogen wird. Sind $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ die Dimensionen von

Digitized by Google

$\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$, so ist die Gesammtdimension des Fundamentalsystems

$$(19) \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = -\frac{w}{2} + m.$$

Zwischen den beiden Fundamentalsystemen Φ und Ψ findet aber in dem Falle eine ganz ähnliche Reciprocitätsbeziehung statt, wie zwischen den Systemen H und Z, wenn die beiden Punctgruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zusammengenommen das vollständige Nullpunctsystem einer ganzen rationalen binären Form

$$(20) \qquad P(x_1, x_2) = c_0 x_1^\lambda + c_1 x_1^{\lambda-1} x_2 + c_2 x_1^{\lambda-2} x_2^2 + \cdots + c_\lambda x_2^\lambda$$

bilden; unter dieser Voraussetzung ist natürlich $m + m' = \lambda n$. Zwei derartige Punctgruppen, die einander zum vollständigen Nullpunctsystem einer ganzen rationalen binären Form ergänzen, sollen reciproke Punctgruppen heißen; es ist evident, daß zu jeder Punctgruppe eine (oder vielmehr unendlich viele) reciproke Punctgruppen existiren. Mit Einführung dieses Begriffes kann man den folgenden Hauptsatz beweisen:

Wenn $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ reciproke Gruppen von m resp. m' Puncten sind und $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n$ ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen, die in $\mathfrak{H}$ verschwinden, bedeutet, so kann man das Fundamentalsystem $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ für die Formen erster Gattung, die in $\mathfrak{G}$ verschwinden, stets so auswählen, daß die beiden quadratischen Systeme

$$(21) \quad C = \begin{pmatrix} \Phi_1' & \Phi_2' & \ldots & \Phi_n' \\ \Phi_1'' & \Phi_2'' & \ldots & \Phi_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_1^{(n)} & \Phi_2^{(n)} & \ldots & \Phi_n^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} \Psi_1' & \Psi_1'' & \ldots & \Psi_1^{(n)} \\ \Psi_2' & \Psi_2'' & \ldots & \Psi_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Psi_n' & \Psi_n'' & \ldots & \Psi_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

zu einander reciprok werden, sobald die Elemente eines der beiden Systeme durch P dividirt werden.

Die vorher dargelegte Reciprocitätsbeziehung zwischen den Systemen A und B in (7) und (11) entspricht dem speciellen Falle $m = 0$.

Der Beweis unseres Theoremes kann in Kürze so skizzirt werden: Ist Ψ eine Form erster Gattung, die in $\mathfrak{G}$ verschwindet, so sind $\Psi\Phi_1, \Psi\Phi_2, \ldots \Psi\Phi_n$ Formen erster Gattung, die in $\mathfrak{G} + \mathfrak{H}$ verschwinden.

Bilden wir also die Spuren dieser Formen, d. i. die Summen der n Conjugirten ($S(\alpha) = \alpha' + \alpha'' + \cdots + \alpha^{(n)}$), so sind diese ganze

Digitized by Google

rationale durch P theibare Formen und wir dürfen also setzen

$$(22)\quad S(\Psi\Phi_1) = Pv_1,\quad S(\Psi\Phi_2) = Pv_2,\quad \dots\quad S(\Psi\Phi_n) = Pv_n,$$

wo die v ganz und rational sind. Sind aber C und $\frac{D}{P}$ reciproke Systeme, so folgt aus den letzten Gleichungen

$$\Psi = v_1\Psi_1 + v_2\Psi_2 + \cdots + v_n\Psi_n,$$

womit der eine Theil der Behauptung erwiesen ist. Wenn umgekehrt die letzte Gleichung stattfindet, so kann man hieraus die Gleichungen (22) ableiten, und aus diesen ergiebt sich, daß die Form erster Gattung Ψ in dem Punctsysteme $\mathfrak{G}$ verschwindet. —

Mit Hilfe der Fundamentalsysteme H und Z kann man die reciproke Beziehung zwischen den Fundamentalsystemen Φ und Ψ auch leicht in rationaler Weise darstellen; ist nämlich

$$(23)\qquad \Phi_g = \sum_h b_{gh} H_h \qquad (g, h = 1, 2, \dots n),$$

so berechnen sich die Formen Ψ aus den linearen Gleichungen

$$(24)\qquad PZ_g = \sum_h b_{hg} \Psi_h \qquad (g, h = 1, 2, \dots n).$$

Für die Dimensionszahlen σ und ϱ ergeben sich hiernach die Relationen

$$(25)\qquad \sigma_1 + \varrho_1 = \sigma_2 + \varrho_2 = \cdots = \sigma_n + \varrho_n = \lambda;$$

bilden also, wie das angenommen sei, $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$ eine aufsteigende, so bilden $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ eine absteigende Reihe.

Stellen wir uns jetzt die Aufgabe, die Schaar der algebraischen Formen α des Körpers zu bestimmen, welche nirgends außer in der Punctgruppe $\mathfrak{G}$ unendlich werden und eine vorgegebene Dimension μ haben; dann ist αP eine ganze algebraische Form des Körpers, welche in $\mathfrak{H}$ verschwindet und die Dimension $\mu + \lambda$ hat, also

$$(26)\qquad \alpha P = u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2 + \cdots + u_n\Phi_n,$$

worin die ganze binäre Form u_g die Dimension $\mu + \lambda - \varrho_g$ hat.

Als Mannigfaltigkeit der Schaar der Formen α ergiebt sich hiernach die Zahl

$$r = (\mu + \lambda - \varrho_1 + 1) + (\mu + \lambda - \varrho_2 + 1) + \cdots + (\mu + \lambda - \varrho_n + 1),$$

falls keiner der hier auftretenden Summanden negativ ist; hingegen ist die Mannigfaltigkeit

$$r = (\mu + \lambda - \varrho_1 + 1) + (\mu + \lambda - \varrho_2 + 1) + \cdots + (\mu + \lambda - \varrho_h + 1),$$

Digitized by Google

falls die Zahlen $\mu+\sigma_{\lambda+1}+1, \mu+\sigma_{\lambda+2}+1, \ldots \mu+\sigma_n+1$ negativ sind. Setzt man also

$$-(\mu+\sigma_{\lambda+1}+1)-(\mu+\sigma_{\lambda+2}+1)-\cdots-(\mu+\sigma_n+1) = \sigma,$$

so ist

$$r = (\mu n+m)-p+1+\sigma, \tag{27}$$

und hier kann nach unserem Reciprocitätssatze die Zahl σ einfach als Mannigfaltigkeit derjenigen Formen erster Gattung charakterisirt werden, welche in $\mathfrak{G}$ verschwinden und die Dimension $-\mu-2$ haben. Also der Satz:

I. Die Mannigfaltigket der Formen der Dimension μ, welche nirgends außer in einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ von m Puncten unendlich werden, ist gleich

$$r = q-p+1+\sigma, \tag{27a}$$

worin

$$q = \mu n+m \tag{27b}$$

die Anzahl der Nullstellen einer derartigen Form und σ die Mannigfaltigkeit der Formen erster Gattung der Dimension $(-\mu-2)$, welche in $\mathfrak{G}$ verschwinden, bedeutet.

Der Riemann-Roch'sche Satz in seiner gewöhnlichen Form entspricht dem Falle $\mu = 0$.

Diesem Satze stellt sich aber sogleich ein zweiter zur Seite, wenn man ein Formengebiet betrachtet, welches in demselben Verhältnisse zu den Formen erster Gattung steht, wie die gebrochenen algebraischen Formen zu den ganzen algebraischen Formen des Körpers. Es sei nämlich α' eine Form der Dimension μ', welche erstens in einem Windungspuncte ν^{ter} Ordnung ν-fach (im Windungspolygon nach Dedekind-Weber'scher Bezeichnung) und sodann noch in der Gruppe $\mathfrak{H}$ von m' Puncten unendlich werden darf.

Eine derartige Form, welche in Ermangelung einer besseren Ausdrucksweise eine Form höherer Gattung genannt sein mag, hat

$$q' = w+m'+\mu' n$$

Nullstellen, wenn wir ebenso, wie bei den Formen erster Gattung einen Verzweigungspunct schon dann als Nullstelle zählen, wenn die höchste zulässige Ordnung des Unendlichwerdens in ihm nicht erreicht wird. Für diese Formen höherer Gattung ergiebt sich auf ganz analogem Wege der Satz:

Digitized by Google

II. Die Mannigfaltigkeit der Formen höherer Gattung der Dimension μ', welche (außer im Windungspolygon) in einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{H}$ von m' Puncten unendlich werden, ist gleich

$$r' = q' - p + 1 + \sigma', \tag{28a}$$

worin

$$q' = w + m' + \mu' n \tag{28b}$$

die Anzahl der Nullstellen einer derartigen Form und σ' die Mannigfaltigkeit der ganzen Formen der Dimension $(-\mu' - 2)$, welche in $\mathfrak{H}$ verschwinden, bedeutet.

Hier bietet nun der specielle Fall ein besonderes Interesse dar, daß die Dimension $\mu' = -2$ ist. Dann ist nämlich

$$q' = w - 2n + m' = 2(p-1) + m'$$

und σ' ist stets gleich Null, weil es keine ganzen Formen des Körpers von der Dimension Null giebt, welche in $\mathfrak{H}$ verschwänden. Also haben wir das folgende Corollar zum vorigen Satze:

IIa. Die Mannigfaltigkeit der Formen höherer Gattung ϑ der Dimension -2, welche (außer im Windungspolygon) in einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{H}$ von m' Puncten unendlich werden, ist stets gleich

$$R = p + m' - 1, \tag{29}$$

wie auch im übrigen die m' Puncte von $\mathfrak{H}$ gelegen sein mögen.

Die Wichtigkeit derartiger Formen ϑ beruht darauf, daß das Integral

$$J = \int \vartheta . (x_2 dx_1 - x_1 dx_2)$$

das allgemeinste Abel'sche Integral des Körpers darstellt, welches nur in den m' Puncten der Gruppe $\mathfrak{H}$ unendlich wird, und zwar sind diese Puncte sämmtlich logarithmische Unstetigkeitspuncte, wenn sie sämmtlich von einander verschieden sind, wenn aber ν Puncte in einen zusammenfallen, so tritt an die Stelle von ν logarithmischen Unstetigkeitspuncten eine Uebereinanderlagerung einer logarithmischen Unstetigkeit und einer algebraischen der Ordnung $\nu - 1$.

Demgemäß kann der vorige Satz auch so ausgesprochen werden:

IIb. Die Abel'schen Integrale des Körpers, welche

Digitized by Google

m' vorgegebene Unstetigkeiten besitzen, bilden stets eine lineare Schaar, deren Mannigfaltigkeit $p+m'-1$ ist.

Die bekannten Sätze über Integrale zweiter und dritter Gattung sind specielle Fälle hiervon. —

Es bietet sich in diesem Zusammenhange schließlich noch die Aufgabe dar, die Elementartheiler der Systeme C und D in (21) ebenso zu bestimmen, wie das vorher für die Systeme A und B geschehen ist. Als Resultat dieser Untersuchung ergiebt sich ohne Schwierigkeit folgendes. Es sei

$$\eta = a_2 x_1 - a_1 x_2$$

ebenso wie am Anfange dieser Mittheilung, eine beliebige Linearform, welche in den Puncten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\nu$ der Riemann'schen Fläche resp. in den Ordnungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ verschwindet und in der Form P l-mal enthalten ist $(0 \leqq l \leqq \lambda)$.

Wenn jetzt die Puncte $\mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_\nu$
in der Gruppe $\mathfrak{G}$ in den Multiplicitäten $s_1\ s_2 \ldots s_\nu$,
in der Gruppe $\mathfrak{H}$ in den Multiplicitäten $r_1\ r_2 \ldots r_\nu$ auftreten,
so ist

$$r_1+s_1 = l\alpha_1, \quad r_2+s_2 = l\alpha_2, \quad \ldots \quad r_\nu+s_\nu = l\alpha_\nu.$$

Unter dieser Voraussetzung findet man die Elementartheiler des Systemes C, soweit η in sie eintritt:

$$(30) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \eta^{\frac{r_1}{\alpha_1}} & \eta^{\frac{r_1+1}{\alpha_1}} & \ldots & \eta^{\frac{r_1+\alpha_1-1}{\alpha_1}} \\ \eta^{\frac{r_2}{\alpha_2}} & \eta^{\frac{r_2+1}{\alpha_2}} & \ldots & \eta^{\frac{r_2+\alpha_2-1}{\alpha_2}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \eta^{\frac{r_\nu}{\alpha_\nu}} & \eta^{\frac{r_\nu+1}{\alpha_\nu}} & \ldots & \eta^{\frac{r_\nu+\alpha_\nu-1}{\alpha_\nu}} \end{array} \right. ,$$

und entsprechend die Elementartheiler der Systemes D:

$$(31) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \eta^{\frac{s_1}{\alpha_1}} & \eta^{\frac{s_1-1}{\alpha_1}} & \ldots & \eta^{\frac{s_1-\alpha_1+1}{\alpha_1}} \\ \eta^{\frac{s_2}{\alpha_2}} & \eta^{\frac{s_2-1}{\alpha_2}} & \ldots & \eta^{\frac{s_2-\alpha_2+1}{\alpha_2}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \eta^{\frac{s_\nu}{\alpha_\nu}} & \eta^{\frac{s_\nu-1}{\alpha_\nu}} & \ldots & \eta^{\frac{s_\nu-\alpha_\nu+1}{\alpha_\nu}} \end{array} \right. .$$

Digitized by Google

Hieraus folgt noch, daß die Determinante

$$|b_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n),$$

welche zu dem Gleichungssysteme (23) gehört, genau durch

$$\eta^{r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu}$$

theilbar ist. Betreffs anderer Eigenschaften der Fundamentalsysteme Φ und Ψ, welche sich aus den hier mitgetheilten Eigenschaften ableiten lassen, mag auf die ausführliche Darstellung verwiesen werden.

Heidelberg, April 1897.

Digitized by Google

Ueber Translationen und verwandte Erscheinungen in Krystallen.

Von

O. Mügge in Königsberg i. Pr.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Mai 1897 von Th. Liebisch.)

Die Fähigkeit Translationen einzugehen scheint außerordentlich verbreitet; wahrscheinlich ist sie eine allgemeine Eigenschaft der Krystalle ähnlich wie die Spaltbarkeit, und wie diese bald mehr bald minder ausgeprägt. Die Tabelle am Schluß giebt eine Uebersicht derjenigen Substanzen, an welchen sie bisher beobachtet ist. Mit der Translation hängt auch die unelastische Biegung und Torsion anscheinend sehr enge zusammen, ebenso werden auch die Schlag- und Druckfiguren, Unterschiede der Ritzbarkeit nach verschiedenen Richtungen, der Gegensatz zwischen faserigen und muschligen Bruchflächen, gewisse bisher als polysynthetische Zwillinge angesprochene Bildungen und die Structureigenthümlichkeiten einiger Minerale durch Translation verständlicher.

Als Merkmal der Translationsfähigkeit kann an den natürlichen Krystallen zunächst die Translationsstreifung gelten, die bisher wegen ihrer außerordentlichen Feinheit ganz übersehen ist. In typischer Weise zeigen sie manche Vorkommen von Bleiglanz, Antimonglanz, Lorandit und Gyps; wahrscheinlich gehört hierher die feine Streifung des Columbit $\parallel \{010\}$, des Wolframit $\parallel \{010\}$ und $\parallel \{100\}$. Gegenüber der Combinationsstreifung ist sie dadurch ausgezeichnet, daß sie stets parallel derselben Ebene, nämlich der Translationsebene T verläuft und auf allen Flächen erscheint mit Ausnahme derer aus der Zone der Translationsrichtung t, derart, daß T und t bei gut ausgebildeter Streifung direct zu ermitteln sind. Weiter unterscheidet sie von der Combinationsstreifung, daß sie über die Unebenheiten der Flächen gleichmäßig hinweggeht und etwaige Combinationsstreifung ungehindert durch-

Digitized by Google

kreuzt, daß sie auch auf Abdruck- und Absonderungsflächen sich einstellt. Sie ähnelt also Zwillingsstreifung, ist aber meist erheblich feiner als diese, auch erscheinen in ihr niemals Flächenelemente mit bestimmten, scharf einstellbaren Reflexen, sondern stets nur breite durch Beugung entstehende Reflexbänder, sie fehlt auch im Allgemeinen frischen Spaltungsflächen; endlich ergiebt etwaige physikalische Untersuchung, daß die durch die Streifen angedeuteten Lamellen unter einander und mit dem Haupttheil gleich, nicht symmetrisch in Bezug auf die Fläche *T* orientirt sind.

Die Streifung wird grade bei denjenigen (natürlichen) Krystallen als Merkmal für Translation am ehesten unbrauchbar, welche Translation leicht eingehen, oder wegen der Art ihres Vorkommens sehr erhebliche Pressungen erfahren haben, denn in diesen Fällen pflegen die Flächen außerhalb der Zone *t* durch die Stärke der Translation und die gleichzeitig meist eingetretenen Biegungen vollständig zerstört zu sein. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß eine Reihe von Mineralien grade aus dieser Ursache überhaupt selten und in gefalteten Gesteinen fast nie mit deutlichen Endflächen angetroffen werden (Cyanit, Glimmer und Verwandte, Graphit, Molybdänglanz, Brucit, Diallag, Bronzite, Anhydrit u. a.) In diesen Fällen ist also zunächst nur *t* als die Zonenaxe der gut erhaltenen, von Translationsstreifen freien Flächen zu bestimmen.

Bei jenen Mineralien, wo *T* mehrere gleichwerthige Richtungen *t* enthalten muß, ist es nicht immer gelungen diese mit Sicherheit zu ermitteln. Es scheint, daß in solchen Fällen Translation nach allen Richtungen in *T*, wenn auch mit ungleicher Leichtigkeit vor sich gehen kann. (Eis, Graphit, Molybdänglanz, Brucit, Bleiglanz, Steinsalz, Sylvin; ebenso die pseudohexagonalen Glimmer). Da in den genannten regulären Substanzen stets auch mehrere gleichwerthige Ebenen *T* vorhanden sind, ist reine Translation hier besonders schwierig hervorzurufen, weil der Druck in einer Richtung *t* in *T* fast stets gleichzeitig Biegungen um die Richtung *f* (senkrecht *t* in *T*) in anderen Ebenen *T* bewirken wird, welche die Translation in der ersten stören.

Diese Biegungen (Knickungen und Fältelungen) pflegen, wenn Translationsstreifung fehlt, häufig *T* und *t* zu verrathen. Sie erfolgen stets um eine (im Allgemeinen irrationale) Richtung *f*, welche senkrecht *t* in *T* liegt. *T* ist daher am stärksten, und zwar cylindrisch gekrümmt, die andern Flächen aus der Zone *t* conisch. Da Dichtigkeitsänderungen bei der Biegung ausgeschlossen sind, ebenso Verzerrungen und Abstandsänderungen in *T*, so müssen alle Biegungen, Knickungen und Fältelungen um *f* so erfolgen,

Digitized by Google

daß die Dicke der Krystalle, gemessen $\perp T$ überall die ursprüngliche bleibt. Falls also die Knickflächen eben sind, werden T und t im ursprünglichen und geknickten Theil des Krystalls symmetrisch zu ihr liegen müssen. Derartige nach derselben Ebene vielfach geknickte Krystalle ähneln daher in etwas polysynthetischen Zwillingen und sind auch für solche gehalten, wobei denn, da die Lage der Knickfläche wenig constant zu sein pflegt, Zwillingsbildung meist nach mehreren verschiedenen Flächen aus der Zone f angenommen wurde. Am Cyanit ließ sich durch optische Untersuchung feststellen, daß die Streifen $\parallel \{001\}$ keine Zwillingslamellen sind, meist aber ist eine Unterscheidung von Zwillingsverwachsungen optisch nicht möglich und vielfach überhaupt eine anderweitige physikalische Untersuchung nicht auszuführen, da den Lamellen dazu geeignete Flächen meist fehlen. Dann helfen öfter geometrische, z. Th. allerdings nur habituelle Merkmale. Die scheinbare Zwillingsebene wird im Allgemeinen keine einfachen rationalen und zugleich wechselnde Indices haben; characteristisch sind ferner das Vorhandensein keilförmiger Krystalltheile zwischen scheinbaren Lamellen nach zwei Flächen der Zone f, die verhältnißmäßig große Breite der Lamellen, die Seltenheit regelmäßiger Durchkreuzung derselben, das Vorkommen cylindrisch gekrümmter Flächentheile von T zwischen ihnen neben scharf geknickten. Danach ließ sich mit ziemlicher Sicherheit schließen, daß auch die angeblichen Lamellen des Cyanit nach $\{\bar{3}08\}$ keine Zwillingslamellen sind, ebenso der Glimmer nach Flächen der Zonen $(h0l)$ und $\{h \cdot 3h \cdot l\}$, des Brombaryums nach $\{\bar{1}01\}$, des Graphit nach $\{10\bar{1}1\}$ und $\{10\bar{1}2\}$, des Baryt nach $\{901\}$ und vermuthlich andere mehr.

Da die Grenzflächen der gebogenen und geknickten Theile nur der oben genannten Bedingung unterliegen, so können sehr mannichfaltige Bildungen entstehen, zumal nicht nur Unstetigkeiten (nämlich Knicke), sondern auch Inhomogenitäten vielfach vorkommen. Die Vertheilung der Druckkräfte auf dem Querschnitt senkrecht t, die Widerstände der den Krystall an verschiedenen Stellen umgebenden Medien und die von beiden abhängige wechselnde Stärke des Zusammenschubes $\parallel t$, ferner das Fehlen oder Vorhandensein von Spaltrissen, Einschlüssen und anderen Inhomogenitäten, namentlich längs Flächen der Zone f, werden hier von großem Einfluß sein. Die bei der ungleichen Biegung von Theilen desselben Krystalls entstehenden, meist nach f gestreckten Hohlräume und Infiltrationen in dieselben dürften dabei die Ursache eines besonderen Habitus mancher gepreßten Minerale sein. (Theilbarkeit

Digitized by Google

nach {100} und Schiller des Diallag, ebenso der Bronzite, Asterismus der Glimmer.)

Die aus den beobachteten Streifungen, Biegungen u. s. w. gezogenen Schlüsse über die Lage von t und T sind in einer ganzen Reihe von Fällen durch das Experiment bestätigt. Am Cyanit, Lorandit, Gyps, Vivianit, Kobaltblüte, Anhydrit, Bleiglanz, Steinsalz und Sylvin ist es, wie früher am Kaliummanganchlorür, Brombaryum und Eis, gelungen bloße Translation durch Druck hervorzurufen, und T und t sicher zu bestimmen. Bei allen diesen erwies sich zugleich die aus T und t geforderte Richtung f als eine Axe leichtester Krümmung. Am Antimonglanz und Verwandten, den Glimmern, Graphit, Brucit und Kalkspath waren dagegen nur Krümmungen, z. Th. mit, z. Th. ohne sicher nachweisbare Translation möglich.

Bei den bekannten Schlag- und Druckfiguren einiger Mineralien sind meist nicht nur Translations- sondern auch Spalt- und andere Flächen mit im Spiel. Die Druckfiguren am Bleiglanz und Glimmer beruhen auf Biegung um die Richtung f unter Translation längs der gepreßten Spaltfläche, nicht längs den bisher an diesen Mineralien als „Gleitflächen" angesprochenen Ebenen {110}, bez. $\{h \cdot 3h \cdot l\}$ und $\{h0l\}$. Diese Biegungen ziehen am Bleiglanz absonderlich angeordnete Translationsstreifen nach sich, deren Reflexbilder auch geringfügige Eigenthümlichkeiten der Biegungsfigur aus der Translation zu erklären gestatten. Bei den Glimmern erfolgen die Biegungen derart, daß man aus ihnen direct, auch ohne optische Untersuchung, auf die nicht rhombische Symmetrie der Mineralien dieser Gruppe schließen und die positiven und negativen sog. Hemi-Orthodomen von einander unterscheiden kann. Man erhält als „Biegungs-Figuren" nämlich nahezu gleichseitig-dreieckige Vertiefungen, welche auf derselben Platte überall die gleiche Orientirung haben, gleichgültig ob der Druck von der Ober- oder Unterseite der Platte kommt. Die Schlagfiguren entstehen aus ihnen durch Zerreißen der (nach der optischen Untersuchung erheblich gespannten) Lagen $\parallel \{001\}$ nach den Höhenlinien jener Dreiecke; die Druckfiguren entsprechen Trennungen nach den Knickungsflächen aus der Zone f. Die Weiß'sche Schlagfigur am Bleiglanz beruht ebenfalls auf Translation (und Biegung), aber nicht längs der angeschlagenen sondern längs der beiden dazu senkrechten Spaltflächen. In den Schlagfiguren des Steinsalzes auf den Spaltflächen kommen neben den Translations-, namentlich auch jene Ebenen zur Geltung, nach welchen die gebogenen Partien in Folge der Concurrenz der Biegung gleichzeitig um mehrere Rich-

Digitized by Google

tungen f (ähnlich wie bei den Glimmern) aufreißen (Reißflächen). Die Orientirung der Schlagfiguren auf den Spaltflächen von Kalkspath und Natronsalpeter gegenüber der Polecke, am Steinsalz und Sylvin gegenüber den anderen Spaltflächen findet durch die Lage der Translationsebene zur Schlagrichtung ihre Erklärung.

Der Gegensatz zwischen fasrigen und muschligen Bruchflächen ist bisher fast nur für den Gyps als characteristisch hervorgehoben und meist dadurch erklärt, daß die fasrige Beschaffenheit durch oscillatorische Combination der beiden Spaltflächen $(\bar{1}11)$ und $(\bar{1}\bar{1}1)$ unter einander und mit (010) zu Stande komme, die muschlige durch die Lage nur der einen Spaltfläche {100} senkrecht zu {010} bedingt sei. Indessen zeigt sich derselbe Unterschied am Antimonglanz, wo die Spaltflächen {100} und {110} trotz der höchst vollkommenen Spaltung nach {010} muschlig, {101} und {001} fasrig sind; ähnlich bei andern Substanzen, wo die obige Erklärung auch nicht zutreffen würde. Aus der Translationsfähigkeit und leichten Biegsamkeit ergiebt sich aber von selbst, daß Spaltflächen aus der Zone t die gewöhnliche, d. h. etwas muschlige, Oberfläche haben werden, alle andern dagegen fasrige Beschaffenheit, wie das z. B. für die Bruchflächen annähernd senkrecht t am Gyps, am Cyanit für {001} und alle Flächen $\{h0l\}$, am Glimmer für alle Flächen außer {001} zutrifft.

Die Ritzbarkeit ist in T im Allgemeinen für die Richtungen t und f sehr verschieden und stets von demselben Character; mit der Nadel erhält man $\| f$ wenig oder gar kein Pulver, sie dringt, wenn überhaupt, geräuschlos wie in geschmeidiges Metall oder Wachs ein, die Ritzfigur ist ein einfacher Strich. Parallel t erhält man viel Pulver, die Nadel „kratzt“ und man würde geneigt sein, die Härte im Mohs'schen Sinne, hier geringer zu nennen; die Ritzfiguren sind complicirt, sie entstehen durch das Abbrechen los gerissener und um f gebogener Theilchen nach Flächen aus der Zone f und untergeordneten Spaltflächen, welche die Form in characteristischer Weise beeinflussen (Kaliummanganchlorür, Cyanit, Augit, Lorandit, Vivianit und Verwandte, Antimonglanz und Verwandte, Anhydrit). Am Diopsid ließ sich in {100} für die Richtung der Axe $\dot{c}$ eine bedeutende Verschiedenheit der Ritzbarkeit für Richtung und Gegenrichtung nachweisen, welche geeignet ist, auch bei pseudosymmetrischer Ausbildung (z. B. Krystalle von Nordmarken) oder Zwillingsbildung noch {100} (stänglige Massen vom Pfitschthal) die Orientirung unabhängig von der optischen Untersuchung und etwa vorhandenen Gleitflächen nach {001} vorzunehmen.

Digitized by Google

In den Fällen wo Translationen nach mehreren Richtungen derselben Ebene stattfinden können, sind die Unterschiede der Ritzbarkeit in T meist wenig ausgeprägt (Gyps, Glimmer, Eis, Graphit, Brucit, Bleiglanz, Steinsalz).

Unelastische Torsionen um eine Richtung in T wurden bereits am Eis, aber wenig deutlich, weil begleitet von Biegungen, beobachtet; nunmehr sind solche Torsionen, und zwar um eine Axe $\| t$, auch an folgenden Substanzen nachgewiesen: Kaliummanganchlorür, Cyanit, Gyps, Kobaltblüte und Vivianit, Brombaryum, Antimonglanz; während am Brucit und den Glimmern nur festzustellen war, daß solche Torsionen um Richtungen in T stattfinden können [1]). Daß diese Torsionen von Translation $\| t$ begleitet werden, ist am Cyanit, Gyps und Antimonglanz mit Sicherheit aus der Streifung der Endflächen zu erkennen, ebenso, daß der Betrag der Translation jetzt nicht mehr, wie bei Krümmungen um f für alle Reihen t in derselben Ebene T der gleiche ist. Denn senkrecht t am Cyanit angeschliffene Flächen und die natürlichen Endflächen $\{\bar{1}11\}$ am Gyps werden dabei nicht mehr zu cylindrisch, sondern zu doppelt gekrümmten Scheinflächen; ihr ursprünglich einfacher Reflex wird nicht nur in ein langes Band in der Zone zu T ausgezogen, sondern gleichzeitig um das 4—6fache in der Richtung senkrecht zur Zone zu T verbreitert. Die Art der Krümmung $\perp t$ angeschliffener Flächen lassen die bisher erhaltenen Präparate nicht hinreichend sicher erkennen.

Wie die Uebersichtstabelle zeigt, scheint die Biegsamkeit um f durch vollkommene Spaltung nach T begünstigt zu werden, ebenso die Torsion um t durch Spaltung nach mehreren Ebenen aus der Zone t. In der That scheint solche ja geeignet, einen Zerfall des Krystalls in unabhängig von einander sich bewegenden Schichten parallel T, bez. Fäden $\| t$ zu erleichtern.

Die Translationsfähigkeit wird offenbar in hohem Grade die Plasticität der Krystalle beeinflussen, wenn sie nicht die wesentlichste Ursache derselben ist. Jedenfalls wird auch die Plasticität von der Druckrichtung abhängig sein, sodaß derselbe Krystall sich in der einen Richtung noch plastisch, in der andern als spröd er, weisen kann. Bei weiteren Untersuchungen über die absolute Härte der Krystalle wären daher namentlich Versuche an Platten $\| T$-$\perp t$ und $\perp f$ von Interesse. —

---

1) Die Torsionsfähigkeit ist bei feinen Fäden von Brucit (Nemalith) und Glimmer außerordentlich groß; sie beträgt in einigen Präparaten 360° auf $^1/_4$ mm Länge.

Digitized by Google

Die Umstände unter welchen manche Gesteinsbildende Minerale in der Erdkruste Pressungen ausgesetzt werden, nämlich allmähliges Anwachsen des Druckes, gleichmäßige Vertheilung desselben, Einschluß in widerstandsfähige Medien, die Kleinheit der Krystalle etc. sind für die Erzielung von Translationen und Biegungen offenbar viel günstiger als die im Laboratorium. Es ist daher zu erwarten, daß Translationen und Biegungen auch bei der Faltung der Gesteine eine erhebliche, wenn auch nur gelegentlich in die Augen fallende Bedeutung haben werden. Die Annahme einer bruchlosen Umformungsfähigkeit der Gesteine ist allerdings mit Recht aufgegeben, indessen zeigen die mikroskopischen Beobachtungen doch nicht selten, daß die Umformung durch bruchlose Biegungen, wie sie durch Translation erklärlich werden, unterstützt wird. Die ausgezeichnetsten Vertreter plastischer Krystalle sind allerdings, wie es scheint, unter den Producten der Laboratorien zu suchen.

Königsberg i. Pr. 11. April 1897.

Digitized by Google

Uebersichtstabelle.

	Translations-Ebene T	Translations-Richtung t	Fältelungsrichtung f	Torsionsaxe	Spaltflächen	Angebliche und nachgewiesene Zwillingsflächen der Zone f
Kalium-Manganchlorür	$\{010\}$	[101]	$\lambda = \perp t$ in T	[101]	$\{010\}$	Lamellen der Deformation δ?
Cyanit	$\{100\}$	[001]	$\perp t$ in T (ca [010])	[001]	$\{100\}\cdot\{010\}$ $\{001\}\cdot\{0\bar{1}1\}$	$\{100\}\cdot\{001\}\cdot\{\bar{3}08\}$ (ca)
Brombaryum	$\{100\}$	[001]	[010]	[001]	$\{001\}\cdot\{100\}$(?)	$\{100\}\cdot\{001\}\cdot\{\bar{1}01\}$
Augite	?$\{100\}$	?[001]	[010]		$\{110\}\cdot\{010\}$	$\{100\}\cdot\{001\}$
Lorandit	$\{10\bar{1}\}$	$\{010\}$	[101]		$\{10\bar{1}\}.\{100\}\cdot\{101\}$	
Miargyrit	?$\{100\}$	? [010]				
Gyps	$\{010\}$	[001] u. ?[301]	$\perp t$ in T; [$\bar{1}01$] u. $\perp$ [$\bar{1}01$]?	[001]	$\{010\}\cdot\{100\}.\{\bar{1}11\}$	
Vivianit und Kobaltblüte	$\{010\}$	[001]	$\perp t$ in T	[001]	$\{010\}\cdot\{100\}\cdot$?$\{\bar{1}01\}$	
Glimmer	$\{001\}$	?[100] u. ?[110]	[010] u. [130](ca)	$\parallel f$	$\{010\}\cdot\{hol\}\cdot\{hhl\}$ $\{h\cdot 3h\cdot l\}\cdot\{010\}$	Angeblich mehrere Flächen
Wolframit	?$\{010\}\cdot\{100\}$				$\{010\}$	
Wismuthglanz u. Auripigment	$\{010\}$	[001]	[100]		$\{010\}\cdot\{110\}\cdot\{100\}$ $\{001\}$	
Antimonglanz	$\{010\}$	[001]	[100]	[001]	$\{010\}\cdot\{110\}$ $\{100\}\cdot\{001\}\cdot\{101\}$	
Anhydrit	$\{010\}$	[100]	[001]		$\{010\}\cdot\{100\}\cdot\{001\}$	$\{120\}$
Bronzite	$\{010\}$?	[001]?	[100]		$\{010\}\cdot\{110\}\cdot\{100\}$	$\{014\}$
Columbit	$\{010\}$	[101]?	$\perp$ [101] in $\{010\}$?		$\{010\}\cdot\{100\}$	
Baryt	?$\{001\}$	?$\{100\}$	?[010]		$\{001\}\cdot\{110\}\cdot\{010\}$	$\{901\}\cdot\{601\}$
Eis	$\{0001\}$		in $\{0001\}$	in $\{0001\}$	$\{0001\}$?	
Graphit (u. Molybdänglanz)	?$\{0001\}$		[01$\bar{1}$0]		$\{0001\}$	$\{10\bar{1}1\}\cdot\{10\bar{1}2\}$
Brucit	?$\{0001\}$		in $\{0001\}$	in $\{0001\}$	$\{0001\}$	
Kalkspath	$\{01\bar{1}2\}$	entgegen d. Gleitrichtg.?	in T $\parallel\{0001\}$		$\{10\bar{1}1\}$	$\{0\bar{1}12\}.\{10\bar{1}1\}$ $\{02\bar{2}1\}$ $\{0001\}$
Bleiglanz	$\{001\}$	[1$\bar{1}$0]	[110]		$\{001\}$	$\{111\}\cdot\{113\}\cdot\{441\}$
Steinsalz und Sylvin	$\{110\}$	[1$\bar{1}$0]	[001]		$\{001\}\cdot$?$\{110\}$	
Salmiak	?$\{001\}$					

Digitized by Google

Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie.

Von

J. R. Schütz.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 20. Februar.

Einleitende Uebersicht.

Die allgemeine Grundlage der Mechanik hat Newton hingestellt. Er hat sie in der Form dreier Axiome gefordert: der lex prima, welche das Galileische Trägheitsgesetz ist; der lex secunda oder der sogenannten Newton'schen Bewegungsgleichungen; und der lex tertia, des Gegenwirkungsprinzips. Man bezeichnet seither ein physikalisches System als mechanisch zulässig, wenn es diesen 3 Gesetzen entspricht, als unzulässig aber, wenn es mindestens einem derselben widerspricht[1]).

Seitdem die Aufgaben der Physik über jene der Himmelsmechanik hinausgewachsen sind, hat man die Form der Newtonschen Grundlage oft als unpraktisch empfunden. Denn in den wenigsten Fällen allgemeinerer physikalischer Systeme ist man in der Lage, auf die Axiome des Newton zurückzugehen: sei es, daß es in vielen Fällen an einem mechanischen Bilde überhaupt fehlt,

1) Newton wollte diese allgemeinen Forderungen streng getrennt wissen von seinen spezielleren Hypothesen, zu welch letzteren er sein Gravitationsgesetz (auch die These, daß die Naturkräfte Centralkräfte seien) gerechnet hat, und er hat hier eine glänzende Vorurtheilslosigkeit des Blickes bewahrt; in der That, während die Ueberzeugung in die Strenge des Gravitationsgesetzes merklich zu wanken beginnt (Seeliger, Utrechter Astronomenkongreß 1894), ist jene von Newton ehern aufgestellte allgemeine Grundlage so unerschüttert geblieben, daß Lord Kelvin von ihr sogar gesagt hat, sie sei überhaupt die bestmögliche.

Digitized by Google

sei es, daß das mechanische Bild nicht individuell genug ist, um ein Zurückgehen auf diese Differenzialansätze noch als zweckgemäß erscheinen zu lassen; als klassisches Beispiel für den letzteren Fall nenne ich die Systeme der Gastheorie, als Beispiel für ersteren die elektrodynamischen Systeme. Man hat sich da daran gewöhnt, die Erfüllung der beiden Integralprinzipien der Energie und der Gegenwirkung als das Kriterium allgemeiner mechanischer Zulässigkeit anzusehen, auch ohne daß über die Wesensgleichheit dieser Grundlage mit den Newton'schen Axiomen eine genaue Rechenschaft vorlag.

Die Aufgabe, die sich die nachfolgende Arbeit stellt, ist eine doppelte. Erstens will sie das Energieprinzip so aussprechen, daß es das Gegenwirkungsprinzip mit in sich umfaßt. Zweitens will sie zeigen, daß das so vereinigte Energie- und Gegenwirkungsprinzip die Mechanik genau so allgemein zu begründen vermag, wie die Newton'schen Axiome; hiezu wird sie in der anschaulichen Form von elementaren Beispielen die Newton'schen Axiome aus jenem Prinzipe herleiten.

Die Elementarform des gewöhnlichen Energieprinzips hat man in der Gleichung 5 des § 5. Aus dieser Elementarform entspringt die gebräuchlichere Form der Gleichung 9 des § 6 bekanntlich durch die Substitution einer Arbeitsfunktion U, welche die von den inneren Kräften des Systems geleistete Arbeit ausdrückt, ohne — was wesentlich ist — den Kraftbegriff in Anspruch zu nehmen. Natürlich bewahrt eine solche Substitution nur dann einen formalen Sinn, wenn mindestens zwei Körper vorhanden sind; da ja sonst weder von inneren Kräften noch von einer Konfiguration des Systems die Rede sein kann. Beide Formen kombinirt man zur Gleichung 9′ des § 6, wann es zweckmäßig ist, zwischen äußeren und inneren Kräften zu unterscheiden.

Aus der Form 9 entspringt das Gegenwirkungsprinzip für die inneren Kräfte. Durch dasselbe Schlußverfahren entspringen aus Form 5 die Bewegungsgleichungen für die äußeren Kräfte; selbstredend wird jede innere Kraft sofort zu einer äußeren Kraft, wenn man das Augenmerk nur auf einen einzigen Körper des Systems richtet.

Man kann also die im Art. 29 hingestellte Elementarform des Prinzips der absoluten[1]) Erhaltung der

1) Das Beiwort absolut möchte vornehmlich ausdrücken, daß die Auffassung des Energieprinzips losgelöst und unabhängig sein wolle von einer gewissen Willkür und Unbestimmtheit (vgl. Mach, Die Wurzel und die Ge-

Digitized by Google

Energie geradezu als die Definitionsgleichung der Kräfte ansehen. Daß diese eine Gleichung zur Definition der drei Kräfte zureicht, lehrt der Erfolg. Freilich geht in diese Definitionsgleichung noch die Masse ein, zu deren Begriffsbestimmung man sonst wieder des Kraftbegriffes bedarf; allein die Festlegung des Massenbegriffs, unabhängig vom Kraftbegriff, sehen wir im Gegenwirkungsprinzip, das hier unabhängig vom Kraftbegriff gewonnen ist. Diese letztere Bemerkung erledigt nebenbei eine begriffliche Schwierigkeit, welche, was Ernst Mach wiederholt nachdrücklich hervorgehoben hat, in dem Ansatze der Newton'schen Axiome besteht.

§ 1.

1. Sicher ist, daß das Energieprinzip für sich allein zur Grundlegung der Mechanik nicht zureicht: vielmehr muß zu demselben jedenfalls noch das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung als Ergänzung hinzutreten; man kann ja Systeme angeben, in welchen das Energieprinzip streng gewahrt ist, und die dennoch physikalisch unzulässig sind; (indem sie das Gegenwirkungsprinzip verletzen; es wird die Absicht des § 7 sein, das einfachste Beispiel eines solchen Systems zu behandeln).

So scheinen das Energieprinzip und das Gegenwirkungsprinzip eine weitgehende Unabhängigkeit von einander zu bewahren.

2. Andererseits aber hat man niemals zu vermuthen aufgehört, daß die beiden Prinzipien einen starken inneren Zusammenhang besitzen. Bezeichnend hierfür möchte sein können, daß das Wort causa aequat effectum ebensowohl zu dem einen wie zum anderen Prinzip in Beziehung gebracht worden ist.

3. Auch wird sicherlich gegenwärtig[1]) das Energieprinzip als das stärkere von beiden wertgeschätzt; das Gegenwirkungsprinzip läuft neben ihm einher, zum Theil von ihm unabhängig, zum Theil abhängig: eben dieses wenig bestimmte Verhältnis bedingt eine Unreinlichkeit in den Grundlagen einer auf das Energieprinzip gestellten Mechanik, während es nebenbei auch noch die Einheit darin stört.

---

schichte des Satzes von der Erhaltung der Arbeit, Prag 1872, Seite 47 ff.) bei der Beurtheilung der Geschwindigkeiten der bewegten Körper oder, was dasselbe ist, bei der Festsetzung des physikalischen Coordinatenanfangspunktes.

1) Während man wohl in früherer Zeit das Gegenwirkungsprinzip, weil es den Astronomen acht Integrale in die Bewegungsgleichungen liefert, sichtlich höher geschätzt hat als das Energieprinzip, welches nur ein einziges Integral abgibt.

Digitized by Google

4. Solche Erwägungen drängen zu der folgenden Fragestellung: Ob es gelänge, das Energieprinzip so auszusprechen, daß es zugleich die Aussagen des Gegenwirkungsprinzips in sich berge.

Gelingt dies, so wird man erwarten dürfen, in dem so ausgesprochenen Energieprinzip eine nothwendige und zureichende Grundlage der Mechanik gewonnen zu haben. Man wird also dann z. B., um etwa zu entscheiden, ob ein in seinen Bewegungen in integraler Form beschriebenes System physikalisch anstößig oder ob es zulässig ist, es lediglich auf seine Uebereinstimmung mit diesem einzigen Prinzipe zu prüfen haben.

5. Will aber eben dieses Energieprinzip wirklich so universell sein, so müsste es insbesonders auch befähigt sein, Newtons lex secunda, welche man schlechthin als die Newton'schen Bewegungsgleichungen zu bezeichnen pflegt, zu liefern; diese Bemerkung trifft jenes speziellere Problem[1]), welches auf der Lübecker Naturforscherversammlung in der Debatte über die Grundlagen der Energielehre zur lebhaften Erörterung stand, ohne er-

---

1) Ueber die Literatur dieses letzteren Problems, welches sich zuerst vor 10 Jahren Max Planck und Georg Helm fast gleichzeitig vorgelegt haben, vergleiche man Helms ausführliches Referat an die Lübecker Naturforscherversammlung (1895); dazu die kritische Würdigung durch Boltzmann (ein Wort der Mathematik an die Energetik, Wiedem. Annal. Januar 1896). Unwidersprochen blieb Plancks Deduktionsweise; (abgesehen von Einwänden, die sich Planck selbst schon gemacht hat); ich will dazu auch nur bemerken, daß Planck's Superpositionsprinzip (Göttinger Bencke-Preisschrift über das Prinzip der Erhaltung der Energie 1887, S. 146), angewandt auf rein mechanische Systeme, die Zertrennung der potentiellen Energie, also eines Skalars, in 3 selbständige, nach Raum-Richtungen geschätzte Theile fordert; was in der mathematischen Physik sonst ohne Vorbild ist; in der That, da diese Theile einzeln aufhören vollständige Differentiale zu sein, so ist hier das Superpositionsprinzip in keinem einzigen Beispiele (eines mechanischen Systems mit willkürlichen Anfangsbedingungen) einer integralen Aussage fähig. Durch diese Bemerkung will die hohe prinzipielle Bedeutung des allgemeiner aufgefaßten Superpositionsprinzips (Planck, l. c. S. 127) nicht berührt sein. In unserer Fragestellung ist nicht die lex secunda (die Bewegungsgleichungen) des Newton, sondern dessen lex tertia (das Gegenwirkungsprinzip) als das Ziel hingestellt, welches vom Energieprinzip aus zu erstreben ist. Auf dem Wege dahin müssen sich dann nebenbei die Newton'schen Bewegungsgleichungen von selbst vorfinden; dies erscheint nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, daß die Prinzipien der Energie und der Gegenwirkung einander ergänzen, daß dagegen durch das Energieprinzip zusammengenommen mit den Newton'schen Bewegungsgleichungen in der Mechanik prinzipiell unmöglich mehr geleistet werden kann, als durch die letzteren für sich allein; da ja aus ihnen das erstere herleitbar ist.

Digitized by Google

ledigt worden zu sein; man wird, hoffe ich, im § 5 eine befriedigende Lösung desselben sehen.

§ 2.

6. Die im Artikel 4 hingestellte Frage findet unmittelbar ihre Lösung, wenn man dem Energieprinzip die Erklärung hinzufügt: daß es für ein materielles System auch dann noch Geltung behalten soll, wenn man annimmt, daß dieses System eine konstante fortschreitende Bewegung relativ zum geometrischen Raume besitze.

7. Allgemeiner zu reden, wird man diese Erklärung lieber so aussprechen wollen: daß das Energieprinzip Geltung besitze, unabhängig von einer constanten fortschreitenden Bewegung unserer materiellen Welt relativ zum geometrischen Raume[1]).

8. Sofern wir uns beim Aussprechen des Energieprinzips dieser Erklärung ausdrücklich erinnern wollen, soll hier vom Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie die Rede sein.

9. Ich wünsche sehr, daß es mir gelingen wolle, an einigen sofort zu entwickelnden elementaren Beispielen dieses Prinzip analytisch zu verdeutlichen und den Bereich seiner Tragweite zur Evidenz zu bringen.

§ 3.

10. Man darf Werth darauf legen, daß die Wege, welche wir in den folgenden §§ einschlagen wollen, so wenig verwickelt sind, daß sie schon auf der elementarsten Stufe des Physik-Unterrichts mit Nutzen betreten werden können. Es soll dies vorweg an dem denkbar einfachsten Beispiele demonstrirt werden, der Erscheinung des centralen Stoßes zweier vollkommen elastischer und als materielle Punkte vorgestellter Kugeln.

11. m_1 und m_2 seien die Massen der Kugeln; w_1 und w_2 deren Geschwindigkeiten vor dem Stoße; ω_1 und ω_2 die Geschwindigkeiten nach dem Stoße. Die Darstellung der Stoßwirkung wird geleistet durch die Gleichungen

---

1) Oder auch, was dasselbe ist, daß das Energieprinzip Geltung besitze unabhängig von einer constanten Bewegung des Coordinatenanfangspunkts relativ zum physikalischen Raume

Digitized by Google

1) $$\frac{m_1}{2} w_1^2 + \frac{m_2}{2} w_2^2 = \frac{m_1}{2} \omega_1^2 + \frac{m_2}{2} \omega_2^2,$$

2) $$m_1 w_1 + m_2 w_2 = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

aus denen sich die beiden Unbekannten ω_1 und ω_2 berechnen lassen.

12. Gleichung 1 ist der Ausdruck des Energieprinzips, Gleichung 2 der Ausdruck des Gegenwirkungsprinzips, welches hier als das Gesetz der Erhaltung der Bewegungsgrößen (Impulse) angesprochen zu werden pflegt. Hier ist also unsere Aufgabe, zu zeigen, daß sich aus der Erkenntnis der ersten Gleichung ohne Zuhilfenahme neuer Hypothesen die Erkenntnis der zweiten Gleichung schöpfen lasse.

13. Hiezu nehmen wir an, ein Physiker, so naiv vorgestellt, daß er von allen übrigen Prinzipien der Mechanik nicht die geringste Ahnung habe, während er sich nur im gesicherten Besitze des Prinzips der Erhaltung der lebendigen Kraft fühlen soll, beobachte das Stoßexperiment im Innern eines gleichmäßig [1]) dahinsegelnden Schiffes; (die Längsrichtung des Schiffes möge die Bewegungsrichtung der Kugeln sein); er macht den einzigen Ansatz, dessen er fähig ist:

1) $$\frac{m_1}{2} w_1^2 + \frac{m_2}{2} w_2^2 = \frac{m_1}{2} \omega_1^2 + \frac{m_2}{2} \omega_2^2.$$

Aus diesem Ansatz vermag er natürlich ω_1 und ω_2 noch nicht zu berechnen.

14. Nunmehr erinnere er sich aber der Willkür, deren er sich bei diesem Ansatze in der Festsetzung der Geschwindigkeiten der Kugeln schuldig machte. In der That, sei α die — übrigens unbekannte — Fahrgeschwindigkeit des Schiffes, so ist genau ebenso berechtigt der Ansatz

1a) $$\frac{m_1}{2} \left(w_1 + \alpha\right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(w_2 + \alpha\right)^2 = \frac{m_1}{2} \left(\omega_1 + \alpha\right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\omega_2 + \alpha\right)^2.$$

15. Indem er diese beiden völlig gleichberechtigten Ansätze für sein Energieprinzip von einander subtrahirt, erhält er die neue Gleichung

2a) $$m_1 w_1 \alpha + m_2 w_2 \alpha = m_1 \omega_1 \alpha + m_2 \omega_2 \alpha.$$

---

1) Man wird bemerken, daß diese Einschränkung hier übrigens nicht nothwendig ist.

Digitized by Google

Die vorübergehend eingeführte Unbekannte α fällt heraus, und es fließt unserem Physiker unmittelbar das Princip der Erhaltung der Bewegungsimpulse in der Gleichung zu

2) $$m_1 w_1 + m_2 w_2 = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 .$$

So, jetzt vermag er ω_1 und ω_2 zu berechnen. Er hat also aus der Gleichung 1 lediglich dadurch, daß er an deren physikalische Aussage strenge Kritik anlegte, eine neue von ihr völlig unabhängige Gleichung schöpfen können.

16. Uebrigens muß es natürlich jedem Physiker, der seine mechanischen Prinzipien auf irdische materielle Systeme bezieht, gestattet sein, sich — etwa in Ansehung einer Eigenbewegung des Sonnensystems oder gar des ganzen Sternenhimmels im Raume — ganz in der Lage des soeben vorgestellten zu fühlen.

§ 4.

17. Anschaulich und allgemein zu reden, nehmen wir für den Augenblick die Hilfsvorstellung an, als bestünde die Außenwelt aus zwei in einander geschachtelten Räumen: einem Raume, darin wir Materielles voraussetzen und den wir als den physikalischen Raum bezeichnen wollen; und einem zweiten leer gedachten Raume, den wir den geometrischen Raum nennen.

18. Den physikalischen Raum setzen wir bei jedem vorgegebenen Probleme mindestens so groß an, daß er jedenfalls die materiellen Träger aller inneren und äußeren Kräfte in sich umfaßt, die dabei ins analytische Spiel treten.

So z. B. genügte es für das soeben durchgeführte elementare Problem, den physikalischen Raum durch ein Segelschiff zu begrenzen; für feinere Probleme wird man den physikalischen Raum so groß nehmen wollen, daß er etwa unser Sonnensystem umfaßt; wer ein Uebriges thun und sich für alle Fälle vorsehen will, darf, wie es hier geschehen soll, ihn so geräumig voraussetzen, daß etwa das ganze Milchstraßensystem und einige benachbarte Nebelflecke dazu darin Platz finden.

19. Immer lassen wir, in unserer Idee wenigstens, den physikalischen Raum sich mit den gleichförmigen — übrigens unbekannt bleibenden — Geschwindigkeiten α, β, γ durch den geometrischen Raum bewegen.

20. Und wir fordern, daß die mechanischen Prinzipien, welche die Bewegungen der materiellen Systeme bestimmen, nicht nur Geltung haben, wenn wir diese Bewegungen subjektiv abschätzen

Digitized by Google

in Bezug auf den physikalischen Raum, sondern auch Geltung behalten, wenn wir sie in objektiverer Weise abschätzen in Bezug auf den geometrischen Raum.

21. Und wir zeigen, daß in dieser objektiveren Auffassung das Energieprinzip für sich allein gerade zureicht, die Newton'sche Mechanik zu fundiren.

22. Genauer gesprochen, wählen wir im physikalischen Raume einen hiezu geeigneten Punkt Alpha[1]) als Coordinatenanfangspunkt. Jenen Punkt des geometrischen Raumes, welchen der Punkt Alpha zur Zeit $t = 0$ deckte, nennen wir Omega; er sei für uns der Coordinatenanfangspunkt im geometrischen Raume.

23. Wenn wir die Geschwindigkeiten eines Massenpunktes m in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt Alpha abschätzen, seien sie u, v, w genannt; sie sind alsdann, abgeschätzt in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt Omega, gleich

$$3) \qquad u+\alpha,\ v+\beta,\ w+\gamma.$$

24. Die Coordinaten des Punktes m selbst, u. zw. zur Zeit t, seien in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt Alpha x, y, z; sie sind alsdann in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt Omega

$$4) \qquad x+\alpha t,\ y+\beta t,\ z+\gamma t.$$

25. Dagegen sollen die Kräfte X_{ik}, Y_{ik}, Z_{ik}, welche etwa die Massenelemente m_i und m_k auf einander ausüben, nicht geändert sein durch die vorgestellte Bewegung des gesammten geometrischen Raumes durch den physikalischen Raum.

Solche Kräfte wollen wir natürliche Kräfte nennen; die Erfahrung hat uns bisher nur natürliche Kräfte kennen gelehrt; auch dann immer, wann Physiker, wie etwa Wilhelm Weber, losgelöst von der unmittelbaren Erfahrung Kraftgesetze hingestellt haben, sind es ausnahmelos natürliche Kräfte gewesen, welche sie solcherlei Kraftgesetzen zugrundegelegt haben.

26. Es dürfen also die natürlichen Kräfte X_{ik} abhängen sowohl von der Entfernung der Elemente m_i und m_k, als auch von deren relativen Geschwindigkeiten, als auch von irgend welchen denkbar anderen Umständen: nur nicht von der absoluten gleich-

---

1) Vgl. hiezu Carl Neumann's Akademische Antrittsvorlesung zu Leipzig 1869, über die Prinzipien der Galilei-Newton'schen Theorie. Namentlich auch Mach, Geschichte des Satzes v. d. Erhaltung d. Arbeit, Prag 1872, p. 47, und Heinrich Streintz, Die physikalischen Grundlagen der Mechanik, Leipzig 1883.

Digitized by Google

förmig fortschreitenden Bewegung des ganzen physikalischen Raumes durch den geometrischen.

Auch alle Maschinenzwänge, wie z. B. die Drucke starrer Oberflächen, sind demnach natürliche Kräfte.

§ 5.

27. Durch das im § 3 durchgeführte elementare Beispiel wird nun in der That genau derselbe Weg beleuchtet, welchen wir jetzt gehen wollen, um aus dem Energieprinzip allein die Newton'schen Bewegungsgleichungen (Newton's lex secunda) entspringen zu sehen.

28. Es seien der Masse m die Geschwindigkeiten u, v, w und die Kräfte X, Y, Z zugeordnet; t bezeichne die Zeit.

29. Der Ausdruck des gewöhnlichen Energieprincips, ausgesprochen für diesen einzigen Massenpunkt, wäre die Gleichung

$$5) \qquad [Xu + Yv + Zw]\,dt = d\frac{m}{2}[u^2 + v^2 + w^2].$$

Wir erinnern uns der Willkür, welche dieser Ansatz hinsichtlich der Abschätzung der Geschwindigkeiten u, v, w offen läßt. Wollen wir nämlich im Sinne des Artikels 23 die Geschwindigkeiten lieber in Bezug auf den geometrischen Coordinatenanfangspunkt abschätzen, so ist der Ausdruck des Energieprinzips die Gleichung

$$6) \qquad [X(u+\alpha) + Y(v+\beta) + Z(w+\gamma)]\,dt = d\frac{m}{2}[(u+\alpha)^2 + (v+\beta)^2 + (w+\gamma)^2].$$

30. Die Gleichung 6 soll uns als der allgemeine analytische Ausdruck des Prinzips der absoluten Erhaltung der Energie gelten, ausgesprochen für einen einzigen Massenpunkt.

31. Setzt man darin $\alpha = \beta = \gamma = 0$, so erhält man das gewöhnliche Energieprinzip der Gleichung 5; setzt man nur $\beta = \gamma = 0$, so erhält man die Gleichung

$$7) \qquad [X(u+\alpha) + Yv + Zw]\,dt = d\frac{m}{2}[(u+\alpha)^2 + v^2 + w^2].$$

32. Durch Subtraktion der 5) von 7) entspringt

$$X\alpha\,dt = d(m\alpha u).$$

Wie nach dem Beispiele des § 3 zu erwarten war, fällt hier die Größe α wieder heraus, und man erhält die Gleichung

$$X = m\frac{du}{dt},$$

Digitized by Google

oder vermittelst der Definitionsgleichung $u = \frac{dx}{dt}$ die Gleichung

$$8) \qquad X = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

und genau ebenso

$$Y = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$Z = m\frac{d^2z}{dt}$$

33. Dies sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen; sie enthalten in dieser Form die Aussagen der lex prima und lex secunda des Newton.

§ 6.

34. Hauptsächlich um das im § 3 grob durchgeführte besondere Beispiel ein wenig analytisch zu verfeinern, zugleich auch um die lex tertia des Newton in vollständiger Form zu gewinnen, stelle ich mir hier die Aufgabe: Ohne den Umweg über die Bewegungsgleichungen zu nehmen, aus dem einzigen Integral der Energie die sechs Integrale der Bewegung des Schwerpunkts zu schöpfen.

35. Es sei vorgegeben das materielle System der k Massen $m_1 \ldots m_k$ mit den Geschwindigkeiten $u_1 \ldots u_k$, $v_1 \ldots v_k$, $w_1 \ldots w_k$; U sei die Arbeitsfunktion der inneren Kräfte des Systems; äußere Kräfte sollen fehlen; t bezeichne die Zeit.

36. Der Ausdruck des gewöhnlichen Energieprinzips, ausgesprochen für dieses materielle System, wäre die Gleichung

$$9) \qquad \frac{dU}{dt} + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=k}\frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] = 0;$$

wir erinnern uns wieder der Willkür in der Abschätzung der Geschwindigkeiten, die in diesen Ansatz eingeht. Sofern es uns nämlich beliebt, im Sinne der Festsetzungen des § 4, die Geschwindigkeiten des Systems in Bezug auf den geometrischen Coordinatenanfangspunkt abzuschätzen, lautet das Energieprinzip so

$$10) \qquad \frac{dU}{dt} + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=k}\frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{dx_i}{dt}+\alpha\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}+\beta\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}+\gamma\right)^2\right] = 0.$$

37. Die Gleichung 10 ist der allgemeine analytische Ausdruck unseres Energieprinzips für ein vollständiges materielles System.

Digitized by Google

38. Setzt man darin $\alpha = \beta = \gamma = 0$, so erhält man das gewöhnliche Energieprinzip der Gleichung 9; setzt man nur $\beta = \gamma = 0$, so erhält man die Gleichung

$$11) \qquad \frac{dU}{dt} + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=k} \frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{dx_i}{dt} + \alpha\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] = 0.$$

39. Nach der Subtraktion der 10 von 11 fällt die Größe α geziemend aus der Gleichung heraus und es ergibt sich

$$12) \qquad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=k} m_i \frac{dx_i}{dt} = 0$$

und genau ebenso

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=k} m_i \frac{dy_i}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=k} m_i \frac{dz_i}{dt} = 0.$$

40. Diese Gleichungen geben, angewandt auf einen einzigen Massenkörper, die lex prima; angewandt auf ein System von zwei Massenkörpern die lex tertia[1]) des Newton; angewandt auf ein System beliebig vieler Massenpunkte, geben sie, nach zweimaliger Integration, die sechs Integrale der Bewegung des Schwerpunktes dieses Systems.

Es braucht wohl kaum noch besonders hervorgehoben zu werden, daß man die Gleichung 10 mit der Gleichung 6 in beliebiger Weise additiv kombiniren kann; ich darf auch hiefür noch ein Beispiel skizziren. Wir nehmen also jetzt an, es sollen auf das System neben den inneren Kräften $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ noch die äußeren Kräfte Ξ, H, Z wirken. Es tritt dann in die Gleichung 9 noch der Arbeitseffekt der äußeren Kräfte ein, und sie lautet jetzt

$$9') \qquad \frac{dU}{dt} - \sum_{i=1}^{i=k}[\Xi_i u_i + H_i v_i + Z_i w_i] + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=k} \frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] = 0.$$

1) Hier ist, ganz im Sinne der Newton'schen Formulirung des Gegenwirkungsprinzips, über die Kräfte noch keinerlei metaphysische Voraussetzung gemacht; insbesonders auch diese nicht, daß alle Naturkräfte in letzter Instanz Centralkräfte seien. Dies wollte betont sein, weil diese klare und vorurtheilslose Newton'sche Hinstellung des Gegenwirkungsprinzips, welche Mach geradezu die wichtigste prinzipielle Leistung Newtons nennt, in der neueren Literatur zum Theil wesentlich verändert erscheint; so schon bei Helmholtz (Wiss. Abh. I, p. 70, Z. 8 v. u.) und namentlich bei Planck (l. c., S. 162, Z. 9 v. u.).

Digitized by Google

Wiederholt man die Operationen der Artikel 36, 37, 38 und 39, so erhält man statt der Gleichungen 12 die Gleichungen

$$12') \qquad -\sum_{i=1}^{i=k} \Xi_i + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=k} m_i \frac{dx_i}{dt} = 0 \text{ etc.}$$

Diese Gleichungen kombiniren wir mit den Gleichungen 8 des § 5. Nach diesen letzteren gilt für jeden einzelnen Punkt des Systems

$$X_i = \mathfrak{X}_i + \Xi_i = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2},$$

also umsomehr

$$8') \qquad \sum_{i=1}^{i=k} (\mathfrak{X}_i + \Xi_i) = \sum_{i=1}^{i=k} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}.$$

Durch Addition der Gleichungen 8′ und 12′ entspringt die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{i=k} \mathfrak{X}_i = 0$$

und genau so

$$12'') \qquad \sum_{i=1}^{i=k} \mathfrak{Y}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=k} \mathfrak{Z}_i = 0.$$

Setzt man $i = 2$, so hat man wieder die lex tertia des Newton, ausgesprochen für zwei Massenkörper, auf welche beliebige äußere Kräfte wirken. Doch ist das Gegenwirkungsprinzip in dieser Form für die in der Einleitung erwähnte Festlegung des Massenbegriffes nicht so glatt verwendbar wie in der durch die Gleichungen 12 gegebenen Form. In der That müßte man, um die Masse μ eines Körpers, auf den äußere Kräfte wirken, auch noch unabhängig vom Kraftbegriff festlegen zu können, ein wenig umständlich und zwar etwa so verfahren:

a) man gebe diesem Körper eine beliebige Bewegung und beurtheile seine Geschwindigkeit nach einer Raumrichtung ϱ, darin sie konstant erscheint; sie sei darin α; (die Erfahrung lehrt, daß immer eine ganze Flächenmannigfaltigkeit solcher Raumrichtungen existirt);

b) man bringe den bewegten Körper in beliebiger Weise, z. B. vermittelst eines feinen Fadens oder am einfachsten durch direkten Zusammenstoß, mit einem von der Pariser Akademie der Wissenschaften aufbewahrten Platinstück zur Wechselwirkung, und man beurtheile unmittelbar darauf die Geschwindigkeiten der beiden bewegten Körper nach der nämlichen Raumrichtung ϱ; sie seien darin a und b;

Digitized by Google

c) alsdann behafte man den besagten Körper mit dem Attribut $\mu = \frac{b}{\alpha - a}$, und nenne dieses Attribut seine Masse.

§ 7.

41. Es möchte noch nützlich sein, an einem einfachen Beispiele zu zeigen, daß unser Energieprinzip auch wirklich für sich allein zureicht, eine Entscheidung darüber zu fällen, ob ein in seinen Massen und Bewegungen in integraler Form beschriebenes physikalisches System mechanisch zulässig ist oder nicht.

42. Hiezu sei etwa ein System zweier Massen M und m vorgestellt; U sei die Arbeit, welche aufgewendet werden müßte, um die beiden Massen aus einer beliebigen Anfangs-Configuration der relativen Lagen und Geschwindigkeiten in die sofort zu bezeichnende Configuration zu bringen: Die erste Masse M soll ruhen, die zweite Masse m soll sich mit der immer gleichförmigen Geschwindigkeit V um die erste in einem Kreise herumbewegen; genau so, wie nach des Kopernikus Lehre die Erde um die Sonne. Aeußere Kräfte (also auch etwa Drucke äußerer starrer Flächen) sollen fehlen. Die Ebene des Kreises sei xy-Ebene.

43. Hier ist das gewöhnliche Energieprinzip streng gewahrt; denn es ist die Funktion U, da sie — wie immer sie auch sonst beschaffen sein möge — lediglich von den relativen Lagen und Geschwindigkeiten abhängen soll, eine Constante; die lebendige Kraft der Masse M ist Null; die lebendige Kraft der Masse m ist

$$13) \qquad \frac{m}{2}(u^2 + v^2) = \frac{m}{2}V^2,$$

also auch eine Constante.

44. Nunmehr ertheilen wir in der Idee dem ganzen System die gleichförmige Geschwindigkeit α etwa in der x-Richtung des geometrischen Raumes, und wir fragen, ob auch jetzt noch das Energieprinzip gewahrt ist.

45. U ist noch immer constant; die lebendige Kraft der ersten Masse ist gleich $\frac{M}{2}\alpha^2$, also auch constant; die lebendige Kraft der zweiten Masse ist

$$14) \qquad \frac{m}{2}[(u+\alpha)^2 + v^2] = \frac{m}{2}V^2 + \frac{m}{2}\alpha^2 + mu\alpha.$$

Digitized by Google

Hier sind die ersten zwei Glieder $\frac{m}{2}V^2$ und $\frac{m}{2}\alpha^2$ Constante; das dritte Glied $mu\alpha$ aber ist variabel wie u.

Also verletzt das System das Energieprinzip; also ist es physikalisch unzulässig und durch keinerlei, wie immer vorausgesetzten, inneren natürlichen Kräfte realisirbar.

46. In diesem einfachsten Falle war der Widerspruch gegen die mechanischen Prinzipien besonders offenkundig; wir wählten es eben wegen seiner Einfachheit, sowie wegen des historischen Interesses, das ihm anhaftet; aber in jedem noch so komplizirt vorgegebenen Falle reicht das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie für sich allein zur Entscheidung über die mechanische Zulässigkeit desselben hin; indem es ja alle grundlegenden Prinzipien der Mechanik, das sind die drei Axiome des Newton mit Einschluß des Zusatzes von Carl Neumann und Ernst Mach in einer einzigen Integral-Aussage wiedergibt.

Göttingen, theoretisch-physikalisches Institut der Universität, Dezember 1896.

Digitized by Google

Arbeiten aus dem pathologischen Institut in Göttingen.

Vierter Bericht.

Von

J. Orth.

Vorgelegt in der Sitzung am 29. Mai 1897.

Seit meinem letzten Bericht vom 24. Oktober 1896 sind 8 Arbeiten fertig gestellt worden, darunter 4 Inaugural-Dissertationen.

1. Die wichtige Frage nach der Herkunft der in entzündeten Theilen auftretenden Zellen ist besonders an der Hornhaut studirt worden, deren Gefäßlosigkeit vor allem sie als geeignet erscheinen lassen mußte, darüber Aufschluß zu geben, in wie weit die Gewebszellen bei der Bildung der Exsudatzellen (vulgo Eiterkörperchen) betheiligt sind. Es mußte aber bald klar werden, daß auf rein histologischem Wege eine Entscheidung darüber, ob die in der entzündeten Hornhaut bei centraler Anbringung der Entzündungsreize am Rande auftretenden, in parallelen, sich gitterförmig überdeckenden Reihen angeordneten Zellen (sog. Spieße) von außerhalb eingewandert oder in der Hornhaut selbst entstanden seien, nicht oder doch nur sehr schwer geliefert werden konnte. Senftleben versuchte deshalb in Cohnheims Institut die Frage der Entscheidung näher zu bringen, indem er seiner Meinung nach todte Hornhäute, an denen er in gleicher Weise wie es vorher an den Hornhäuten lebender Thiere geschehen war, Entzündungsreize angebracht hatte, in die Bauchhöhle lebender Thiere brachte, in der Unterstellung, daß nunmehr das, was von Zellen in den transplantirten todten Hornhäuten sich später vorfände, eingewandert sein müsse. Er fand unter solchen Verhältnissen dieselben Spieße und Gitter wie in der in situ entzündeten Hornhaut und zog daraus den Schluß, daß die Zellen auch bei dieser eingewandert seien. Die Resultate dieser Experimente wurden um so mehr anerkannt und als Grundlage für weitere, in

Digitized by Google

gleichem Sinne, z.B. von Leber, angestellte genommen, als ja leicht nachzuweisen war, daß auch in leblose poröse Stoffe (Hollundermark, Schwamm, allerhand Fäden etc.) unter gleichen Verhältnissen eine Zelleneinwanderung stattfindet. So dienten diese Versuche als wichtigste Stütze für die Cohnheim'sche Entzündungstheorie, wonach die Exsudatzellen aus den Gefäßen aus- und in die Gewebe eingewanderte Leukocyten sein sollten.

Es muß Grawitz, der in neuester Zeit gegen diese Verwerthung der bezeichneten Experimente einen lebhaften Kampf eröffnet hat, zugestanden werden, daß dieselben an einem wesentlichen Mangel leiden, indem die Voraussetzung, daß Hornhaut, welche einige Tage nach dem Tode des Thieres entnommen und etwa noch auf 50° C. erwärmt wurde (Senftleben), oder welche einige Tage getrocknet wurde (Leber) todt sei, jedes Beweises entbehrt. Durch Zusammenstellung zahlreicher Beispiele von langem und unerwartetem Ueberleben ganzer Individuen oder einzelner Körperbestandtheile suchte Grawitz jene Voraussetzung zu erschüttern, indem er zugleich das Prinzip aufstellte, daß die Lebensfähigkeit nicht nur ganzer Individuen, sondern auch einzelner vom Körper losgetrennter Theile, ja einzelner Zellen mit Sicherheit nur dadurch entschieden werden könne, ob die zu prüfenden Theile unter geeigneten Verhältnissen erholungsfähig seien oder nicht.

Grawitz prüfte daraufhin jene Voraussetzung und kommt zu dem Schlusse, daß die Hornhäute in Senftleben's und Leber's Versuchen nicht todt gewesen seien, daß wirklich todte Hornhäute ganz andere Resultate der Experimente ergeben. „In der mit Arg. nitr. geätzten, alsdann durch Kochen, Sublimat, Chlorzinkwirkung oder Fäulniß wirklich abgetödteten Hornhaut ist nicht die geringste entzündliche Reaction wahrzunehmen, auch wenn man im Lymphsacke des Frosches oder in der Bauchhöhle von Kaninchen oder Meerschweinchen den Wanderzellen viele Tage lang — bis zur Resorption der Fremdkörper — Zeit zur Einwanderung läßt". „Der Satz von Senftleben und Leber, daß die todte Hornhaut nach Aetzung die gleichen Bilder der Keratitis ergiebt wie die lebende in situ ist demnach als ein Irrthum zu bezeichnen und auf mangelhafte Controlle zurückzuführen". „Da nun diese Versuche von Senftleben durch lange Jahre als einzige direkte Beweise dafür gedient haben, daß massenhafte Wanderzellen von außen in die Hornhaut eindringen könnten, so geht aus meiner Nachprüfung schlagend hervor, daß dieser Schluß unrichtig ist, daß im Gegentheil in todte Hornhaut überhaupt keine Zellen von außen eindringen und daß die von Senftleben für eingewandert

Digitized by Google

gehaltenen Formen nur an solchen Hornhäuten vorkommen, die zwar anscheinend todt, thatsächlich aber noch erholungsfähig sind". „Alle Wanderzellen, welche in einer transplantirten erholungsfähigen Hornhaut vorkommen, sind aus dem lebenden Gewebe selbst entstanden . . .". Damit ist für Grawitz erwiesen, daß die Erklärung der Zellenbilder in der entzündeten Hornhaut durch Einwanderung hinfällig ist, daß nur das Gewebe selbst dafür herangezogen werden kann, und daß, da die direkte oder indirekte Zellentheilung zur Erklärung der Bilder nicht als ausreichend befunden worden sei, demnach noch ein anderer Modus vorliegen müsse, dem die kleinzellige Infiltration zum allergrößten Theile zu verdanken sei, womit natürlich auf seine sog. Schlummerzellentheorie hingewiesen ist.

Hat nun Grawitz mit seinen Behauptungen Recht?

Zwei Punkte sind mir bei seinen Angaben vor allem auffällig. Zunächst folgende Bemerkung: „Froschhornhäute, 3 bis 4 Tage nach dem Tode des Thieres vor Fäulniß bewahrt, reagiren im Lymphsacke meist viel intensiver als ganz frisch eingebrachte, oft sind schon nach 24 Stunden fast alle Hornhautkörperchen in Spießfiguren umgewandelt". Wie? Geschädigte, aus ihren natürlichen Verhältnissen herausgerissene, im Absterben begriffene Hirnhautzellen sollen besser imstande sein, eine formative Leistung zu bieten, als ganz lebensvolle, in ihrer Ernährung ungestörte, sollen gar innerhalb 24 Stunden nicht nur sich erholt haben und zu ihren gewöhnlichen Leistungen befähigt sein, sondern auch noch eine ganz ungewöhnliche, weit über die normale hinausgehende Thätigkeit entfalten? Das ist von vornherein höchst unwahrscheinlich und es hätte nahe gelegen, den Versuch zu machen, eine andere Erklärung für die Beobachtung, deren Richtigkeit ich nicht bezweifele, zu suchen. Eine solche läßt sich aber vielleicht finden bei der Beurtheilung der 2. auffälligen Angabe von Grawitz, welche lautet „nur lebende, erholungsfähige Hornhaut kann entzündet werden, die durch Kochen, Aetzmittel und ähnliche Schädigungen wirklich abgetödtete Cornea kann wie andere todte Körper zerfallen oder eingekapselt werden; da sie keine Poren enthält, wie Schwamm oder Hollundermark, so wandern auch keine Zellen in ihr Gewebe hinein". Daß die Hornhaut keine solchen Poren enthält wie Schwamm oder Hollundermark lehrt ja freilich der Augenschein, daß sie deswegen aber überhaupt nicht für die Einwanderung von Zellen geeignete Verhältnisse darböte, dafür bringt Grawitz nicht den mindesten Beweis, im Gegentheil, er bringt selbst schon den Gegenbeweis, indem er die Beobachtungen v. Recklinghausens u. a. über Wan-

Digitized by Google

derzellen in der überlebenden Hornhaut seinen Gegnern mit Emphase vorhält. Wenn das Hornhautgewebe soweit „porös“ ist, daß Zellen in ihm herumwandern können, so ist nicht abzusehen, warum nicht auch von den Seiten her, wo das Hornhautgewebe in das Bindegewebe der Sclera übergeht, Zellen einwandern könnten! Daß es dabei nichts ausmachen wird, ob die Hornhaut lebend ist oder todt, hätten schon die Beobachtungen über Einwanderung von Zellen in Glimmerplättchen liefern können, über die erst vor nicht langer Zeit von Uhlmann wieder berichtet worden ist. Hier liegt m. E. der Grundfehler der Grawitz'schen Ueberlegungen, denn hätte Grawitz mit der Durchwanderungsfähigkeit der Hornhaut gerechnet, so hätte er vielleicht die vorher unter 1 erörterte Beobachtung so erklärt, daß in der 3—4 Tage alten Hornhaut leichter Spieße auftreten, weil sie lockerer geworden ist, so hätte er vielleicht das Auftreten von Spießen nach Einwirkung von 50° C., das Ausbleiben derselben nach Einwirkung höherer Temperatur dadurch zu erklären versucht, daß die Hornhaut im letzten Fall durch Coagulation fester und undurchdringlicher geworden ist, er hätte überhaupt bei allen Versuchsresultaten sich gefragt, welche Einwirkung wird die Versuchsanordnung für die Durchlässigkeit des Hornhautgewebes für Zellen einerseits, für die Bewegungsfähigkeit von Zellen andererseits haben. Denn auch das ist ein beachtenswerther Punkt, daß die Wanderungsfähigkeit der Zellen durch chemische Einwirkungen sowohl im positiven wie im negativen Sinne beeinflußt werden kann. Zellen können chemotactisch angelockt aber auch durch toxische Substanzen gelähmt werden.

Mußten somit von vornherein gewichtige Bedenken gegen die Darlegungen von Grawitz entstehen, so war andererseits seine Forderung doch als berechtigt anzusehen, daß von jetzt ab jeder Kritiker, welcher die Eiterkörperchen als eingewandert bezeichnet, zunächst dafür Beweise bringen muß, daß eine Einwanderung von Zellen in Hornhautgewebe überhaupt möglich ist. Dementsprechend habe ich im Sommer 1896 den Volontär-Assistenten am Institut, H. Dr. Lange veranlaßt, mit mir Experimente über die Einwanderung von Zellen in die todte Hornhaut zu veranstalten. Es wurde die Frage nach der Erholungsfähigkeit geschädigter Hornhäute zunächst nicht weiter verfolgt, sondern hauptsächlich die Grundfrage zur Lösung gestellt, ob in die sicher abgetödtete Hornhaut Zellen einwandern können und zwar wurden sowohl bloß abgetödtete Hornhäute als auch solche verwendet, welche außerdem mit Entzündungserregern versehen waren. Zur

Digitized by Google

Abtödtung wurde Formol gewählt, weil ich hoffte, dasselbe werde den inneren Bau, die Porosität der Hornhaut möglichst wenig verändern. Als ich zuletzt zur größeren Sicherheit in Formol kochen ließ, wurde, um eine Wiederaufquellung zu erzielen, in Essigsäure nachgekocht und dann ebenso wie bei den bloß mit Formol behandelten Hornhäuten in Wasser sorgfältig ausgewaschen.

Die Resultate der Untersuchungen, über die Dr. Lange unter Beibringung photographischer Beweisstücke im Centralblatt für pathologische Anatomie berichten wird, waren nun die, daß sowohl in die bloß abgetödteten als auch in die außerdem noch mit Entzündungserregern beschickten Hornhäute Zellen einwandern können, und zwar wurden in jenen leukocytenähnliche und fibroblastische Zellen gefunden d. h. die todte Hornhaut wurde organisirt wie ein Thrombus, in diesen aber nur leukocytäre Elemente, welche z. Th. durchaus dieselben Spieß- und Gitterfiguren in den Randschichten der Hornhaut bildeten, wie sie für die entzündete Hornhaut charakteristisch sind. Die in Organisation begriffenen Hornhäute hingen mit dem aus der Umgebung hervorgegangenen Granulationsgewebe zusammen, die anderen schwammen in Eiter.

Damit sind die Grawitz'schen Schlußfolgerungen für die Herkunft der Zellen in der entzündeten Hornhaut widerlegt und es bleibt nach wie vor der Stand der Frage der: es ist bewiesen, daß das Bild, welches die entzündete Hornhaut in Bezug auf die Spieß- und Gitterfiguren darbietet, ausschließlich durch Wanderzellen bewirkt werden kann, es ist erst noch zu erweisen, das dasselbe Bild ohne jede Mitwirkung von Wanderzellen erzeugt werden könne, also werden wir solange annehmen dürfen, daß die zellige Infiltration in allen entzündeten Geweben mindestens unter erheblicher Mitwirkung von eingewanderten Zellen zu stande kommt, bis uns Fälle nachgewiesen werden, in welchen die Mitwirkung von Wanderzellen sicher auszuschließen ist.

2. Der 1. Assistent, Privatdocent Dr. Aschoff hat in den von Lubarsch und Ostertag herausgegebenen Ergebnissen der allgemeinen Pathologie und patholog. Anatomie eine ausführliche zusammenfassende Arbeit über Cysten erscheinen lassen.

3. Von dem 2. Assistenten, Dr. Ophüls wird in Virchow's Archiv eine Mittheilung über Ependymitis tuberculosa erscheinen. In der Litteratur wird über Veränderungen am Ependym bei Meningitis tuberculosa berichtet, die als chronisch entzündete angesehen wurden und bei gut ausgeprägten Fällen in einer Granulirung des Ependyms bestanden, aber in vereinzelten Fällen

Digitized by Google

wurden auch die Ependym-Knötchen direkt als Tuberkel angesprochen. Auch in einigen der gebräuchlichen Lehr- und Handbücher wird das Vorkommen von Tuberkeln am Ependym erwähnt, jedoch meistens als eine seltene Erscheinung bezeichnet. Genauere Untersuchungen sind anscheinend überhaupt nie gemacht worden. Ich veranlaßte deshalb Herrn Ophüls im Anschluß an einen Fall, bei welchem ich Tuberkel mit zahlreichen Bacillen im Ependym des 3. Ventrikels gefunden hatte, alle vorkommenden geeigneten Fälle auf das Vorhandensein von Ependymtuberkeln zu untersuchen. Untersucht wurden bis jetzt 11 Fälle ausgesprochener tuberculöser Meningitis. Jedesmal fanden sich eben sichtbare bis stecknadelkopfgroße, graue, durchsichtige Knötchen, besonders reichlich am Boden der Vorderhörner, zu beiden Seiten des Septum pellucidum, in den Recessus des 3. und 4. Ventrikels. Einmal sah man an einem gehärteten Präparat, das wir der Güte des Herrn Dr. Benda, Berlin verdankten, an einzelnen Knötchen centrale Verkäsung, einmal waren Hämorrhagien in der Umgebung der Knötchen vorhanden. In allen Fällen ließen sich in den Knötchen Tuberkelbacillen nachweisen und zwar gewöhnlich in reichlicher Anzahl.

Man kann eine oberflächliche und eine tiefe Tuberkulose des Ependyms unterscheiden. Auch bei den kleinsten Knötchen der ersten Art fand sich an der Oberfläche ein Epitheldefect, durch den anscheinend die Bacillen von dem Ventrikel her eingedrungen sind; auch Faltenbildungen, normale oder pathologische, scheinen die Ansiedelung der Bacillen zu begünstigen; bei den Tuberkeln der 2. Art lagen die Bacillen zuerst in den Lymphscheiden der kleinen Ependymgefäße. In beiden Fällen entsteht eine Zellanhäufung in der Umgebung der inficirten Stelle, wodurch an der Oberfläche ein papillärer oder fungöser Vorsprung, in der Tiefe ein allmählicher Verschluß des centralen Gefäßes und bei weiterem Wachsthum auch Zerstörungen im eigentlichen Ependymgewebe und an der Oberfläche bewirkt werden. Die Zellanhäufung besteht zum Theil aus Zellen, welche Leukocyten und Lymphocyten gleichen, einen hervorragenden Antheil an derselben nehmen aber, besonders bei den oberflächlichen Formen, große Zellen mit bläschenförmigen auffallend unregelmäßig gestalteten Kernen, die wohl als Abkömmlinge der Gewebszellen zu betrachten sind. Bei den perivasculären Tuberkeln wurde centrale Verkäsung und in ganz seltenen Fällen Riesenzellenbildung beobachtet.

Die Gliafasernetze fallen bei der perivasculären Tuberkulose schon bald einer Zerstörung anheim, während sich eine solche in

Digitized by Google

bedeutenderem Maßstabe nur bei besonders großen oberflächlichen Tuberkeln findet. Die größeren Gefäße des Ependyms zeigen gewöhnlich in ihrer Wand und in den perivasculären Lymphräumen zahlreiche Lymphocyten und polynucleäre Leukocyten, doch ließen sich an solchen Stellen niemals Tuberkelbacillen nachweisen.

Das gegenseitige quantitative Verhalten der oberflächlichen und perivasculären Ependymtuberkel ist ein sehr wechselndes in den einzelnen Fällen; manchmal waren wenigstens an einzelnen Stellen des Ependyms nur oberflächliche Veränderungen vorhanden.

Eine besondere Erwähnung verdient ein Fall, bei dem es sich hauptsächlich um perivasculäre Veränderungen handelte. Es fanden sich hier in den Tuberkeln ganz enorme Mengen von Tuberkelbacillen und fast ausschließlich polynucleäre leucocytäre Zellen, so daß die Herdchen die größte Aehnlichkeit mit kleinen Abscheßchen hatten. Andere Bakterien als Tuberkelbacillen ließen sich aber hier ebensowenig nachweisen, wie bei einigen anderen Fällen, die daraufhin untersucht wurden.

4. Dr. Gaylord hat die schon im vorigen Bericht erwähnten Arbeiten über das Fibrin an entzündeten serösen Häuten weiter geführt und zum Abschluß gebracht. Der Nachweis von Epithelzellen an abgezogenen frischesten Fibrinhäutchen menschlicher Lungen gelang wohl, aber entgegen der Angabe Neumann's hauptsächlich an der unteren Seite, und wiederholt wurde dann auch der Befund eines ausgedehnten Epithelbelags unter dem Fibrin an den Schnitten von solchen Lungen dicht neben den Stellen erhoben, von wo das Häutchen abgezogen worden war.

An in die Pleurahöhle fertig eingebrachtem, mit Formol fixirtem, theilweise auch nach Weigert gefärbtem Fibrin hatte G. schon vor meinem letzten Bericht wahrgenommen, daß das eingebrachte Fibrin von einer dünnen Schicht lockeren, feinfaserigen, offenbar an Ort und Stelle entstandenen Fibrins seitlich und an der freien Fläche umhüllt wird. Das eingebrachte Fibrin wird durch einwachsende Fibroblasten und Gefäße organisirt und zeigt ähnliche hyaline Bänder, wie sie von Neumann für die hyaline Degeneration als charakteristisch angegeben wurden. Das normale Pleuraepithel kann unter dem Fibrin noch erhalten sein, sehr bald zeigt es am Rande der Fibrinmassen Wucherungserscheinungen und nach 8 Tagen fand sich stets ein zusammenhängender Ueberzug von epithelähnlichen Zellen über der gesammten Fibrinmasse, welcher am Rande deutlich mit dem normalen Epithel zusammenhing. Es fehlen auch nicht die in meinem Vortrag (s. Nachr. 1896) schon erwähnten, der alten Pleuraoberfläche in dem Organisationsgewebe

Digitized by Google

entsprechenden Räume (Spalten) mit doppelseitigem Epithelbelag und es konnte gezeigt werden, daß nur da ein Hervorsprießen von Bindegewebe stattfand, wo eine Lücke im Epithel entstanden war.

Es hätte nun gegen diese Experimente eingewendet werden können, daß fertiges, durch Formol etc. verändertes Fibrin eingebracht worden war, daß die hyalinen Bänder in diesem künstlich erzeugt worden seien und daß überhaupt solches Fibrin ganz anders wirke wie in der serösen Höhle selbst entstandenes. Es wurden deshalb die Experimente vervollständigt durch solche, bei welchen das Fibrin ganz frisch aus Pferdeblutplasma durch Fibrinferment erzeugt war, sowie durch solche, bei welchen Flüssigkeiten (Pferdeblutplasma und Fibrinferment oder auch Pferdeblutplasma allein) in die Pleurahöhle gebracht wurden, aus welchen sich dort erst Fibrin bildete. Die Resultate waren dieselben wie beim Einbringen von fertigem Fibrin, auch hier trat Organisation ein, und soweit sie bestand, zeigten sich auch hyaline Bänder, auch hier bildete sich ein Epithelüberzug von dem normalen Epithel aus. Besonders klar zeigte sich diese Epithelbildung in einem Falle, wo ein relativ großes Gerinnsel nur an einer kleinen Stelle Organisation zeigte und doch (1 Woche nach der Operation) die ganze Oberfläche mit einer einschichtigen Epithellage überzogen war.

Es darf also danach als feststehend betrachtet werden, daß weder die hyalinen Bänder Neumann's noch ein etwaiger Ueberzug von epithelialen Zellen gegen die exsudative Natur von Fibrin sprechen kann, und daß unter dem Fibrin liegende epithelartige Zellen nicht umgewandelte Lymphgefäßendothelien sein müssen, sondern die Reste des normalen Epithels sein können, auch dann, wenn bereits eine weitgehende Organisation des Fibrins eingetreten ist, welche übrigens, wie noch bemerkt sei, in den Experimenten nicht nur von unten her, sondern, wenn auch in geringem Maße, auch von oben her stattfand, so daß also mit den Epithel-Zellen auch Fibroblasten über das Fibrin hinübergewachsen sein müssen.

Die weitere Untersuchung an tuberculösen Pleuren mit Hülfe der Orceïnfärbung hat immer ergeben, daß die hyalinen Bänder stets außerhalb der elastischen Fasern lagen, also in dem neugebildeten Gewebe, wodurch die Annahme einer degenerativen Entstehung derselben immer zweifelhafter wird.

Die Arbeit wird, mit Photogramm-Reproduktionen ausgestattet, in dem amerikanischen Journal of experim. medicine erscheinen.

5. A. Hollefeld hat in seiner Dissertation, Beitrag zur

Digitized by Google

Kenntniß der compensatorischen Leberhypertrophie beim Menschen, 1896, 8 Fälle verwerthet. Während 7 mal eine Vergrößerung der einzelnen Läppchen mit mehr oder weniger ausgesprochener und ausgedehnter Vergrößerung von Leberzellen vorhanden war, wurde 1 mal beides vermißt, so daß die Vergrößerung lediglich durch eine Vermehrung der Zahl der Läppchen bedingt wurde. Es handelte sich um einen 66 jährigen Mann, bei welchem der rechte Leberlappen durch einen großen Echinococcus zur Atrophie gebracht, während der linke Lappen stark hypertrophirt war. Die einzelnen Läppchen waren hier weniger gut abgrenzbar und zeigten die sonderbarsten Gestaltungen; sie enthielten im Centrum Pigment, in der Peripherie Fett in den Zellen. 3 mal war ein Echinococcus im rechten Lappen, 1 mal syphilitische Atrophie, 1 mal fibröse Atrophie desselben bei Cholelithiasis und chronischer Cholecystitis Ursache der compensatorischen Hypertrophie des linken Lappens; 1 mal saß die fibröse Atrophie links, die Hypertrophie rechts, 2 mal waren partielle Hypertrophien (einmal das Lobus infer. ant.) bei Stauungshyperämie, aber nicht ganz klaren ätiologischen Verhältnissen vorhanden. Zum Schlusse polemisirt der Verf. gegen den von Ponfick eingeführten Ausdruck Recreation für derartige Vorgänge, da es sich gar nicht um Wiederherstellung der Leber als Organ, sondern nur um eine Neubildung von Lebergewebe ohne typische Organanordnung handelt; das wird am besten mit dem lange gebräuchlichen Namen compensatorische Hypertrophie bezeichnet.

6. In der Dissertation von B. Metterhausen, Ueber Combination von Krebs und Tuberkulose, 1897, sind 3 neue Fälle dieser Combination mitgetheilt. In dem 1. fand sich die Tuberkulose neben und in einem Colonkrebs, welcher einer 33 jähr. Frau exstirpirt worden war. Vermuthlich bestand geringe Lungenspitzen-Tuberkulose. Verf. nimmt primären Krebs, secundäre Tuberkulose an. In den beiden anderen Fällen fand sich bei der Sektion Pyloruskrebs mit Tuberkulose der regionären Lymphdrüsen, einmal auch der Leber. Es wird eine alte Tuberkulose angenommen, die durch die Krebsbildung neu angefacht wurde (frische Tuberkulose der Leber). Bemerkenswerth ist, daß in allen Fällen histologisch deutlich Tuberkulose mit Riesenzellenknötchen und Verkäsung gefunden wurde, daß aber, wie es auch anderen Untersuchern solcher Combinationen gegangen ist, die Bacillensuche negativ ausgefallen ist.

7. H. Volger, Die „Stückchen-Diagnosen" des pa-

Digitized by Google

thologischen Instituts in Göttingen vom 1. April 1878 bis 20. Januar 1897. Dissertation, 1897.

Die mikroskopische Untersuchung kleiner aus dem Uterus herausgeschnittener oder mit dem scharfen Löffel ausgeschabter Gewebsstückchen zum Zweck der Diagnosenstellung, kurz „Stückchen-Diagnose" genannt, hat für die Gynäkologie immer größere Bedeutung gewonnen. Gelegentlich einer Discussion über die Bedeutung der Stückchen-Diagnose in einer ärztlichen Gesellschaft in Berlin hat ein Gynäkologe, Prof. Winter, behauptet, die schwerwiegendste Opposition liege grade da, „wo wir sie am wenigsten erwarten sollten und am wenigsten gern sehen: bei den pathologischen Anatomen". „Und doch ist diese Opposition, so fährt er fort, begreiflich; sie mag schon darin liegen, daß den Anatomen diese Stückchen-Diagnose überhaupt nicht sympathisch ist; sie beruht wohl noch mehr darauf, daß ihnen dieses Material in frischem Zustande nicht in so ausgiebiger Weise zur Verfügung steht, um sich mit den einschlägigen Veränderungen genügend betraut zu machen; sie beruht aber vor allem darauf, daß ihnen gewisse Formen des Uteruskrebses (Adenoma malignum) nicht bekannt genug sind." Ich weiß nicht, wo der Redner diese Erfahrungen mit pathologischen Anatomen gemacht hat, vermisse jedenfalls jeglichen Beweis für diese — merkwürdigen Behauptungen und protestire dagegen, daß in dieser Weise Erfahrungen, die vielleicht in kleinstem Kreise gemacht worden sein mögen, ohne weiteres auf die Allgemeinheit der pathologischen Anatomen übertragen werden und erkläre nach meiner Kenntniß der Verhältnisse die sämmtlichen Behauptungen für völlig unberechtigt. Insbesondere trifft keine derselben auf mich und das von mir geleitete Institut zu.

Um eine Uebersicht über unsere Stückchen-Diagnosen nach Zahl und Werth zu erhalten, habe ich Herrn Volger veranlaßt, aus unseren Büchern eine Zusammenstellung derselben zu machen. Es wurden seit dem Beginn meiner Thätigkeit in Göttingen, seit dem 1. April 1878, 278 Stückchen, die dem Uterus lebender Frauen entstammten, untersucht. 46 kleine Schleimpolypen und 9 Fälle von einfacher Hypertrophie der Muttermundslippen wurden nicht weiter berücksichtigt, so daß die Zusammenstellung sich auf 223 Fälle bezieht. In den ersten Jahren war das Material spärlich (von 1878—1888 24 Fälle), erst seit dem Jahre 1888/89 hat es sich vermehrt; 1894/95 kamen 52 Fälle, 1895/96 35 F. und 1896/97 bis 20. Januar 17 F. vor. In den letzten 9 Jahren (das letzte nicht ganz vollständig) wurden also 199 Stückchen untersucht. Es kamen im Laufe der Zeit natürlich verschiedene Untersuchungs-

Digitized by Google

methoden in Anwendung, jetzt werden behufs Anfertigung von Schnitten die Stückchen über Nacht in Formol-Müller gelegt, dann flüchtig abgewaschen und mit dem Gefriermikrotom geschnitten. Fast alle gestellten Diagnosen wurden von mir controllirt; eine kleine Anzahl wurde in meiner Abwesenheit von den Assistenten allein gestellt. Bei der Beurtheilung des Werthes der Diagnosen ist zu beachten, daß bei vermutheter maligner Neubildung ein negatives Resultat der Stückchen-Diagnose nicht unbedingt maßgebend sein kann, da der Löffel zufällig hauptsächlich wenig veränderte Theile der Schleimhaut herausbefördern kann. Darum ist es auch erforderlich, nicht nur einige der herausbeförderten Stückchen, sondern grade wenn die histologische Diagnose mit der klinischen nicht stimmen will, möglichst alle Stückchen zu untersuchen. Für die Sicherheit der Diagnosen ist es, wieder grade bei dem Verdacht auf maligne Neubildung, von großem Vortheil, wenn recht tief geschabt wird, so daß womöglich etwas Muskulatur in den Stückchen vorhanden ist, damit man die Beziehungen einer etwa vorhandenen Neubildung in der Schleimhaut zu dem darunter liegenden Myometrium feststellen kann. In einer Anzahl unserer Fälle konnte von uns selbst die Stückchen-Diagnose an dem später exstirpirten Uterus kontrollirt werden, wegen der übrigen wurde mit Hülfe der behandelnden Aerzte bezw. der hiesigen Frauenklinik eine Umfrage nach dem weiteren Ergehen der Patientinnen veranstaltet. Nicht über alle Fälle konnten Nachrichten gesammelt werden, doch gelang dies für eine große Zahl, insbesondere für die große Mehrzahl der wichtigeren Fälle. Kurze Angaben über die einzelnen Fälle hat Herr Volger zusammengestellt.

Im Einzelnen wurde 33[1]) mal Carcinom diagnosticirt; Cervicalkrebse kamen in 22 Fällen vor, von welchen 19 verfolgt werden konnten, alle ergaben Bestätigung der Diagnose, welche 9 mal auf Plattenepithelkrebs lautete. Von 10 Fällen mit Corpuskrebs konnten 9 verfolgt werden; nur in 1 Fall wurde die Diagnose durch den Verlauf nicht bestätigt, hier war aber die Diagnose ohne genügende Begründung erst bei einer zweiten Untersuchung in meiner Abwesenheit durch einen Assistenten gestellt worden. In einem Falle war die Diagnose bei einem Recidiv nach Exstirpation des krebsigen Uterus gestellt worden.

In diesen Fällen war schlechtweg Carcinom diagnosticirt worden; inwieweit sich darunter adenomatöse Formen befanden, ist nicht mehr festzustellen, dagegen ist in 12 Fällen ausdrücklich

1) In der Dissertation steht in Folge eines Druckfehlers 35.

Digitized by Google

die Diagnose Adenocarcinom bezw. malignes Adenom gestellt und in 7 von den 9 Fällen, über welche weitere Nachrichten vorliegen, bestätigt worden. Bei 1 Patientin ist am Uterus nicht alles in Ordnung, doch Krebs nicht festzustellen, 1 Patientin befindet sich wohl. Zu bemerken ist, daß die Stückchen, an welchen in 1 Falle malignes Adenom diagnosticirt wurde, von einer weichen Geschwulst der Portio stammten; 15 Monate später war ein inoperabeles Cervix-Carcinom vorhanden.

Von den festgestellten 4 Sarcomen saßen 2 in der Cervix, 2 im Corpus; sie wurden sämmtlich durch die Operation bestätigt. In 1 anderen Falle konnte nur erklärt werden, daß der Befund der klinischen Annahme einer jauchig zerfallenden Geschwulst nicht widerspreche; am exstirpirten Uterus fand sich ein Riesenzellen enthaltendes Sarcom.

Ueber 2 sog. Deciduome (Chorionkrebse), die an Stückchen diagnosticirt und später am Uterus untersucht wurden, hat Dr. Aschoff im Archiv für Gynaec. 50 berichtet.

13 mal wurde der Befund zu einer sicheren Diagnose einer malignen Neubildung für nicht ausreichend erklärt. Unter den weiter zu verfolgenden 6 Fällen ist in der That 5 mal kein weiteres Zeichen einer malignen Neubildung hervorgetreten, nur 1 mal fand sich an dem später exstirpirten Uterus eine krebsige Neubildung, die aber ganz von Eiterkörperchen durchsetzt war, was an den ausgeschabten Stückchen, die keine Muskulatur enthielten, die Diagnose erschwert hatte.

In 8 Fällen wurde einfaches bezw. polypöses Adenom diagnosticirt, obwohl 3 mal in den klinischen Berichten direkt Verdacht auf Carcinom ausgesprochen war. Unsere Diagnose wurde in den 6 verfolgbaren Fällen (darunter 2 der verdächtigen) durch den weiteren Verlauf, einmal auch an dem exstirpirten Uterus bestätigt. In diesem Falle war das untersuchte Stückchen einer Blumenkohlgeschwulst an der vorderen Lippe entnommen. Es kam noch eine 2. gutartige Zottengeschwulst (Epithelioma papillare) von der Portis vaginalis einer 32 jährigen Frau zur Untersuchung, welche jetzt, nach 16 Jahren, noch gesund ist.

Die Diagnose Granulationsgewebe wurde 3 mal an aus dem Cervicalkanal stammenden Stückchen gestellt und 38 mal Erosionen des Muttermundes festgestellt. In 24 der letzten Fälle war dabei klinisch ein mehr oder weniger großer Verdacht auf Krebs vorhanden. 27 Fälle, darunter 18 verdächtige konnten controllirt werden, alle unsere Diagnosen wurden durch den Verlauf als richtig erwiesen.

Digitized by Google

Am häufigsten (in 70 Fällen) lautete die Diagnose Endometritis productiva, auch in 27 Fällen, bei welchen von den behandelnden Aerzten Verdacht auf Krebs geäußert war. Weitere Nachrichten gingen von 48 Patientinnen, darunter 21 verdächtigen, ein und auch hier wurde durchweg unsere Diagnose bestätigt.

Es folgen 4 Fälle, bei welchen der Befund an den übersandten, aus dem Uterus stammenden Massen, ein besonderer war: 1 mal ein Gerinnsel mit Leukocyten und rothen Blutkörperchen, 1 mal Plattenepithel mit Eiterkörperchen und Schimmelpilzen, 1 mal Fibringerinnsel. Der 4. Fall ist besonders interessant, denn das im Februar 1895 übersandte Stückchen enthielt Tuberkel mit Riesenzellen und Bacillen; das jetzige Befinden der Frau ist ganz gut, keine Tuberkulose sonst nachweisbar. 11 mal konnten wir die ausgesprochene Vermuthung, daß die Stückchen Abortreste seien, bestätigen, 13 mal, wo nichts davon mitgetheilt war, wurde derselbe Nachweis geführt. In den übrig bleibenden 10 Fällen wurde 1 mal in der übersandten Geschwulst ein Blutklumpen, 5 mal Produkte der Menstruation erkannt, 4 mal sagen die Protokolle nur, daß an den vom Uterus entfernten Massen keine pathologische Veränderung zu sehen war.

Zum Schluß stellt Verf. die Fälle, bei welchen die Diagnosen haben controllirt werden können, in folgender Weise zusammen: es wurden diagnosticirt

übereinstimmend mit der klinischen Annahme 43 maligne Neubildungen; als richtig erwiesen sich bisher 40 dieser Diagnosen;

entgegen der klinischen Vermuthung als nicht krebsige Erosionen 17 Fälle mit Bestätigung sämmtlicher Diagnosen;

entgegen der klinischen Vermuthung als einfache hyperplastische Endometritis 21 Fälle, welche sich ebenfalls ohne Ausnahme bestätigen ließen;

entgegen der klinischen Annahme als einfaches Adenom 2 Fälle, in denen sich die Diagnose als richtig erwies.

Auch in den übrigen controllirbaren Fällen von gutartiger Erkrankung, in welchen die klinische und histologische Diagnose übereinstimmten, war nach dem weiteren Verlauf eine Bestätigung der Diagnosen zu constatiren.

8. Durch die seitherigen Untersuchungen besonders von Langhans und Lubarsch war nur bei der Minderzahl der untersuchten Geschwülste Glycogen nachgewiesen worden, ich veranlaßte deshalb auf Grund der entgegenstehenden Angaben Verneuils und Braults Herrn Behr zu Controlluntersuchungen, deren Resultat derselbe in seiner Dissertation, Ueber das Vorkommen von

Digitized by Google

Glycogen in Geschwülsten, 1897, niedergelegt hat. Es kamen im Ganzen von einwandfreiem Material 51 Geschwülste zur Untersuchung, 29 Carcinome, 17 Sarcome, 2 Endotheliome, 2 Deciduome, 1 Myxochondrom, und es konnte in 32 derselben Glycogen in mehr oder weniger großer Menge nachgewiesen werden.

Im Einzelnen gestalteten sich die Befunde folgendermaßen: von 11 Plattenepithelkrebsen enthielten 10 Glycogen; der 11. Tumor war von auswärts zugeschickt worden, also relativ spät zur Untersuchung gekommen; unter 8 Brustkrebsen fanden sich 3 glycogenhaltige; es waren weiche Krebse, die Scirrhen waren sämmtlich frei von Glycogen; 1 schnell gewachsener Hodenkrebs enthielt viel Glycogen, dagegen fehlte dasselbe bei den Krebsen des Magendarmkanals und des Pankreas, die bei Sectionen gewonnen worden waren. Gefunden wurde Glycogen in den beiden Endotheliomen und Deciduomen, in dem Myxochondrom (in Knorpelzellen), sowie in 13 der 17 untersuchten Sarcome, welche theils reine, theils Mischsarcome waren. Auffällig war der negative Befund in einem rapide gewachsenen weichen Oberarmsarcom eines 11 jährigen Mädchens.

Das Glycogen fand sich in Schollen und Kugeln, häufig in Gestalt von Halbmonden, welche dann in benachbarten Zellen gleiche Anordnung zeigten. Stets war das Glycogen in Zellen enthalten, nur einmal fand es sich auch im interstitiellen Gewebe. Bei der Beurtheilung der Befunde ist zu beachten, daß die Löslichkeit des Glycogen in Wasser und verdünntem Alcohol eine verschiedene sein kann; für Langhans' Angabe, daß in Knochentumoren eine schnelle Lösung stattfindet, scheint das erwähnte Sarcom eines Kindes zu sprechen. Mit Langhans entgegen Brault schreibt der Verf. der postmortalen Zersetzung des Glycogen eine große Bedeutung zu, zumal in den Fällen, wo eine Verjauchung der Geschwülste vorhanden ist. Das Alter der Patienten hat nur geringen Einfluß, noch weniger der allgemeine Ernährungszustand.

Nach seinen Befunden stellt sich Verf. zwischen Langhans und Lubarsch einer- Brault andererseits, da er das Glycogen häufiger wie jene, besonders auch in Sarcomen, Mammacarcinomen, Deciduomen, aber nicht so regelmäßig wie dieser gefunden hat. Brault gegenüber wird betont, daß eine dunklere diffuse Färbung der Zellen noch nicht als Beweis für Glycogengehalt anerkannt werden könne und in Betreff der negativen Befunde wird darauf hingewiesen, daß das Glycogen oft nur an umschriebener Stelle im Tumor angehäuft ist, so daß nur zahlreiche, von verschiedenen Abschnitten desselben entnommene Stücke sicheres Resultat er-

Digitized by Google

geben können. Je schneller ein Tumor wuchs, um so eher kann man Glycogengehalt erwarten.

Einen weiteren interessanten Befund ergaben die Plattenepithelkrebse, indem nicht nur in den Krebswucherungen selbst (hauptsächlich in den peripherischen Schichten der Perlkugeln), sondern auch, was schon länger bekannt war, in der Epidermis da, wo die Interpapillartheile am Rande des Tumors zapfenartig verlängert erschienen, sowie, was mittlerweile auch von Brault angegeben worden ist, in der Wurzelscheide der Haarbälge, nicht innerhalb des Tumors, sondern in der näheren und selbst weiteren Umgebung desselben, reichliche Mengen von Glycogen gefunden wurden. Da nach Barfurth die Wurzelscheiden bei Embryonen und an solchen Haaren, welche stark wachsen, Glycogen enthalten, und da für die Epidermis wohl eine ähnliche Annahme gemacht werden kann, so liefern die Befunde den Beweis, daß in der Umgebung der Hautkrebse ein beschleunigtes Wachsthum an Epidermis und Haarwurzelscheiden stattfindet. Daß dieses verstärkte Wachsthum nicht auf die Umgebung eines epithelialen Tumors beschränkt ist, beweist der Befund von Wurzelscheidenglycogen über einem selbst glycogenfreien Sarcom und in (2) Fällen von Hautlupus.

Digitized by Google

Ueber lineare Formen mit ganzzahligen Variabeln.

Von

A. Hurwitz in Zürich,
correspondirendem Mitgliede der Gesellschaft.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Juni 1897 von D. Hilbert.)

Herr Minkowski hat in seinem Buche „Geometrie der Zahlen" den folgenden, durch seinen elementaren Charakter, sowie durch seine vielfältige Anwendbarkeit bemerkenswerthen Satz aufgestellt und bewiesen[1]):

„In n ganzen homogenen linearen Formen mit n Variabeln, mit beliebigen reellen Coefficienten und einer von Null verschiedenen Determinante Δ kann man den Variabeln immer solche ganzzahlige Werthe, die nicht sämmtlich Null sind, geben, daß dabei alle Formen absolute Beträge $\leqq \sqrt[n]{\text{abs.}\Delta}$ erlangen".

Für diesen Satz theilte mir Herr Minkowski einen von Herrn Hilbert herrührenden rein arithmetischen Beweis mit, der in der zweiten Lieferung der „Geometrie der Zahlen" aufgenommen werden soll. Durch diese Mittheilung angeregt, fand ich einen weiteren auf ähnlichen Principien beruhenden Beweis, der

1) H. Minkowski: „Geometrie der Zahlen" (Leipzig 1896) pag. 104. Was die Anwendungen des Satzes auf die Theorie der quadratischen Formen und die Theorie der algebraischen Zahlkörper angeht, so vergleiche man § 41—44 des citirten Werkes, ferner Herrn Minkowski's Abhandlung: „Ueber die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen", Crelle's Journal, Bd. 107, pag. 278 ff., und den von Herrn Hilbert der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstatteten Bericht: „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper" Satz 42—47, Satz 50.

Digitized by Google

mit sehr einfachen Hülfsmitteln operirt und sich durch seine Kürze empfiehlt. Die folgenden Zeilen sind der Darlegung dieses Beweises gewidmet.

I.

Es seien

$$(1) \qquad f_i = a_{1i}u_1 + a_{2i}u_2 + \cdots + a_{ni}u_n \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

n ganzzahlige lineare Formen der Variabeln $u_1, u_2, \cdots u_n$. Die Determinante dieser Formen, deren absoluter Werth mit

$$(2) \qquad \text{abs.}\,|a_{hi}| = D$$

bezeichnet werde, wird von Null verschieden vorausgesetzt.

Den Begriffsbestimmungen Kroneckers entsprechend mögen zwei lineare ganzzahlige Formen φ, ψ der Variabeln $u_1, u_2, \cdots u_n$ congruent modulis $f_1, f_2 \cdots f_n$ heißen, in Zeichen:

$$(3) \qquad \varphi \equiv \psi \ (\text{modd. } f_1, f_2, \cdots f_n),$$

wenn die Differenz $\varphi - \psi$ darstellbar ist in der Gestalt

$$(4) \qquad \varphi - \psi = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n,$$

wo $x_1, x_2, \cdots x_n$ ganze Zahlen bezeichnen. Im anderen Falle heißen φ und ψ incongruent modulis $f_1, f_2, \cdots f_n$. Den wesentlichsten Stützpunkt für den zu erbringenden Beweis bildet nun der Satz:

Die Anzahl der modulis $f_1, f_2, \cdots f_n$ incongruenten Linearformen beträgt D.

Dieser Satz ist in anderer Form schon verschiedentlich bewiesen worden[1]). Doch möge hier der Vollständigkeit wegen eine kurze Begründung desselben Platz finden.

Bezeichnet k eine der Zahlen $1, 2, \cdots n$, so besitzt die Congruenz

$$(5) \qquad \delta_k u_k + \delta_{k,k+1} u_{k+1} + \cdots + \delta_{k,n} u_n \equiv 0 \ (\text{modd. } f_1, f_2, \cdots f_n),$$

in welcher die ganzen Zahlen $\delta_k, \delta_{k,k+1}, \cdots \delta_{k,n}$ als Unbekannte anzusehen sind, solche Lösungen, in welchen δ_k eine positive Zahl (nicht Null) ist. Denn sicher ist $Du_k \equiv 0$ (modd. $f_1, f_2, \cdots f_n$). Unter den Lösungen von (5) wähle man eine solche, in welcher δ_k positiv und möglichst klein ist und setze nun

$$(6) \qquad g_k = \delta_k u_k + \delta_{k,k+1} u_{k+1} + \cdots + \delta_{k,n} u_n \qquad (k = 1, 2, \cdots n)$$

---

1) Vgl. z. B. Frobenius: „Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten", Crelle's Journal, Bd. 86, pag. 174 ff.

Digitized by Google

Ist φ eine beliebige ganzzahlige Linearform, so kann man die ganzen Zahlen $t_1, t_2, \cdots t_n$ so wählen, daß die Form

$$(7) \qquad \varphi - t_1 g_1 - t_2 g_2 - \cdots - t_n g_n = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$$

den Bedingungen

$$(8) \qquad 0 \leqq c_1 < \delta_1, \qquad 0 \leqq c_2 < \delta_2, \quad \cdots \quad 0 \leqq c_n < \delta_n$$

genügt. Ferner können zwei verschiedene diesen Bedingungen genügende Formen

$$(9) \qquad c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$$

nicht congruent sein modd. $f_1, f_2, \cdots f_n$, weil durch Subtraction derselben eine Form erhalten würde, deren Existenz durch die Bestimmungsweise der Formen g_k ausgeschlossen ist.

Hieraus folgt, daß jede Linearform φ einer und nur einer der $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n$ Formen (9), die durch die Ungleichungen (8) charakterisirt sind, congruent ist. Insbesondere ist jede modulis $f_1, f_2, \cdots f_n$ der Null congruente Form in der Gestalt $t_1 g_1 + t_2 g_2 + \cdots t_n g_n$ darstellbar und hieraus geht hervor, daß nicht nur die Formen g_1, $g_2, \cdots g_n$ durch die Formen $f_1, f_2, \cdots f_n$, sondern auch umgekehrt diese durch jene ganzzahlig ausgedrückt werden können. Daher stimmen die absoluten Werthe der Determinanten der beiden Formensysteme überein, und es ist also die Anzahl $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n$ der modulis $f_1, f_2, \cdots f_n$ incongruenten Linearformen gleich D.

II.

Es sei $r+1$ die erste ganze Zahl, welche über $\sqrt[n]{D}$ liegt, so daß

$$(1) \qquad r^n \leqq D < (r+1)^n$$

ist. Unter den $(r+1)^n$ Formen

$$(2) \qquad c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n,$$

welche durch die Ungleichungen

$$(3) \qquad 0 \leqq c_1 \leqq r, \qquad 0 \leqq c_2 \leqq r, \quad \cdots \quad 0 \leqq c_n \leqq r$$

charakterisirt sind, giebt es dann sicher zwei verschiedene, die modulis $f_1, f_2, \cdots f_n$ congruent sind. Die durch Subtraction zweier solcher Formen entstehende Form

$$(4) \qquad y_1 u_1 + y_2 u_2 + \cdots + y_n u_n$$

Digitized by Google

hat Coefficienten, die zwischen $-r$ und $+r$ liegen, also absolut $\leqq \sqrt[n]{D}$ sind. Ferner ist diese Form darstellbar in der Gestalt

$$y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_nu_n = x_1f_1 + x_2f_2 + \cdots + x_nf_n, \tag{5}$$

wo $x_1, x_2, \cdots x_n$ ganze Zahlen bezeichnen, die nicht sämmtlich Null sind. Durch Vergleich der Coefficienten von $u_1, u_2, \cdots u_n$ in der Gleichung (5) ergiebt sich somit:

„Sind

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{6}$$

n ganzzahlige Linearformen der Variabeln $x_1, x_2, \cdots x_n$ mit einer nicht verschwindenden Determinante vom absoluten Betrag D, so kann man den Variabeln immer solche ganzzahlige Werthe, die nicht sämmtlich Null sind, geben, daß dabei alle Formen absolute Beträge $\leqq \sqrt[n]{D}$ erlangen". Wie man sieht, ist dieses der Minkowski'sche Satz für ganzzahlige Formen.

III.

Nunmehr seien

$$r_{i1}x_1 + r_{i2}x_2 + \cdots + r_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{1}$$

n lineare Formen mit rationalen Coefficienten. Der absolute Werth Δ ihrer Determinante sei von Null verschieden. Die positive ganze Zahl g wähle man so, daß die Formen

$$g(r_{i1}x_1 + r_{i2}x_2 + \cdots r_{in}x_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{2}$$

ganzzahlig sind. Da der absolute Werth der Determinante dieser Formen $g^n \cdot \Delta$ ist, so kann man durch nicht sämmtlich verschwindende ganzzahlige Werthe von $x_1, x_2, \cdots x_n$ alle Formen absolut $\leqq g\sqrt[n]{\Delta}$, die ursprünglichen Formen (1) also sämmtlich absolut $\leqq \sqrt[n]{\Delta}$ machen. Hiermit ist der Minkowski'sche Satz für Formen mit rationalen Coefficienten erwiesen.

IV.

Bei der Uebertragung des Satzes auf Formen mit beliebigen Coefficienten bedarf man eines Hülfssatzes, der nun zunächst abgeleitet werden soll.

Eine Vereinigung von mehreren (endlich oder unendlich vielen) Systemen von je n linearen Formen möge eine „Menge" von For-

Digitized by Google

mensystemen heißen[1]). Wir betrachten eine solche Menge, die folgenden Bedingungen genügt:

Es lassen sich zwei positive Größen δ und ε angeben derart, daß für jedes beliebige Formensystem

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n, \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{1}$$

welches der Menge angehört, jeder einzelne Coefficient c_{ik} seinem absoluten Werthe nach unter δ liegt und der absolute Werth der Determinante $|c_{ik}|$ größer als ε ist.

Es sei jetzt (1) ein bestimmtes aus der Menge herausgehobenes Formensystem, ferner $x_1, x_2, \cdots x_n$ ein System ganzer Zahlen, für welches die Formenwerthe $y_1, y_2, \cdots y_n$ sämmtlich absolut $\leqq G$ werden, unter G eine feste positive Größe verstanden. Die Auflösungen der Gleichungen (1) mögen

$$x_i = \gamma_{1i}y_1 + \gamma_{2i}y_2 + \cdots + \gamma_{ni}y_n \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{2}$$

heißen; dann ist γ_{ik} die Unterdeterminante von c_{ik} in der Determinante $|c_{ik}|$ dividirt durch die Determinante selbst. Da jedes der $(n-1)!$ Glieder dieser Unterdeterminante absolut genommen kleiner ist als δ^{n-1}, so hat man:

$$\text{abs. } \gamma_{ik} < (n-1)! \frac{\delta^{n-1}}{\varepsilon} \tag{3}$$

und folglich

$$|x_i| < n! \frac{\delta^{n-1}}{\varepsilon} G. \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{4}$$

Diese Grenze für die absoluten Beträge der ganzen Zahlen $x_1, x_2, \cdots x_n$ hängt nur von δ, ε, G ab. Man kann also folgenden Satz aussprechen:

„Ist $x_1, x_2, \cdots x_n$ ein System ganzzahliger Werthe, für welches die Formen eines aus der Menge herausgehobenen Formensystems sämmtlich absolut genommen $\leqq G$ werden, so findet sich dieses Werthsystem $x_1, x_2, \cdots x_n$ nothwendig unter einer endlichen Anzahl von Werthsystemen, welche ausschließlich von δ, ε, G abhängen".

(Repräsentirt man jedes ganzzahlige Werthsystem $x_1, x_2, \cdots x_n$ durch den Punkt eines Raumes von n Dimensionen mit den Coordinaten $x_1, x_2, \cdots x_n$, so erscheint der vorstehende Satz als Ausfluß der Thatsache, daß die Gesammtheit der Punkte mit ganzzahligen Coordinaten [„Gitterpunkte"] eine Punktmenge ohne Häufungsstelle im Endlichen bildet.)

---

1) G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Mathematische Annalen, Bd. 46, p. 481) und frühere Arbeiten desselben Verfassers.

Digitized by Google

V.

Die Formen

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{1}$$

mögen beliebige reelle Coefficienten und die nicht verschwindende Determinante Δ haben. Jeder Coefficient c_{ik} werde durch eine Cantor'sche Fundamentalreihe dargestellt:

$$c_{ik} = (r_{ik}^{(1)}, r_{ik}^{(2)}, \cdots, r_{ik}^{(\lambda)}, \cdots\cdots) \tag{2}$$

so daß also $r_{ik}^{(\lambda)}$ eine rationale Zahl bezeichnet, die mit unendlich wachsendem λ in c_{ik} übergeht. Bedeutet $\Delta^{(\lambda)}$ die Determinante des Formensystems

$$r_{i1}^{(\lambda)}x_1 + r_{i2}^{(\lambda)}x_2 + \cdots + r_{in}^{(\lambda)}x_n, \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{3}$$

so ist offenbar

$$\lim_{\lambda = \infty} \Delta^{(\lambda)} = \Delta. \tag{4}$$

Denkt man sich für λ nach und nach die Werthe $1, 2, 3, \cdots\cdots$ gesetzt, so erhält man aus (3) eine Menge von Formensystemen, welche den Bedingungen des vorigen Paragraphen genügt, wenn man diejenigen Formensysteme, für welche $\Delta^{(\lambda)} = 0$ sein sollte, unterdrückt. Für jeden bestimmten Index λ kann man $x_1, x_2, \cdots x_n$ solche nicht sämmtlich verschwindende ganzzahlige Werthe geben, daß

$$|r_{i1}^{(\lambda)}x_1 + r_{i2}^{(\lambda)}x_2 + \cdots + r_{in}^{(\lambda)}x_n| \leqq \sqrt[n]{\text{abs.}\Delta^{(\lambda)}} \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{5}$$

wird, und zwar existirt nach dem Satze der vorigen Nummer sicher ein solches System ganzer Zahlen $x_1, x_2, \cdots x_n$, welches die Ungleichungen (5) für unendlich viele Indices λ befriedigt. Für ein solches System $x_1, x_2, \cdots x_n$ kann man zur Grenze $\lambda = \infty$ übergehen und erhält dann:

$$|c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n| \leqq \sqrt[n]{\text{abs.}\Delta}, \tag{6}$$

womit nun der Satz von Minkowski vollständig bewiesen ist.

VI.

Wenn $x_1, x_2, \cdots x_n$ ganze Zahlen sind, welche nicht sämmtlich Null sind und die Ungleichungen (6) befriedigen, so kann entweder in diesen Ungleichungen überall das Zeichen $<$ gelten oder es kann in einer oder mehreren das Gleichheitszeichen stattfinden.

Digitized by Google

Es läßt sich aber folgendermaßen zeigen, daß $x_1, x_2, \cdots x_n$ so bestimmbar sind, daß in irgend $n-1$, z.B. in den $n-1$ letzten Ungleichungen (6) das Kleinerzeichen gilt [1]).

Bezeichnen $k_1, k_2, \cdots k_n$ n positive Größen, welche der Bedingung

$$k_1 k_2 \cdots k_n = \text{abs.} \Delta \tag{1}$$

genügen, so besitzen die Formen

$$\frac{1}{k_i}(c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{2}$$

die Determinante ± 1. Daher lassen sich die nicht sämmtlich verschwindenden ganzen Zahlen $x_1, x_2, \cdots x_n$ so bestimmen, daß

$$|c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n| \leqq k_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{3}$$

ist. Man wähle nun eine Reihe von positiven Größen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\lambda, \cdots\cdots, \tag{4}$$

die sämmtlich $< \sqrt[n]{\text{abs.}\Delta}$ sind und der Bedingung $\lim_{\lambda=\infty} \varepsilon_\lambda = 0$ genügen, und bestimme für jeden Index λ die positive Größe ε'_λ aus der Gleichung

$$(\sqrt[n]{\text{abs.}\Delta} + \varepsilon'_\lambda)(\sqrt[n]{\text{abs.}\Delta} - \varepsilon_\lambda)^{n-1} = \text{abs.}\Delta. \tag{5}$$

Offenbar ist auch $\lim_{\lambda=\infty} \varepsilon'_\lambda = 0$. Für jeden Index λ lassen sich nun [nach (3)] die Ungleichungen

$$\begin{cases} |c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n| \leqq \sqrt[n]{\text{abs.}\Delta} + \varepsilon'_\lambda \\ |c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n| \leqq \sqrt[n]{\text{abs.}\Delta} - \varepsilon_\lambda \qquad (i = 2, 3, \cdots n) \end{cases} \tag{6}$$

befriedigen. Und zwar darf man nach IV annehmen, daß ein und dasselbe System $x_1, x_2, \cdots x_n$ für unendlich viele Indices λ den Ungleichungen (6) genügt. Für ein solches System gilt dann

$$|c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n| < \sqrt[n]{\text{abs.}\Delta} \qquad (i = 2, 3, \cdots n)$$

und der Uebergang zur Grenze $\lambda = \infty$ zeigt, daß zugleich

$$|c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n| \leqq \sqrt[n]{\text{abs.}\Delta}$$

ist.

---

1) Minkowski, Geometrie der Zahlen pag. 106.

Zürich, den 1. Juni 1897.

Digitized by Google

Ueber einen Satz der Theoria Combinationis.

Von

L. Krüger in Potsdam.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Juni 1897 von F. Klein.)

In den Art. 10 und 11 der Theoria Combinationis hat Gauss zwei — wie er selbst sagt — merkwürdige Lehrsätze aufgestellt[1]).

Wenn von der Funktion $\varphi(x)$, die die relative Häufigkeit des Fehlers x oder kurz gesagt das Fehlergesetz darstellt, nur die eine Eigenschaft bekannt ist, bei wachsendem absolutem Betrage des Fehlers abzunehmen oder wenigstens nicht zu wachsen, so kann, wie im Art. 10 ausgeführt ist, die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen die Grenzen $-x_0$ und $+x_0$ falle, nicht kleiner als $\frac{x_0}{m}\sqrt{\frac{1}{3}}$ für $x_0 < m\sqrt{\frac{4}{3}}$ und nicht kleiner als $1-\frac{4}{9}\frac{m^2}{x_0^2}$ für $x_0 > m\sqrt{\frac{4}{3}}$ sein[2]). Hierbei bedeutet m^2 den mittleren Werth der Quadrate der bei den Beobachtungen zu befürchtenden Fehler.

Bezeichnet n^4 den mittleren Werth der Biquadrate aller möglichen Fehler, so findet man alsdann im Art. 11 (ohne Beweis) den Satz ausgesprochen, daß n^4 niemals kleiner als $\frac{9}{5}m^4$ sein könne, wie auch die Funktion $\varphi(x)$ beschaffen sei, wenn sie nur die vorstehend angegebene Eigenschaft hat.

---

1) Carl Friedrich Gauss Werke. Vierter Band. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1873, S. 10 u. f. oder Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von C. F. Gauss. In deutscher Sprache herausgegeben von Dr. A. Börsch und Dr. P. Simon. Berlin 1887, S. 9 u. f.

2) In der Gauss'schen Anzeige der Theor. Comb., wo dieser Satz nochmals mitgetheilt wird, S. 100 a. a. O., steht immer irrthümlich $m\sqrt{\frac{3}{4}}$ an Stelle von $m\sqrt{\frac{4}{3}}$. Dieser Fehler ist auch in die angegebene deutsche Ausgabe, S. 195, übergegangen.

Digitized by Google

Im Folgenden soll nun versucht werden, einen Beweis des zweiten Satzes zu geben. Zugleich wird eine Ausdehnung desselben auf n_{2p}^{2p}, den mittleren Werth der $2p$ten Potenzen der bei den Beobachtungen möglichen Fehler, erfolgen. Es wird gezeigt werden, daß $\left(\frac{n_{2p}}{n_2}\right)^{2p}$ niemals kleiner als $\frac{3^p}{2p+1}$ und daß ferner $\left(\frac{n_{4p}}{n_{2p}}\right)^{4p}$ niemals kleiner als $\frac{(2p+1)^2}{4p+1}$ sein kann, wenn $\varphi(x)$ nur die obige Voraussetzung erfüllt. Da die Entwicklungen des Art. 10 dazu theilweise nothwendig sind, der dort ausgesprochene Satz sich auch leicht noch etwas allgemeiner fassen läßt, so möge jedoch zunächst dieser eine Darstellung finden.

1.

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler irgend einer Beobachtung innerhalb die Grenzen $-x$ und $+x$ falle, ist

$$(1) \qquad y = \int_{-x}^{+x} \varphi(x)\,dx = \int_0^x \{\varphi(x)+\varphi(-x)\}\,dx.$$

Wenn $x = 0$ ist, ist auch $y = 0$, und wenn $x = \infty$ wird, ist $y = 1$.

Der mittlere Werth der Quadrate aller möglichen Fehler ist

$$(2) \qquad m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2 \{\varphi(x)+\varphi(-x)\}\,dx,$$

und der mittlere Werth der $2p$ten Potenzen

$$(3) \qquad n_{2p}^{2p} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^{2p} \{\varphi(x)+\varphi(-x)\}\,dx.$$

n_2^2 und m^2 sind hiernach identisch.

Setzt man

$$(4) \qquad x = \psi(y),$$

so folgt aus (1)

$$(5) \qquad \frac{dx}{dy} = \psi'(y) = \frac{1}{\varphi(x)+\varphi(-x)}.$$

Nach der Voraussetzung soll der Werth von $\varphi(x)$ abnehmen oder wenigstens nicht wachsen, wenn der Absolutwerth des Fehlers wächst, daher wird $\psi'(y)$ von $y = 0$ bis $y = 1$ beständig

Digitized by Google

zunehmen oder doch niemals abnehmen, mithin muß $\frac{d\psi'(y)}{dy} = \psi''(y)$ in dem Intervall von 0 bis 1 stets positiv sein, jedenfalls kann es nicht negativ werden.

Infolge der Gleichungen (4) und (5) läßt sich für m^2 und n_{2p}^{2p} auch schreiben:

$$(6) \qquad m^2 = n_2^2 = \int_0^1 [\psi(y)]^2 dy \quad \text{und} \quad n_{2p}^{2p} = \int_0^1 [\psi(y)]^{2p} dy.$$

Es seien x_0 und y_0 zwei entsprechende Werthe der Gl. (4), also $x_0 = \psi(y_0)$. Nach dem Taylor'schen Satze ist nun:

$$(7) \qquad \psi(y) = \psi(y_0) + (y-y_0)\psi'(y_0) + \frac{(y-y_0)^2}{1.2}\psi''(y_0 + \varepsilon(y-y_0))$$
$$(1 > \varepsilon > 0).$$

Das Restglied $\frac{(y-y_0)^2}{1.2}\psi''(y_0+\varepsilon(y-y_0))$ ist stets positiv, da sowohl $(y-y_0)^2$ als auch nach dem Vorhergehenden ψ'' stets positiv ist. Daher kann, wenn man

$$(8) \qquad F(y) = \psi(y_0) + (y-y_0)\psi'(y_0)$$

setzt,

$$(9) \qquad \psi(y) - F(y)$$

niemals kleiner als Null sein. Mithin ist sicher, so lange $F(y)$ positiv ist, $[\psi(y)]^{2p}$ größer, jedenfalls aber nicht kleiner als $[F(y)]^{2p}$.

Denkt man sich die Gl. $x = \psi(y)$ auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, so wird die durch sie dargestellte Kurve der y-Axe die convexe Seite zukehren, weil ja $\psi''(y)$ beständig positiv ist. Die Kurve verläuft asymptotisch zu der Parallelen zur x-Axe durch den Punkt $y = 1$, denn für $y = 1$ ist $x = \infty$. Für $y = 0$ ist auch $x = 0$. Da nun nach Gl. (8)

$$F(y_0) = \psi(y_0)$$

und

$$F'(y) = \psi'(y_0)$$

ist, so stellt die Gleichung (8) die Tangente an die Kurve $x = \psi(y)$ im Punkte (x_0, y_0) dar, die also, wie auch aus (9) folgt, die Kurve niemals schneidet.

Bezeichnet man den durch diese Tangente hergestellten Abschnitt auf der y-Axe mit fy_0, wobei f ein echter Bruch ist, und

Digitized by Google

mit ϑ_0 den Winkel, den sie mit der positiven y-Axe bildet, so ist

$$\psi'(y_0) = \tan\vartheta_0 = \frac{x_0}{y_0(1-f)}. \tag{10}$$

Aus der Gl. (8) ergiebt sich nun

$$F(y) = \psi'(y_0)\left\{y - y_0 + \frac{\psi(y_0)}{\psi'(y_0)}\right\}$$

$$= \frac{x_0}{y_0(1-f)}(y - fy_0). \tag{11}$$

Da $F(y)$ positiv ist, wenn $y > fy_0$, so ist, wie aus oben stehendem folgt,

$$\int_0^1 [\psi(y)]^{2p}\,dy > \int_{fy_0}^1 [\psi(y)]^{2p}\,dy > \int_{fy_0}^1 [F(y)]^{2p}\,dy,$$

also

$$n_{2p}^{2p} > \int_{fy_0}^1 \left(\frac{x_0}{y_0(1-f)}\right)^{2p}(y - fy_0)^{2p}\,dy$$

oder

$$n_{2p}^{2p} > \left(\frac{x_0}{y_0(1-f)}\right)^{2p}\frac{(1-fy_0)^{2p+1}}{2p+1},$$

folglich

$$(2p+1)y_0^{2p}\frac{(1-f)^{2p}}{(1-fy_0)^{2p+1}} > \frac{x_0^{2p}}{n_{2p}^{2p}}. \tag{12}$$

Es fragt sich, für welchen Werth von f der Ausdruck linker Hand in (12) sein Maximum erreicht. Seine Ableitung nach f ist

$$-(2p+1)y_0^{2p}\frac{(1-f)^{2p-1}}{(1-fy_0)^{2p+2}}\{2p - (2p+1)y_0 + fy_0\}. \tag{13}$$

So lange $y_0 < \frac{2p}{2p+1}$ ist, bleibt die Ableitung immer negativ, daher muß

$$(2p+1)y_0^{2p}\frac{(1-f)^{2p}}{(1-fy_0)^{2p+1}}$$

beständig abnehmen, wenn f die Werthe von 0 bis 1 durchschreitet; mithin gehört der größte Werth zu $f = 0$, und zwar ist derselbe $= (2p+1)y_0^{2p}$.

Ist aber $y_0 > \frac{2p}{2p+1}$, so wird der Maximalwerth für

Digitized by Google

$f = 2p+1-\frac{2p}{y_0}$ erhalten, für den die Ableitung Null ist. In diesem Falle ist der größtmögliche Werth $= \left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{2p}\frac{1}{1-y_0}$.

Man hat mithin das folgende Ergebnis:

$$\text{(14)} \quad \begin{aligned} &\text{Für } y_0 < \frac{2p}{2p+1} \quad \text{ist} \quad \frac{x_0}{n_{2p}} < \sqrt[2p]{(2p+1)}\, y_0 \\ &\text{„ } y_0 > \frac{2p}{2p+1} \quad \text{„} \quad \frac{x_0}{n_{2p}} < \frac{2p}{2p+1}\sqrt[2p]{\frac{1}{1-y_0}}. \end{aligned}$$

Für $y_0 = \frac{2p}{2p+1}$ ergiebt sich übereinstimmend nach beiden Ungleichheiten:

$$\frac{x_0}{n_{2p}} < \frac{2p}{(2p+1)^{\frac{2p-1}{2p}}}.$$

Aus der zuerst angegebenen Ungleichheit folgt:

$$y_0 > \sqrt[2p]{\frac{1}{2p+1}} \cdot \frac{x_0}{n_{2p}}.$$

Dabei ist stets

$$\left(\frac{x_0}{n_{2p}}\right)^{2p} < \frac{(2p)^{2p}}{(2p+1)^{2p-1}}.$$

Dagegen findet man aus der zweiten Ungleichheit:

$$y_0 > 1-\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{2p} \cdot \left(\frac{n_{2p}}{x_0}\right)^{2p}.$$

Sie gilt, wenn $y_0 > \frac{2p}{2p+1}$ ist. Das trifft aber zu für

$$\left(\frac{x_0}{n_{2p}}\right)^{2p} > \frac{(2p)^{2p}}{(2p+1)^{2p-1}}.$$

Der durch die Ungleichheiten (14) ausgedrückte Satz läßt sich daher auch so aussprechen:

Die Wahrscheinlichkeit y_0, daß der Fehler zwischen die Grenzen $-x_0$ und $+x_0$ falle, ist größer (sicher nicht kleiner) als

$$\frac{x_0}{\sqrt[2p]{(2p+1)\, n_{2p}}},$$

wenn x_0^{2p} kleiner als

$$\frac{(2p)^{2p}}{(2p+1)^{2p-1}}\, n_{2p}^{2p}$$

Digitized by Google

ist, und sie ist größer (sicher nicht kleiner) als:

$$1-\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{2p}\cdot\left(\frac{n_{2p}}{x_0}\right)^{2p},$$

wenn x_0^{2p} größer als

$$\frac{(2p)^{2p}}{(2p+1)^{2p-1}}n_{2p}^{2p}$$

ist. Wenn

$$x_0^{2p} = \frac{(2p)^{2p}}{(2p+1)^{2p-1}}n_{2p}^{2p}$$

ist, so ist die zugehörige Wahrscheinlichkeit größer (sicher nicht kleiner) als $\frac{2p}{2p+1}$.

Nimmt man $p = 1$, so hat man den Satz in der von Gauss gegebenen Form.

2.

Es soll nun gezeigt werden, daß $\left(\frac{n_4}{n_2}\right)^4$ nicht kleiner als $\frac{9}{5}$ werden kann, vorausgesetzt, daß $\varphi(x)$, bei wachsendem absolutem Betrage des Fehlers immer abnimmt oder wenigstens nicht wächst.

Man denke sich die durch die Gleichung $x = \psi(y)$ dargestellte Kurve durch ein einhüllendes Tangentenpolygon ersetzt. Es sei also im Anfangspunkte $P_1(x_1 = 0,\ y_1 = 0)$ die Tangente an die Kurve gezogen, auf der Tangente gehe man bis zum Punkte $P_2(x_2, y_2)$; von diesem werde wieder eine Tangente an die Kurve gelegt, die in $P_3(x_3, y_3)$ berührt und bis zum Punkte $P_4(x_4, y_4)$ geht u. s. f. Das letzte Tangentenstück beginne im Punkte $P_{2r-2}(x_{2r-2}, y_{2r-2})$, berühre die Kurve im Punkte $P_{2r-1}(x_{2r-1}, y_{2r-1})$ und schneide auf der Geraden $y = 1$ die Strecke x_{2r} ab. Wenn man die Tangentenstücke klein genug macht, kann man der Kurve so nahe kommen, wie man will.

Die Gleichung der Tangente im Punkte $P_{2i-1}(x_{2i-1}, y_{2i-1})$ ist

$$x = \tan\vartheta_{2i-1}(y - f_{2i-1}y_{2i-1}); \tag{1}$$

ϑ_{2i-1} ist der Winkel, den die Tangente mit der positiven y-Axe bildet, und $f_{2i-1}y_{2i-1}$ der von ihr auf der y-Axe hergestellte Abschnitt, vom Nullpunkte aus gerechnet. Wie bereits unter 1. bemerkt wurde, muß der Winkel ϑ wachsen, wenn y wächst. Für

Digitized by Google

das Tangentenstück vom Punkte x_{2i-2}, y_{2i-2} bis zum Punkte x_{2i}, y_{2i} ist nun

$$(2) \qquad n_2^3 = \int x^3 dy = \operatorname{ctg}\vartheta_{2i-1} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} x^3 dx = \tfrac{1}{4} \operatorname{ctg}\vartheta_{2i-1} (x_{2i}^4 - x_{2i-2}^4),$$

und

$$(3) \qquad n_4^4 = \int x^4 dy = \tfrac{1}{5} \operatorname{ctg}\vartheta_{2i-1} (x_{2i}^5 - x_{2i-2}^5).$$

Bildet man jetzt die entsprechenden Ausdrücke längs der gebrochenen Linie $P_1 P_2 P_4 P_6 \ldots P_{2r}$, so giebt deren Summe

$$n_2^3 = \int x^3 dy = \tfrac{1}{4}\{x_2^3 \operatorname{ctg}\vartheta_1 + (x_4^3 - x_2^3)\operatorname{ctg}\vartheta_3 + \cdots + (x_{2r}^3 - x_{2r-2}^3)\operatorname{ctg}\vartheta_{2r-1}\}$$
$$= \tfrac{1}{4}\{x_2^3(\operatorname{ctg}\vartheta_1 - \operatorname{ctg}\vartheta_3) + x_4^3(\operatorname{ctg}\vartheta_3 - \operatorname{ctg}\vartheta_5) + \cdots + x_{2r-2}^3(\operatorname{ctg}\vartheta_{2r-3} - \operatorname{ctg}\vartheta_{2r-1}) + x_{2r}^3 \operatorname{ctg}\vartheta_{2r-1}\}.$$

Da aber
$$\operatorname{ctg}\vartheta_1 = \frac{y_2}{x_2}$$
$$\operatorname{ctg}\vartheta_3 = \frac{y_2 - f_3 y_3}{x_2} = \frac{y_4 - f_3 y_3}{x_4}$$
$$\operatorname{ctg}\vartheta_5 = \frac{y_4 - f_5 y_5}{x_4} = \frac{y_6 - f_5 y_5}{x_6}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\operatorname{ctg}\vartheta_{2r-1} = \frac{y_{2r-2} - f_{2r-1} y_{2r-1}}{x_{2r-2}} = \frac{1 - f_{2r-1} y_{2r-1}}{x_{2r}},$$

also
$$\operatorname{ctg}\vartheta_1 - \operatorname{ctg}\vartheta_3 = \frac{f_3 y_3}{x_2} = \frac{\Delta y_{1\cdot 3}}{x_2}$$
$$\operatorname{ctg}\vartheta_3 - \operatorname{ctg}\vartheta_5 = \frac{f_5 y_5 - f_3 y_3}{x_4} = \frac{\Delta y_{3\cdot 5}}{x_4}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$(4) \qquad \operatorname{ctg}\vartheta_{2r-3} - \operatorname{ctg}\vartheta_{2r-1} = \frac{f_{2r-1} y_{2r-1} - f_{2r-3} y_{2r-3}}{x_{2r-2}} = \frac{\Delta y_{2r-3\cdot 2r-1}}{x_{2r-2}}$$
$$\operatorname{ctg}\vartheta_{2r-1} = \frac{1}{x_{2r}}\{1 - [\Delta y_{1\cdot 3} + \Delta y_{3\cdot 5} + \cdots + \Delta y_{2r-3\cdot 2r-1}]\}$$

ist, so folgt:

$$(5) \qquad n_2^3 = \tfrac{1}{4} x_{2r}^3 \left\{1 - \left[\left(1 - \left(\frac{x_2}{x_{2r}}\right)^2\right)\Delta y_{1\cdot 3} + \left(1 - \left(\frac{x_4}{x_{2r}}\right)^2\right)\Delta y_{3\cdot 5} + \cdots + \left(1 - \left(\frac{x_{2r-2}}{x_{2r}}\right)^2\right)\Delta y_{2r-3\cdot 2r-1}\right]\right\}.$$

Die Δy sind sämmtlich positive Größen, da ϑ mit wachsendem y zunimmt.

Je kleiner man die Δy wählt, um so näher kommt man dem wahren Werth von n_2^3, der der Kurve entspricht.

Digitized by Google

In derselben Weise ergiebt sich für n_4^4 längs der gebrochenen Linie $P_1 P_2 P_4 \dots P_{2r}$:

$$n_4^4 = \int x^4\, dy$$

$$(6) \qquad = \tfrac{1}{5} x_{2r}^4 \left\{ 1 - \left[\left(1 - \left(\frac{x_2}{x_{2r}}\right)^4\right) \Delta y_{1\cdot 3} + \left(1 - \left(\frac{x_4}{x_{2r}}\right)^4\right) \Delta y_{3\cdot 5} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cdots + \left(1 - \left(\frac{x_{2r-2}}{x_{2r}}\right)^4\right) \Delta y_{2r-3\cdot 2r-1} \right] \right\}.$$

Setzt man

$$1 - \left(\frac{x_{2i}}{x_{2r}}\right)^2 = \alpha_{2i} \quad \text{und} \quad 1 - \left(\frac{x_{2i}}{x_{2r}}\right)^4 = \beta_{2i},$$

so ist allgemein

$$(7) \qquad \beta = 2\alpha - \alpha^2,$$

und für die Gleichungen (5) und (6) läßt sich schreiben:

$$(8) \qquad \begin{aligned} n_2^2 &= \tfrac{1}{3} x_{2r}^2 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{2i} \cdot \Delta y_{2i-1\cdot 2i+1} \right\} \\ n_4^4 &= \tfrac{1}{5} x_{2r}^4 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{r-1} \beta_{2i} \cdot \Delta y_{2i-1\cdot 2i+1} \right\}. \end{aligned}$$

α und β sind echte Brüche, die mit wachsendem i abnehmen; $\alpha_2 = \beta_{2r} = 0$.

Aus den beiden Gleichungen (8) folgt nun:

$$(9) \qquad \left(\frac{n_4}{n_2}\right)^4 = \frac{9}{5} \frac{1 - \sum_{i=1}^{i=r} (2\alpha_{2i} - \alpha_{2i}^2) \Delta y_{2i-1\cdot 2i+1}}{\left(1 - \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_{2i} \Delta y_{2i-1\cdot 2i+1}\right)^2}.$$

Wenn sämmtliche Δy Null sind, d. h. wenn $x = \psi(y)$ eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade darstellt, so ist

$$\left(\frac{n_4}{n_2}\right)^4 = \frac{9}{5}.$$

Dieser Fall tritt ein, wenn $x = ay$ ist, wo a der Werth von x ist, der zu $y = 1$ gehört, mithin den größtmöglichen Fehler bezeichnet. Nach Gl. (5) unter 1. ist dann

$$\frac{dx}{dy} = a = \frac{1}{\varphi(x) + \varphi(-x)}, \text{ also } \varphi(x) = \frac{1}{2a} = \text{const.}$$

Daher

$$n_2^2 = \int_{-a}^{+a} \frac{x^2}{2a}\, dx = \frac{a^2}{3} \quad \text{und} \quad n_4^4 = \int_{-a}^{+a} \frac{x^4}{2a}\, dx = \frac{a^4}{5}.$$

Digitized by Google

An Stelle der Gl. (9) kann man auch setzen:

$$(10)\qquad \left(\frac{n_4}{n_2}\right)^4 = \frac{9}{5}\left\{1+\frac{\sum \alpha_{2i}^2 \Delta y_{2i-1,2i+1} - (\sum \alpha_{2i} \Delta y_{2i-1,2i+1})^2}{(1-\sum \alpha_{2i} \Delta y_{2i-1,2i+1})^2}\right\}.$$

Richtet man die Aufeinanderfolge der Tangenten so ein, daß sämmtliche Δy einander gleich und zwar $= \frac{1}{r}$ werden, so hat man

$$(11)\qquad \left(\frac{n_4}{n_2}\right)^4 = \frac{9}{5}\left\{1+\frac{1}{r}\,\frac{\sum_{i=1}^{r}\alpha_{2i}^2 - \frac{1}{r}\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_{2i}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{2i}\right)^2}\right\}.$$

Für $\lim r = \infty$ geht dieser Werth in den für die Kurve selbst gültigen über.

Aus (11) ergiebt sich weiter:

$$(12)\qquad \left(\frac{n_4}{n_2}\right)^4 = \frac{9}{5}\left\{1+\frac{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left(\alpha_{2i}-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{2i}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{2i}\right)^2}\right\}.$$

Der Bruch in der Klammer hat aber stets einen positiven Werth, folglich kann $\left(\frac{n_4}{n_2}\right)^4$ nicht kleiner als $\frac{9}{5}$ werden.

3.

Unter der gleichen Voraussetzung über die Funktion $\varphi(x)$ wie vorher läßt sich auch zeigen, daß

$$\left(\frac{n_{4p}}{n_{2p}}\right)^{4p} \text{ nicht kleiner als } \frac{(2p+1)^2}{4p+1}$$

und

$$\left(\frac{n_{2p}}{n_2}\right)^{2p} \text{ nicht kleiner als } \frac{3^p}{2p+1}$$

werden kann.

Für die gebrochene Tangentenlinie $P_1 P_2 P_4 \ldots P_{2r}$ hat man

$$n_{2p}^{2p} = \int x^{2p}\,dy = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{ctg}\vartheta_{2i-1}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} x^{2p}\,dx = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=1}^{r}\operatorname{ctg}\vartheta_{2i-1}(x_{2i}^{2p+1}-x_{2i-2}^{2p+1})$$

$$= \frac{1}{2p+1}\left\{\sum_{i=1}^{r-1} x_{2i}^{2p+1}(\operatorname{ctg}\vartheta_{2i-1}-\operatorname{ctg}\vartheta_{2i+1}) + x_{2r}^{2p+1}\operatorname{ctg}\vartheta_{2r-1}\right\}$$

oder wenn man die Beziehungen (4) unter 2 anwendet,

Digitized by Google

$$n_{2p}^{2p} = \frac{1}{2p+1}\left\{ x^{2p}\Delta y_{1\cdot 3} + x_4^{2p}\Delta y_{3\cdot 5} + \cdots + x_{2r-2}^{2p}\Delta y_{2r-3\cdot 2r-1} + x_{2r}^{2p}(1-[\Delta y_{1\cdot 3}+\Delta y_{3\cdot 5}+\cdots+\Delta y_{2r-3\cdot 2r-1}])\right\}.$$

Setzt man wieder $\Delta y_{1\cdot 3} = \Delta y_{3\cdot 5} = \cdots = \Delta y_{2r-3\cdot 2r-1} = \frac{1}{r}$, (d. h. die Strecke von $y = 0$ bis $y = 1$ auf der y-Axe ist wie vorher in r gleiche Theile getheilt, und nun werden von den Theilpunkten die Tangenten an die Kurve gezogen), so hat man

$$(1) \qquad n_{2p}^{2p} = \frac{1}{2p+1}\cdot\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_{2i}^{2p}.$$

Wenn r hinreichend groß gewählt wird, so kann man der Kurve durch das Tangentenpolygon so nahe kommen, als man will.

Ebenso ist

$$n_{4p}^{4p} = \frac{1}{4p+1}\cdot\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_{2i}^{4p},$$

mithin

$$\frac{n_{4p}^{4p}}{(n_{2p}^{2p})^2} = \frac{(2p+1)^2}{4p+1}\, r\cdot\frac{\sum_{i=1}^{r} x_{2i}^{4p}}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_{2i}^{2p}\right)^2}$$

$$= \frac{(2p+1)^2}{4p+1}\left\{1+\frac{r}{(\sum x_{2i}^{2p})^2}\left[\sum_{i=1}^{r} x_{2i}^{4p} - \frac{1}{r}(\sum x_{2i}^{2p})^2\right]\right\}.$$

Also wird, wenn man noch

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_{2i}^{2p} = \mu^{2p} \text{ setzt,}$$

$$(2) \qquad \left(\frac{n_{4p}}{n_{2p}}\right)^{4p} = \frac{(2p+1)^2}{4p+1}\left\{1+\frac{1}{r}\frac{1}{\mu^{4p}}\sum_{i=1}^{r}(x_{2i}^{2p}-\mu^{2p})^2\right\}$$

$$= \frac{(2p+1)^2}{4p+1}\left\{1+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left[\left(\frac{x_{2i}}{\mu}\right)^{2p}-1\right]^2\right\}.$$

Hieraus folgt, daß

$$\left(\frac{n_{4p}}{n_{2p}}\right)^{4p} \text{ nicht kleiner als } \frac{(2p+1)^2}{4p+1}$$

sein kann.

Für $p = 1$ kann man wieder aus (2) die Gl. (12) der vorigen Seite erhalten.

In dem besondern Falle, daß $2p$ eine ganze Potenz von 2 ist, also $2p = 2^q$, läßt sich für $\left(\frac{n_{2p}}{n_2}\right)^{2p}$ schreiben:

Digitized by Google

$$\left(\frac{n_{2p}}{n_2}\right)^{2p} = \left(\frac{n_{2p}}{n_p}\right)^{2p} \cdot \left[\left(\frac{n_p}{n_{\frac{1}{2}p}}\right)^{p}\right]^{2} \cdot \left[\left(\frac{n_{\frac{1}{2}p}}{n_{\frac{1}{4}p}}\right)^{\frac{p}{2}}\right]^{4} \cdot \cdots \cdot \left[\left(\frac{n_4}{n_2}\right)^{4}\right]^{\frac{p}{2}}.$$

Wenn man nun rechter Hand für die einzelnen Faktoren die durch die Gl. (2) gegebenen Ausdrücke einsetzt, so sieht man, daß $\left(\frac{n_{2p}}{n_2}\right)^{2p}$ gleich wird dem Produkte aus $\frac{3^p}{2p+1}$ in $q-1$ Faktoren, die sämmtlich größer als 1 sind. Mithin muß in diesem Falle $\left(\frac{n_{2p}}{n_2}\right)^{2p}$ größer als $\frac{3^p}{2p+1}$ sein.

Das gilt aber, wie jetzt gezeigt werden soll, allgemein. Aus der Gl. (1) ergiebt sich für $p = 1$:

$$n_2^2 = \tfrac{1}{3}\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_{2i}^2, \tag{3}$$

daher ist nach (1) und (3):

$$\left(\frac{n_{2p}}{n_2}\right)^{2p} = \frac{3^p}{2p+1}\,\frac{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_{2i}^{2p}}{\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_{2i}^2\right)^p}. \tag{4}$$

Nun ist aber

$$\frac{\frac{1}{r}\sum x_{2i}^{2p}}{\left(\frac{1}{r}\sum x_{2i}^2\right)^p}$$

größer als 1. Denn setzt man für den Augenblick

$$\sum_{i=1}^{r} x_{2i}^2 = s^2 \quad \text{und} \quad \frac{x_{2i}^2}{s^2} = \varepsilon_{2i}, \text{ so ist}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_{2i} = 1. \tag{5}$$

Bestimmt man das Minimum von $\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_{2i}^p$ mit der Gl. (5) als Nebenbedingung, so findet man, daß der kleinste Werth für

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = \cdots = \varepsilon_{2r} = \frac{1}{r}$$

stattfindet. Daher ist

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_{2i}^p > r\left(\frac{1}{r}\right)^p,$$

und mithin, wenn man für ε_{2i} wieder seinen Werth einsetzt,

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_{2i}^{2p} > \left(\frac{\sum x_{2i}^2}{r}\right)^p. \tag{6}$$

Digitized by Google

Also kann

$$\left(\frac{n_{2p}}{n_2}\right)^{2p} \text{ nicht kleiner als } \frac{3^p}{2p+1}$$

werden.

$\left(\frac{n_{2p}}{n_2}\right)^{2p}$ ist gleich $\frac{3^p}{2p+1}$, wenn $\varphi(x) = \frac{1}{2x_{2r}}$ ist,

wo x_{2r} den größtmöglichen Fehler bedeutet, vergl. S. 153.

Für das Gauss'sche Fehlergesetz

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \text{ ist } \left(\frac{n_{2p}}{n_2}\right)^{2p} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-1);$$

vergl. Gauss, Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen, Bd. IV, S. 114 oder die vorher erwähnte Ausgabe von Börsch und Simon, S. 134.

Die vorstehenden Entwicklungen sind unter der Annahme erfolgt, daß der Werth von $\varphi(x)$ erstens immer positiv bleibt und zweitens mit wachsendem absolutem Betrage von x stets abnimmt oder wenigstens nicht wächst. Würde man von diesen beiden, den Verhältnissen der Fehlervertheilung gut entsprechenden Voraussetzungen nur die erste festhalten, daß $\varphi(x)$ also in dem Intervall von a bis b niemals negativ wird, so würden auf die Grenzwerthe der Integrale

$$\int_a^b x^t \varphi(x)\, dx$$

die Relationen Anwendung finden können, die in dem Buche von C. Possé, Sur quelques applications des fractions continues algébriques, St. Pétersbourg 1886, (Imp. de l'Acad. impériale des sciences) im V. Kapitel: Sur les valeurs limites des intégrales, S. 112—116 zu finden sind.

Digitized by Google

Zur Kenntnis der ostafrikanischen Borstenwürmer.

Von

E. Ehlers.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Juli 1897.

Herr Dr. Voeltzkow in Berlin hatte die Güte der Sammlung des hiesigen zool. zootom. Instituts polychaete Anneliden zu überweisen, die er auf seinen Reisen in Ostafrika und im indischen Meere gesammelt hatte. Er knüpfte daran den Wunsch, eine Bearbeitung dieser Thiere zu erhalten. Als ich diese fast vollendet, erging an mich von der Verwaltung der zoologischen Sammlung des naturhistorischen Museums in Hamburg die Aufforderung, die dort vorhandenen, von H. Dr. Stuhlmann bei Sansibar gesammelten Anneliden gleichfalls zu bearbeiten. Da mir die Durchsicht eines reicheren Materiales aus dieser Fauna willkommen sein mußte, kam ich dem gerne nach. Daß neue Arten in größerer Zahl aus diesem schon sonst ausgebeuteten Theilbezirke des indischen Meeres in diesen nebenher zusammengebrachten Sammlungen vorhanden seien, war nicht zu erwarten. Immerhin hat sich einiges vorgefunden. Wichtiger erschien es mir, mit diesem Materiale die Synonymie einiger Arten festzulegen und damit zugleich unsere Kenntnis von der geographischen Verbreitung der Borstenwürmer zu erweitern. Daß ostafrikanische Anneliden in weiter Verbreitung durch das indisch-pacifische Meer angetroffen werden, ist selbstverständlich; daß aber die ostafrikanische und indopacifische Annelidenfauna auch Gemeinsames mit der mediterranen und westindischen in Formen besitzt, die nicht kosmopolitisch sind, ist von besonderem Interesse; diese Vorkommnisse sind in der Frage nach ihrer Entstehung und Bedeutung einzeln zu prüfen,

Digitized by Google

auch mit Rücksicht auf frühere Verbindungen jetzt getrennter mariner Bezirke. Es ist da aber oft, wie bei den unten erwähnten Enniceen, die dem rothen und Mittelmeere gemeinsam zukommen, eine Entscheidung noch wenig sicher, da unsere Kenntnis über die weitere Verbreitung dieser Arten noch unvollständig zu sein scheint.

Amphinomidae.

Eurythoe complanata (Pall.).

Aphrodite complanata Pallas Miscellanea zoologica. 1766. pg. 109. tab. 8. fig. 19—26.

Pleïone complanata (Pall.) Savigny Système des Annélides. Paris 1820. pg. 62.

Pleïone alcyonia Savigny Système des Annélides. Paris 1820. pg. 62. Annélides gravées Pl. II fig. III.

Eurythoe pacifica Kinberg Nya slägten och arter af Annelider-Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1857. Grube Anneliden. Reise d.... Novara. Zool. Th. Bd. 2. 1867. pg. 8. Annulata Semperiana. Mém. de l'Acad. impér. des sc. de St. Petersbourg. VII. Ser. T. XXV. No. 8. 1878. pg. 6. McIntosh Report... Challenger. Zool. Vol. XII. 1865. pg. 27.

Fundorte: Zanzibar, Bawi (V. St.) Kokotoni (V.). Bawi Riff; Tumbatu-Pangani, Ras Muhesa (St.), Aldabra Ind. Ocean (V.).

Diese Art liegt mir aus beiden Sammlungen in so zahlreichen Exemplaren von jüngeren kleineren und älteren größeren Thieren vor, daß sie einen Haupttheil der Sammlungen bildet. Danach ist diese Annelide an der Küste Ostafrikas und zwar im Litoralbezirk auf Korallenriffen häufig.

Nach dem Materiale, das mir für Vergleichung zur Verfügung steht, habe ich die Ueberzeugung gewonnen, daß diese Art überhaupt im tropischen und subtropischen Gebiete, vielleicht richtiger noch im Meere, daß riffbauenden Corallen die Lebensbedingung gewährt, sehr weit verbreitet ist. Aus weit von einander entfernten Bezirken früheren Zoologen zugegangen sind nun diese Thiere, wohl schon mit Rücksicht auf ihre Herkunft, als verschiedenen Arten zugehörig beschrieben. Und damit ist eine Synonymie entstanden, von der ich oben nur die Grundlage angegeben habe, da ich alle jene Autoren aufzuführen unterließ, die nur reproducirten, was sie in der Literatur darüber vorfanden, nach ihren jeweiligen Anschauungen die generischen Bezeichnungen ändernd.

Savigny nennt seine Pleione alcyonia gemein an den Küsten des rothen Meeres, Peters giebt das für diese Art auch von

Digitized by Google

der Küste von Mossambique an; die zahlreichen Exemplare der Art in den von mir durchgesehenen beiden Sammlungen bestätigen das für Sansibar. — Savigny bezeichnete seine Art als nahe verwandt mit Pleione complanata (Pall.) aus Westindien, Peters kennt zwischen beiden Arten keinen andern Unterschied als den der Breite. Daß die aus Westindien von Pallas beschriebene Art mit der an der Ostküste von Afrika vorkommenden zusammenfalle, mochte beiden Zoologen nicht annehmbar erscheinen. Und doch gehören meines Erachtens diese Thiere zu einer Art, für die dann der Name complanata Pall. beizubehalten ist; die Unterschiede, die man aus den Darstellungen der ersten Beschreiber von beiden Arten entnehmen kann, beruhen auf Ungenauigkeiten. Mir liegen außer den Thieren, die bei Sansibar gesammelt sind, Vertreter dieser einen Art von den Salomons-Inseln, von Mazatlan in Mexico und von den westindischen Inseln, also aus dem indo-pacifischen und aus dem atlantischen Meere vor. Sie alle stimmen in den wesentlichen Kennzeichen so sehr überein, daß ich sie zu einer Art vereinigen muß. Dann rechne ich dazu aber auch die Eurythoe pacifica Kbg. nach der Darstellung, die Grube davon gegeben hat.

Um die Vereinigung der beiden bis jetzt getrennt gehaltenen Arten zu rechtfertigen, muß ich kurz auf einige Punkte der ersten von ihnen gegebenen Beschreibungen eingehen.

Savignys Darstellung der Gesammtform und der Kiemen paßt auf beide getrennt gehaltenen Arten; den von ihm mit Recht hervorgehobenen Mangel der Kieme nur am ersten borstentragenden Segment finde ich ganz übereinstimmend an den ostafrikanischen wie an den westindischen Thieren. Unzutreffend ist dagegen in seiner Abbildung der Ruder das Aussehen der Borsten des unteren Ruderastes; das hat bereits Quatrefages richtig gestellt und dieser Misgriff fällt wohl dem Kupferstecher zur Last. In der ungleichen Ausgestaltung der beiden Ruderäste mit verschiedenartigen Borsten stimmen alle mir vorliegenden Thiere überein. Auch die Abbildung, die Savigny von den Cirren der Ruder giebt, ist nicht allgemein zutreffend; in den meisten der mir vorliegenden Thiere sind diese Cirren nicht so schlank kegelförmig wie es die Figur zeigt, sondern meistens kürzer und dicker und dann deutlich gegliedert; doch habe ich an einem Thiere von Mazatlan an den vordern Segmenten Cirren gesehen, die die von Savigny abgebildete Gestalt hatten, und gewann bei weiterer Durchsicht die Ueberzeugung, daß solche Unterschiede zwischen schlanken glatten und kurzen gegliederten Cirren ausgeglichen werden, und daß das Aussehen der kurzen gegliederten Cirren wohl auf Contractions-

Digitized by Google

zustände zurückgeht. Sehr eigenthümlich ist die Gestalt der Carunkel, die Savigny abbildet, danach ist deren obere Fläche vertieft und von einem unregelmäßig gefalteten Hautsaume umgeben. Die Abbildung ist richtig, stellt aber, wenigstens nach dem mir vorliegenden Materiale, ein nur selten vorkommendes Verhalten dar; ich finde die Bildung nur an einem Thiere von Mazatlan, während sonst alle übrigen indopacifischen und westindischen Thiere eine Carunkel haben, deren obere Fläche plan oder schwach gewölbt und ungleichmäßig quer gerunzelt ist. Diese von Savigny gegebene Darstellung fällt daher bei der Characterisirung als eine Bildung von nur individueller Bedeutung aus. Im übrigen passt Savignys Beschreibung ganz zu der von Pallas als complanata beschriebenen Art bis auf einen jetzt zu betrachtenden Umstand. Bei der Beschreibung, die Pallas von der Aphrodite complanata gegeben hat, wird ihm vermuthlich jene Art vorgelegen haben, die von den größeren Amphinomiden im westindischen Meere die häufigste ist. Hält man das fest und erwägt die Zeit, in der Pallas schrieb, so wird man eine Abweichung in seiner Beschreibung von dem Verhalten, das die häufigste große westindische Amphinomide zeigt, nicht hoch anschlagen; dieser Punkt ist es, der einen Unterschied von Eurythoe alcyonia (Sav.) ausmacht: es sollen den drei ersten Rudern die Borstenbündel fehlen und die erste Kieme am dritten Segmente auftreten. Ich habe bereits früher[1]) darauf hingewiesen, daß diese Angaben von Pallas offenbar falsch sind, er hat die kleinen ersten Borstenbündel und die erste Kieme übersehen, falls sie nicht an seinem Exemplar durch Verletzung entfernt waren. Wird das zugegeben, so sind die in den Beschreibungen vorhandenen Unterschiede zwischen Eurythoe alcyonia (Sav.) und complanata (Pall.) beseitigt; jedenfalls liegen mir westindische Amphinomiden vor, die sich von den pacifischen nicht unterscheiden; in ihnen sehe ich die Eurythoe complanata (Pall.). In einer Beschreibung, die R. Horst[2]) von der Eurythoe alcyonia (Sav.) gegeben hat, sind an der Basis der Carunkel fünf schwache Knötchen angegeben; diese Höcker sind keine für die afrikanische Form allein characteristische Bildung; stark ausgebildet, wie man sie nach Horsts Beschreibung erwartet, habe ich sie an meinem Material selten gesehen, bisweilen fehlen sie völlig; augenscheinlich fällt ihr Auftreten mit physiologischen

1) Florida-Anneliden. Mem. of the Mus. of comp. Zoolog. Vol. XV 1887. pg. 29.

2) R. Horst, Contributions to the knowledge of the Annelida polychaeta. Notes from the Leyden Museum. Vol. VIII. pg. 157.

Digitized by Google

Zuständen der Carunkel zusammen. Das ist zu beachten, wo die Form dieses Organes für Artunterscheidungen verwendet wird.

Ich nehme unter die Synonyme der Art auch Eurythoe pacifica Kbg. auf nach den Angaben, die Grube und McIntosh darüber machen. McIntosh hat die Art schon als nahe verwandt mit der Eurythoe alcyonia (Sav.) bezeichnet, und darauf hingewiesen, daß sie im pacifischen und atlantischen Ocean vorkomme, also die Verbreitung habe, die nach meiner Auffassung der Eurythoe complanata (Pall.) zukommt.

Diese Verbreitung ist nicht ohne Interesse. Ich habe nicht erfahren, daß Eurythoe complanata an der westafricanischen Küste vorkommt, und wenn das richtig ist, ist die Art im tropischen und subtropischen Gebiete nicht kosmopolitisch, sondern beschränkt auf den indopacifischen Ocean mit Einbegriff des rothen Meeres und das westindische Meer, und hier wohl überall Bewohner der Corallenriffe oder des diesen zugängigen Gebietes. Dann erscheint es wahrscheinlich, daß die Discontinuität in der Verbreitung dieser Art, die durch Centralamerika bewirkt wird, mit der Erhebung dieses continentalen Bezirkes und der Trennung der Meere, die dessen östliche und westliche Küste bespülen, entstanden ist. Da nun die indopacifischen und westindischen Exemplare dieser Art keine erheblichen und constanten Unterschiede aufweisen, so darf man schließen, daß die Art, seit ihr Verbreitungsbezirk durch die Erhebung von Centralamerika zerrissen ist, sich unverändert erhalten hat, wenn man nicht annehmen will, wofür keine Anzeichen vorliegen, daß die Art in beiden Meeren sich gleichförmig weiterentwickelt habe. Man erhält damit ein Mittel, das Alter einer jetzt lebenden Art zu kennzeichnen. So würde Eurythoe complanata (Pall.) bis in die Tertiärzeit zurückreichen. Wenn dagegen in ähnlicher Weise nahe mit einander verwandte Anneliden auf der Ost- und Westküste Centralamerikas vorkommen, so können diese als weniger alte Arten bezeichnet werden, die erst nach der Erhebung der die Meere scheidenden Landerhebung divergent sich entwickelt haben. Einen solchen Fall bietet vielleicht die pacifische Chloeia flava gegenüber der westindischen Chloeia euglochis (Ehl.) sowie die westindischen Spirobranchus giganteus (Pall.) und tricornis (Mörch) einerseits und der pacifische Sp. incrassatus (Mörch) andererseits, nur ist hier von den pacifischen Arten bis jetzt eine ähnlich weite Verbreitung wie von der Eurythoe complanata (Pall.) im indopacifischen Ocean nicht bekannt; diese Art ist danach wohl widerstandsfähiger, die Chloeia- und Spirobranchus-Arten mehr zu Variationen geneigt gewesen.

Digitized by Google

Euphrosyne myrtosa Sav.

Savigny Système des Annélides. pg. 64 Pl. II Fig. 2.

Fundorte: Sansibar, Kokotoni, Ebbezone (V.) — Kokotoni. Bawi, Riffgrund, unter Blöcken (St.).

Wenige Exemplare, auf die Savignys Beschreibung gut paßt; die größten von ihnen hatten 39 Segmente, überschritten die von Savigny mit 36 angegebene Segmentzahl; diese, aber auch eine geringere fand sich bei kleineren, sonst ausgebildeten und die Charactere der E. myrtosa Sav. zeigenden Exemplaren. Ein Beweis mehr, daß in dieser Gattung auf die Segmentzahl, wiewohl sie nur eine geringe ist, für die Artbegrenzung wenig Gewicht zu legen ist. Die Stellung der E. myrtosa Sav. zu der im Mittelmeer vorkommenden Art bleibt noch zu prüfen.

Aphroditidae.

Iphione muricata (Sav.).

Polynoe muricata, Savigny Système des Annélides pg. 21.

Fundorte: Sansibar, Bawi (V.) Aldabra ind. Ocean (V.).

Die meisten der vorliegenden Thiere sind auf den Elytren entweder gleichmäßig hellgelblich gefärbt oder zeigen auf solchem Grunde an den einzelnen Elytren einen kurzen dunklen Längswisch. Ein einzelnes größeres Thier ist dagegen dunkel, fast schwarz gefärbt.

Polynoe glauca Peters.

Peters Ueber die Gattung Bdella... Bericht... Verhandl. K. preuß. Akadem. d. W. Berlin 1854. pg. 610. Archiv f. Naturgesch. 1855.

Polynoe trissochaetus, Grube Beschreibungen etc. Monatsber. Berl. Akad. 1869. Juni. pg. 485. — Annelidenausbeute... Gazelle. Monatsber. Berl. Akad. August. 1877. pg. 509. — Annulata Semperiana. Mém. Acad. impér. St. Petersbourg. VII. Ser. T. XXV. No. 8. pg. 25.

Fundort: Sansibar, Kokotoni Ebbezone unter Steinen (V.).

Diese im indopacifischen Meere weit verbreitete Art ist von Peters zuerst als Polynoe glauca beschrieben; allerdings im Wesentlichen nur nach der Färbung gekennzeichnet. Diese Angabe führte mich dahin, das Petersche Originalexemplar, das mir zu dem Behufe von Herrn Möbius zur Ansicht gesendet wurde, zu prüfen; damit konnte ich ihre Identität mit der Polynoe trissochaetus feststellen und wurde veranlaßt, diese Art unter dem zuerst ge-

Digitized by Google

gebenen Namen aufzuführen. Die von Grube in der von ihm gewählten Benennung ausgedrückte Differenz der Borsten des oberen Bündels tritt scharf heraus, wenn die feineren Borsten weit und gespreizt vorgeschoben sind, wie ich es an einem Exemplare gesehen habe. Das Thier ist außer vom rothen Meer und der Ostküste Afrikas von den Tonga-Inseln, Hapai und von Bohol (Philippinen) durch Grube bekannt.

Polynoe (Lepidonotus) **quadricarinata** Gr.

Grube Beschreibungen einiger von G. Ritter v. Frauenfeld gesammelter Anneliden. Verhandl. K. K. zool. bot. Ges. in Wien. 1868 pg. 630. — Beschreibung neuer... Anneliden des rothen Meeres. Monatsber. K. Akad. d. W. Berlin Juni 1869 pg. 486.

Fundort: Insel Changu (St.).

Polynoe sp.?

Diese Art ist wohl mit Polynoe impatiens (Sav.) verwandt, insofern als das erste rudertragende Segment mit einer auf den Kopflappen hinaufgreifenden, hinten zwei kleine Höckerchen tragenden Platte versehen ist. Das einzige mir vorliegende gleichmäßig graugelbe Thier weicht aber von der Beschreibung, die Grube[1]) von Lepidonotus impatiens (Sav.) gegeben hat, dadurch ab, daß die weichen, den Rücken ganz deckenden Elytren einen nicht gefransten Rand haben, und daß ihnen die von Grube beschriebenen Papillen fehlen, ferner daß die Borsten des oberen Bündels nicht glatt sondern quer gerieft und die des unteren mehr als drei Zähne unter der Spitze haben. Die Rückencirren reichen wenig über die Borsten hinaus und sind erheblich kürzer, als sie die Savignysche Figur der P. impatiens zeigt. Da dem Thiere Fühler und Fühlercirren fehlen, unterlasse ich die Aufstellung einer neuen Art.

Fundort: Sansibar, Insel Bawi; an toten Corallen (St.).

Hesionidae.

Hesione splendida Sav.

Savigny Système des Annélides. 1809. pg. 12. 39 Pl.

Fundort: Sansibar Kokotoni, Ebbezone (V.) — Bawi-Riff (St.).

---

1) Grube Beschreibung neuer oder weniger bekannter Anneliden des rothen Meeres. Monatsber. K. Akad. d. W. Berlin Juni 1868 pg. 488.

Digitized by Google

Syllidae.

Syllis monilaris Sav.

Savigny Système des Annélides. 1809. pg. 44. Pl.
Fundort: Insel Bawi, Süd-Riff, unter Blöcken (St.).

Lycoridae.

Nereis (Perinereis) camiguina Gr.?

Grube, Annulata Semperiana. Mém. de l'Acad. imp. d. sc. de St. Petersbourg. VII. Ser. T. XXV. No. 8. 1878. p. 87.
Fundorte: Sansibar Bawi (V. St.).

Zu den Nereis-Arten, die durch den Besitz eines queren Paragnathen in der 6ten Gruppe zu vereinigen sind, gehört eine kleine Zahl von mir vorliegenden Thieren aus Bawi auf Zanzibar. Ich bringe für sie, allerdings nicht ohne Bedenken, lieber den obenstehenden Namen in Anwendung, statt eine neue Art dafür aufzustellen; ich vermuthe aber, daß, wie Grube selbst zu seiner Nereis camiguina Thiere rechnet, die in einzelnen, sonst von ihm als bedeutungsvoll erachteten Punkten, von seiner Artbeschreibung abweichen, eine Anzahl bislang gesonderter Arten zusammen zu ziehen sein möchten. Besonders scheint mir in der Characterisirung der Arten die scharfe Betonung der Zahl der Paragnathen unzulässig zu sein. So zeigen denn die mir vorliegenden Thiere Bildungen, die theils und der Hauptsache nach bei Nereis camiguina Gr., theils bei Nereis obfuscata Gr. sich finden, und so wäre es möglich, daß hier eine Zwischenform vorläge, die beide Arten zu einer verbände. Leider sind mir die Originalexemplare der Grubeschen Arten nicht zur Hand gewesen, so daß ich mich darauf beschränken muß, hervorzuheben, was aus den Beschreibungen der einen und anderen Art auf meine Thiere paßt. So stimmt die Bezeichnung der Farbe von N. obfuscata mit meinen Thieren überein, während N. camiguina blaß fleischfarben sein soll; ein querer Eindruck auf der Rückenfläche neben den Ruderbasen bei N. obfuscata, an dessen Stelle bei camiguina ein querer brauner Strich steht, ist bei einem meiner Exemplare vorhanden, von Drüsen hervorgerufene Zeichnungen fehlen. Die Tentakel des Kopflappens haben die Größe, wie die von N. camiguina, sind also kleiner als bei N. obfuscata; Nackenorgane sind bei beiden Arten wie bei meinen Thieren in Form von queren Gruben vorhanden. Die Fühlercirren stimmen in sofern mit denen von N. obfuscata überein,

Digitized by Google

als sie bis zum 4. Segment — bei N. camiguina bis zum 7. Segment — reichen; aber die von Grube selbst als vielleicht zufällig bezeichnete Abweichung, daß bei N. obfuscata die hinteren oberen Fühlercirren kürzer als die vorderen seien, ist bei meinen Thieren nicht vorhanden. Die Ruder sind bei beiden Arten wie bei meinen Thieren an den hinteren Segmenten verlängert ohne Fähnchen zu bilden, die Bildung der Lippen und Züngelchen ist bei meinen Thieren gestaltet wie es von N. camiguina beschrieben wird, offenbar sind aber in diesem Punkte die Unterschiede der beiden Grubeschen Arten gering. Die Paragnathen der fünften Gruppe bilden bei meinen Thieren wie bei N. camiguina ein Dreieck, sind bei N. obfuscata nur einzeln; die der ersten Gruppe bilden bei meinen Thieren ein Kreuz wie bei N. obfuscata, sind bei N. camiguina zwei neben einander gestellte; allein hier sind nach Grubes Angaben bei einem andern Exemplar fünf augenscheinlich in Kreuzform gestellte vorhanden, so daß dieses Stück hierin mit meinen übereinstimmen würde. Im übrigen zeigen Paragnathen und Kiefer keine besonderen Abweichungen. Eine eingehende Bearbeitung der zu dieser Gruppe gehörenden Nereis-Arten des indischen Meeres wird hier Aufklärung bringen.

Eunicidae.

Eunice afra Peters.

Peters Ueber die Gattung Bdella etc. Bericht... Kgl. preuß. Akad. d. Wiss. Berlin 1854. pg. 611.

Eunice punctata Peters Gattung Bdella a. a. O.

Eunice collaris Grube Beschreibungen neuer oder weniger bekannter von Hrn. Prof. Ehrenberg gesammelten Anneliden des rothen Meeres. Monatsber. d. kgl. Akad. d. Wiss. Berlin 1869. pg. 495. — Annulata Semperiana. Mém. de l'Acad. imp. de St. Petersb. VII. Ser. T. XXV. No. 8. pg. 153. Taf. IX. Fig. 3.

Eunice leucosticta Grube. Eunicea. Bericht... d. naturw. Sect. d. schles. Gesellsch. 1877. pg. 58.

Fundorte: Sansibar, Bawi-Kokotoni (V.).

Zu der Aufstellung der hier gegebenen Synonymie wurde ich veranlaßt durch die Kenntnisnahme der in der berliner zoologischen Sammlung aufbewahrten Originalstücke von Eunice afra Pet. und Eunice punctata Pet. und durch deren Vergleich mit zwei Stücken in der mir übergebenen Sammlung. Die sehr characteristische Färbung und Zeichnung der Eunice punctata Pet. fand ich an dem einen dieser Exemplare wieder, allein nur in der vorderen Körper-

Digitized by Google

strecke, während die hintere allmälig einfarbig wurde und dann völlig mit dem anderen der beiden Exemplare, weiter aber auch mit der einfarbigen Eunice afra Pet. übereinstimmte. Peters hat die beiden von ihm aufgestellten Arten als einander ähnlich bezeichnet, trennt sie nur nach der Zahl der Kiemenfäden, die bei E. afra bis zu 6, bei E. punctata bis zu 4 betragen sollen; dazu kommt der Unterschied der Färbung. In der That sind die Kiemen der E. punctata erheblich weniger entwickelt als die der E. afra; allein dieser Unterschied ist nicht größer als er bei den Männchen und Weibchen von E. norvegica auftritt. Da nun das Originalexemplar von E. afra durch den Besitz von Eiern als Weibchen sich zu erkennen giebt, so komme ich zu der Auffassung, daß auch hier wie bei E. norvegica die ungleich große Entwicklung der Kieme ein sexueller Character ist; da in den sonst maaßgebenden Punkten die Thiere übereinstimmen, so vereinige ich sie zu einer Art, der der erste der von Peters gegebenen Namen zu geben ist.

Dabei bringe ich allerdings nicht in Anschlag, daß bei den beiden mir vorgelegten Thieren die erste Kieme ungleich weit nach hinten am Körper auftritt; bei dem weißpunktirten Thiere am 13., bei dem farblosen am 23. Ruder; bei den Originalstücken von E. punctata Pet. steht die erste Kieme am 14., bei dem von E. afra Pet. am 17. Ruder; ein Beweis dafür, daß hier bedeutungslose Schwankungen vorkommen. Die auffällige Zeichnung mit dicht gedrängt stehenden runden Flecken auf rothem Grunde, die zu der Benennung punctata Veranlassung gab, hat wohl keine sexuelle Bedeutung, ich finde sie an Thieren, deren Kiemenentwicklung auf weibliches Geschlecht deutet.

Grube hat augenscheinlich als er die Eunice collaris beschrieb, die etwas versteckte Petersche Beschreibung übersehen, sonst ist nicht einzusehen, weshalb er nicht auf die von Peters hervorgehobene Zeichnung und Färbung hingewiesen hat. Daß neben den ungefärbten Thieren die so auffallend gezeichneten vorkommen, erwähnt er bei der Beschreibung der von Semper bei Manilla gesammelten Thiere.

Die Grubesche Eunice leucosticta aus Ostafrika, die dunkel fleischroth und weiß getupfelt ist und kurze höchstens 3- (selten 4-)fädige Kiemen hat, ist offenbar identisch mit der Petersschen E. punctata, also nach meiner Auffassung das Männchen von E. afra Pet.

Die Art ist von der ostafrikanischen Küste und den Philippinen nachgewiesen, vermuthlich also im ganzen indischen Meere

Digitized by Google

verbreitet; vielleicht sind unter den von hier beschriebenen Eunice-Arten noch weitere Synonyme enthalten.

Eunice fasciata (Risso).

Leodice fasciata Risso Histoire nat. des principales productions de l'Europe merid. T. IV. Paris 1826. pg. 421.

Eunice harassii Grube Zur Anatomie und Physiologie der Kiemenwürmer 1838. pg. 35. Ehlers Borstenwürmer 1868. pg. 312.

Eunice torquata Quatrefages Histoire des Annelés T. I. 1865. pg. 312.

Eunice claparedi Quatrefages a. a. O. T. II. 1865. pg. 652.

Eunice laurillardi Quatrefages a. a. O. T. I. pg. 314.

Fundort: Sansibar, Bawi (V.).

Von dieser Art liegt mir nur ein Stück vor, das durch die opalweißen Flecke auf braunem irisirendem Grunde an der vorderen Körperstrecke, und durch die kurz gegliederten und braun geringelten Fühler sich leicht zu erkenneu gab; ihm fehlt allerdings die auch sonst wohl nicht constante weiße quere Rückenbinde auf den vorderen Segmenten.

Seit Grube[1]) die von ihm als E. harassii beschriebene Eunicee als identisch mit E. fasciata Qtrfg. hingestellt und als mit E. fasciata Risso zusammenfallend bezeichnet hat, muß dieser Name als der älteste dafür verwendet werden. Dann fällt auch die Benennung E. claparedi Qtfg. Ich ziehe auch nach Grubes Vorgang die E. laurillardi Qtfg. hierher; die Angabe von Quatrefages, daß bei ihr der Vorderrand des Kopflappens vierlappig sei, ist wohl auf die Theilung der Palpenoberfläche, die sich bei dieser Art findet, zu beziehen. Wenn für E. laurillardi das Auftreten der ersten Kieme schon am 3. Ruder angegeben wird, so ist das meines Erachtens für specifische Sonderung ohne Bedeutung, findet sich auch an dem mir vorliegenden Thiere.

Da hiernach sich die Verbreitung dieser Art über das Mittelmeer hinaus an der Ostküste Afrikas ergiebt, ist nicht zu bezweifeln, daß sie auch weiter im indischen Meere verbreitet ist, vermuthlich ist die eine und andere der vielen von hier beschriebenen Eunice-Arten noch als synonym hierhergehörend nachzuweisen. Dabei ist zu beachten, daß McIntosh sie, allerdings nicht ohne Zweifel, im Challenger-Bericht auch von den Cap Verden aufführt; in Variationen gehört die Gruppe auch den westindischen Küsten an.

1) E. Grube Bemerkungen über Anneliden des Pariser Museums. Archiv f. Naturg. Jhrg. XXXVI. Bd. I. 1870. pg. 293.

Digitized by Google

Eunice antennata (Sav.).

Leodice antennata Savigny Système des Annelides 1809. pg. 50.

Fundorte: Sansibar Bawi, 2 Faden, in Korallenblöcken (V.). — Kokotoni Ins. Changu (St.).

Weitere Verbreitung: Salewatti. Corallen (Grube. Gazelle).

Eunice pectinata Gr.

Grube Beschreib. neuer... Anneliden d. rothen Meeres. Monatsber. Akad. Berl. 1869. pg. 492.

Auf wenige mir vorliegende, zum Theil nur unvollständig erhaltene Euniceen paßt die Grubesche Beschreibung der E. pectinata so gut, daß ich sie unter diesem Namen aufführe. Ob die Art nicht etwa mit E. antennata (Sav.) zu vereinigen ist, läßt sich nur bei größerem Material entscheiden, als mir zu Gebot steht.

Fundort: Sansibar, Bawi (V.).

Eunice siciliensis Grube.

Grube, Actinien, Echinodermen und Würmer. 1840. pg. 83.

Synonym: cf. Ehlers Borstenwürmer. pg. 353.

und

Eunice simplex Peters Ueber die Gattung Bdella. Bericht k. Akad. d. W. Berlin 1854. pg. 611.

Eunice schizobranchia Claparède. Annélides chétopodes. Supplement. 1870. pg. 30.

Fundorte: Sansibar, Bawi (V. St.).

Die durch die Form des Unterkiefers so kenntliche Art ist in mehreren Exemplaren gesammelt; diese haben bald nur ein- bald auch zweifädige Kiemen. Das ist ein variabeler Character. Ich vermuthe, daß auch Claparèdes durch zweifädige Kiemen ausgezeichnete E. schizobranchia den Synonymen zuzuschreiben ist, die ich früher bereits zusammengestellt habe. Das gleiche gilt von Eunice simplex Pet., die mit den mir vorliegenden, aus gleichem Gebiet wie diese gesammelten Stücken übereinstimmt, wovon mich die Ansicht des Originalstückes überzeugte.

Die Art gehört dem Mittelmeere und indischen Ocean von der Küste Ost-Afrikas bis zu den Philippinen an (Fidschi-Ins. Matuka (Grube Gazelle) Bohol (Grube Annul. Semperiana)). Da Langerhans sie auch von Madeira erwähnt, so wird zu erwarten sein, daß ihre Verbreitung im wärmeren Meere noch ausgedehnter ist.

Digitized by Google

Lysidice collaris Gr.

Grube Beschreibungen neuer ... Anneliden d. roth. Meeres. Monatsber. Berl. Ak. d. W. 1869. pg. 495. Annulata Semperiana Mem. Acad. d. sc. d. St. Petersbourg. VII. Ser. T. XXV. No. 8. pg. 166.

Fundort: Sansibar Bawi (St.).

Ein einziges mir vorliegendes Stück glaube ich auf diese Art beziehen zu dürfen; wie sie zu den mediterranen Arten L. margaritacea Clprd. und L. olympia Sav. steht, muß ich aus Mangel an zuverlässigem Vergleichsmaterial unentschieden lassen. Es ist nicht unmöglich, daß alle diese Arten zusammenfallen; dann gehören sie einer dem Mittelmeere und indischen Ocean gemeinsamen Form an.

Glyceridae.

Glycera martensi Gr.

Grube Bemerkungen über die Familie der Glycereen. Bericht d. natw. Sect. d. schles. Ges. 1869. pg. 32.

Fundort: Sansibar, Ebbezone, im Sand (V.).

Weitere Verbreitung: Laventuka, indisch. Ocean (Grube).

Glycera sp.

Fundort: Sansibar, Kokotoni, Ebbezone im Sand (V.).

Diese Art scheint der Glycera longipinnis Grube von den Philippinen nahe zu stehen. Ich urtheile nur nach einem Stück, dessen Kopflappen verstümmelt ist. Das schlanke Thier hat etwa 150 kurze rudertragende Segmente. Seine Ruder weichen von der Beschreibung, die Grube[1]) von den Rudern der Gl. longipinnis nur dadurch ab, daß die hinter den beiden langen Vorderlippen stehende kurze Hinterlippe am Rande durch einen seichten Einschnitt in zwei Lappen getheilt ist, von denen der obere etwas länger als der untere ist, während bei Gl. longipinnis diese Lippe kaum zweilappig erscheint; ferner dadurch, daß die Kieme vom oberen Rande und nicht von der hinteren Fläche, wie bei Gl. longipinnis ausgeht, und nicht viel länger als die Lippe hinausragt. Diese Unterschiede dürften kaum von durchgreifender Be-

1) Grube Annulata Semperiana Mém. Acad. imp. des Sc. de St. Petersb. Ser. VII. T. XXV. No. 8. pg. 182.

Digitized by Google

deutung sein. Leider wissen wir nicht, wie die Rüsselpapillen von Gl. longipinnis gestaltet sind; bei den mir vorliegenden sind sie cylindrisch und haben in characteristischer Weise eine schräg abgestutzte Endfläche, wie die Papillen der Glycera convoluta Kef. In den Verwandtschaftskreis dieser Art dürfte danach das Thier gehören.

Cirratulidae.

Cirratulus nigromaculatus Gr.

Grube Beschreibung neuer ... Anneliden d. rothen Meeres. Monatsber. k. Akad. d. W. Berlin 1869. pg. 504.

Fundort: Sansibar Bawi-Riff (St).

Meine Benennung stützt sich darauf, daß die von Grube beschriebene Zeichnung dieser Art ganz zu der Färbung und Zeichnung des vorliegenden Thieres passt. Nur sind bei ihm die Kiemen stark entwickelt und bilden, wie in der Gattung Timarete Kbg. jederseits einen über mehrere Segmente ausgedehnten Haufen, während das Grubesche Stück nur eine Reihe von Kiemenfäden jederseits auf dem 7. Segment trug; das Thier war aber nur 7,5 mm lang und danach jedenfalls unausgewachsen. Das nimmt dem beachteten Unterschied seine Bedeutung.

Terebellidae.

Neottis rugosa n. sp.

Körper gelblich grau, lang gestreckt, 15—20 cm lang; etwa 125 borstentragende Segmente, und eine kurze kaum segmentirte und borstenlose präanale Endstrecke; größte Breite, ohne besondere Auftreibung etwa am 10—12. Segment; Segmente vorn etwa 5½ mal, in der Körpermitte 3, in der hinteren Strecke 2mal breiter als lang, die vor der präanalen ganz kurz; die Rückenfläche in der vorderen Körperstrecke durch die hochgestellten Parapodien stark verschmälert, überall glatt oder fein quer gerieft mit deutlichen Segmentfurchen, Bauchfläche in der vorderen Körperstrecke unregelmäßig und stark, oft quer gerunzelt, ohne deutliche Bauschilder und Medianfurche. Kopflappen groß mit zahlreichen langen und dicken, canaliculirten Fühlern, ohne Augenpunkte. Alle Segmente mit Ausnahme der reducirten präanalen mit dorsalen und ventralen Borsten. Dorsale Parapodien vom 2. Segment mit großen weit vortretenden, gelben Bündeln doppelt gesäumter, einfacher, spitz auslaufender Borsten. Ventrale Haken-

Digitized by Google

borsten vom 3-borstentragenden Segment ab anfangs auf niedrigen Wülsten, die gegen die Körpermitte hin in schmale Flößchen, an den hinteren Segmenten in quere stumpfe Höcker übergehen und dann mit den dorsalen Parapodien zusammenstoßen; Haken überall einreihig, gelb; 1. 22. 3. 3 Paar Kiemen an den 3 ersten Segmenten: zahlreiche dünne, meist eng spiralig aufgerollte Fäden, die dicht auf queren leistenartig erhobenen Wülsten stehen; die erste Kieme reicht ventralwärts weiter als die zweite und dritte; alle Kiemenwülste in der Medianfläche des Rückens von einander getrennt; Höcker unter den Kiemen und dorsalen Parapodien fehlen.

Röhre unregelmäßig gewunden, dick membranös mit großen aufgeklebten Fremdkörpern.

Fundorte: Sansibar (V. St.), Kokotoni-Pangani, Ras Muhesa, verschlammtes Riff, unter Steinen.

Diese Art ist offenbar bei Sansibar häufig, und ich war daher überrascht, sie mit einer der bis jetzt beschriebenen Terebelliden des rothen Meeres und indischen Oceans nicht identificieren zu können. Ihre systematischen Charactere verweisen sie in die Gattung Neottis Mlmg., wenn man aus der für sie von Malmgren aufgestellten Diagnose den Besitz von Augenpunkten streicht. Das bildet offenbar einen Artcharacter, da den anderen Arten dieser Gattung Augenpunkte zukommen. Vielleicht am nächsten kommt die Art der Neottis triserialis (Gr.), die ich nicht aus eigner Anschauung kenne, die aber durch die Berührung der Kiemenbasen in der Mittellinie des Rückens von ihr abweicht. Habituell hat die Art große Aehnlichkeit mit Neottis spectabilis Verr. des antarctischen Kreises; bei dieser ist die Ventralfläche der vorderen Segmente ähnlich, nur nicht so stark gerunzelt wie hier; und ist die präanale Strecke gleichfalls, wenn auch weniger stark, reducirt; bei der Neottis spectabilis (Verr.) verschwinden aber die dorsalen Parapodien in der hinteren Körperstrecke vor der präanalen Strecke, während sie bei Neottis rugosa bis an diese zu verfolgen sind.

Sabellidae.

Sabella indica (Sav.).

Savigny Système des Annélides. 1809. pg. 77.

Fundorte: Sansibar, Bawi, Ebbezone, Riff-Kokotoni, Ebbezone (V.).

Die großen Exemplare dieser Art sind gleichmäßig dunkel violettbraun gefärbt, die Binden auf den Kiemen treten dann wenig hervor; bei kleineren Thieren ist der Körper auf hellgrauem

Digitized by Google

Grunde unregelmäßig gesprenkelt und gefleckt, die Querbänder der Kiemen treten deutlich hervor. Ich kann die Angabe von Grube[1]), daß die Hakenborsten an den thoracalen Segmenten in einfacher Reihe stehen, bestätigen, häufig erschien diese Borstenreihe wie in mehrere, winklig zu einander stehende Stücke aufgebrochen. Die Einzeiligkeit und die Gleichförmigkeit der thoracalen Hakenborsten verweist die Art aus der Gattung Sabella, wie sie von Malmgren begrenzt ist, und in die von Langerhans[2]) aufgestellte Gattung Jasmineira; dafür könnte auch die langgestielte Form dieser Haken sprechen, während die typische Art dieser Gattung doch offenbar in eine andere Gruppe gehört. Ich behalte die Gattungbezeichnung Sabella im älteren Sinne bei.

Die Angabe Grubes, daß die Art auf den Antillen vorkomme, beruht wohl auf einem Misverständis; Savigny und nach ihm Quatrefages[3]) geben für das Originalexemplar der Pariser Sammlung „la mer des Indes" an, woher es durch Péron und Lesueur gebracht sein soll; diese Reisenden brachten ihre Ausbeute aber aus dem indo-pacifischen Ocean, und deshalb halte ich die Grubesche Vaterlandsangabe für irrthümlich, jedenfalls ist sie neu zu prüfen, ehe man auch für diese Art eine indisch-atlantische Verbreitung zuläßt.

Sabella sulcata n. sp.

Körper mäßig lang, platt, in der vorderen Hälfte fast gleichmäßig breit, in der hinteren allmälig etwas verschmälert bis zu dem rasch zugespitzten Hinterende, 7—8mal länger als die größte Breite; etwa 190 borstentragende Segmente, von denen 8 thoracal; 81 mm lang ohne die Kieme, diese im eingerollten Zustande der Kiemenstrahlen 12 mm lang, wovon auf ihr Basalblatt 5 mm fallen; allgemeine Färbung „im Leben grau mit rothbraun" (V.); jetzt hell gelblich-grau, die Bauchschilde dunkelgrau; bisweilen die Rückenfläche der vorderen Segmente bräunlich gelb; die ventrale Fläche des Buccalsegmentes und die Kragenlappen violett, die Basalmembran der Kiemen violettbraun, die Außenfläche der Rhachis der Kiemenstrahlen braunviolett, die Innenfläche weiß

1) Grube Bemerkungen über die Anneliden des Pariser Museum Arch. f. Naturg. XXXVI. Jhrg. 2. Bd. pg. 340.

2) Langerhans Die Wurmfauna von Madeira. Ztschr. f. w. Zool. Bd. XXXIV pg. 113.

3) Quatrefages, Histoire des Annélés. T. II. pg. 432.

Digitized by Google

oder grau, die Kiemenfäden auf zwei großen Querbändern der ganzen Kiemenkrone, einem auf der halben Länge, einem zweiten vor der Spitze, weiß, im übrigen grau oder bräunlich, die Achse der einzelnen Kiemenfäden außen oft violett.

Jede Kiemenhälfte ein mehr als im Halbkreis eingerolltes, hohes Basalblatt mit 60—70, mit Ausnahme der ersten, fast gleich langen gegen die Spitze zu nach einwärts eingerollten Kiemenstrahlen; die Rhachis des Kiemenstrahles außen nackt, ohne Anhänge und Augen, mit zwei Reihen dicht gedrängter Kiemenfäden, die bei größter Ausdehnung 4—5mal länger als die Breite der Rhachis sind, gegen die Spitze des Kiemenstrahles hin kürzer werden, und nur einer ganz kurzen einfachen Endstrecke der Rhachis fehlen; jederseits ein schlank kegelförmiger Tentakel, der wenig über den Vorderrand der Kiemenbasis hinausreicht und in ganzer Länge durch die Umbiegung seiner Ränder rinnenförmig ist. Kragen niedrig, dick, auf dem Rücken in dessen ganzer Breite klaffend, auf der Bauchfläche median eingeschnitten und jederseits mit einem kurzen dreieckigen rückwärts umgeklappten Lappen; am Seitenrande etwas oberhalb der unteren Ecke der ventralen Hakenwülste mit einem weiten Einschnitt, vor dem neben der Basis des Kiemenblattes ein niedriges halbmondförmiges Läppchen steht.

Thoracale Strecke mit 8 Segmenten etwas breiter als lang, auf der Rückenfläche mit einer medianen längslaufenden grubenartigen Vertiefung, deren Seitenwände am Vorderrande in dicke gerundete Polster auslaufen; auf der Bauchfläche mit rhomboidischen, die ganze Breite zwischen den Hakenwülsten einnehmenden Polstern, deren Vorderrand breiter als der Hinterrand ist. — Erstes Segment mit kleinem dorsalen Borstenbündel, das tiefer ventralwärts als die folgenden steht, ohne ventralen Hakenwulst; die folgenden sieben Segmente mit stärkeren und weiter vorspringenden Borstenbündeln, die je weiter nach hinten um so mehr ventralwärts rücken, und mit breiten, durch die Verschiebung der dorsalen Parapodien nach hinten zu an Höhe abnehmenden Hakenwülsten; die dorsalen Parapodien haben ein enggeschlossenes starkes Bündel von gleichlangen und gleich geformten gelben einfachen Borsten, deren etwas geschwungene spitz auslaufende Endstrecke breit gesäumt ist; auf den Wülsten eine einfache Reihe großer Haken mit verlängertem Manubrium und einer Kappe von feinen Zähnen auf dem Scheitel. — Abdominale Strecke mit fast ebener Rückenfläche, die Bauchfläche mit medianen Polstern, die in der Fortsetzung der thoracalen bald sich so sehr verschmä-

Digitized by Google

lern, daß sie nur deren halbe Breite besitzen, mit deutlicher, am zweiten abdominalen Segment links abbiegender medianer Furche, die sich nicht auf die Rückenfläche fortsetzt. — Ventrale Borstenbündel in der hinteren Körperstrecke stärker als in der vorderen vorragend; dorsale Hakenwülste vorn bis an die Borstenbündel reichend, nach hinten an Höhe abnehmend und so zu ovalen, fast flößchenartigen Polstern umgewandelt, die von den ventralen Parapodien getrennt sind; an den letzten 35 Segmenten ein kleiner runder dunkelbrauner Punkt an der oberen hinteren Ecke des Borstenpolsters; die Borsten sind ungleich lang in ein und demselben Bündel, neben kurzen doppelt gesäumten, die denen der thoracalen Bündel gleichen aber schmäler gesäumt sind, stehen wenige sehr viel länger und weit vorragender, die nur schwach gesäumt sind; die Haken an Zahl gering, wie die thoracalen gestaltet aber mit kürzerem Manubrium, einreihig. Röhre dünnwandig lederartig, ohne Fremdkörper.

Fundorte: Sansibar, Bawi; Ebbezone, in Steinen mit Röhre (V. St.).

Vielleicht gehört diese Form zusammen mit der von McIntosh als Sabella fusca Gr. beschriebenen Art; daß auf diese die gewählte Bezeichnung nicht anwendbar ist, ergiebt sich daraus, daß McIntosh ein am Rücken klaffendes Collare abbildet, während bei Sabella fusca Gr. der Kragen auf der Rückenfläche zusammenstößt. Die von McIntosh gegebene Darstellung enthält nichts was dagegen spricht, seine Art mit der hier beschriebenen zu vereinigen, ist aber nicht ausreichend genug, um das mit ganzer Sicherheit aussprechen zu können.[1]). Ist die Vereinigung zulässig, so hat die Art eine weite Verbreitung, da das von McIntosh beschriebene Stück aus Port Jackson, Sidney stammte. Die Sabella porifera Gr.[2]) ist vermuthlich nahe mit der Sabella sulcata verwandt; unterscheidet sich wohl durch die auffällige Steigerung, die die Rückenwülste zu großen vermuthlich drüsigen Polstern erfahren haben. Auch hier habe ich die generische Bezeichnung Sabella im älteren weiteren Sinne aufgefaßt.

---

1) McIntosh Report... Challenger Zool. Vol. XII. pg. 491.

2) Grube Annulata Semperiana. Mem. Akad. d. sc. de St. Petersbourg. VII. Sér. T. XXV. No. 8. pg. 252.

Digitized by Google

Serpulidae.

Spirobranchus semperi Mörch.

Mörch Revisio critica Serpulidarum. Naturhist. Tidsskrift. 3. R. 1. B. 1863. pg. 59.

Fundort: Tambatu, Sansibar (St.).

Meine Benennung dieses ohne die dazu gehörende Röhre mir vorliegenden Thieres stützt sich auf die Uebereinstimmung der Deckelscheibe mit der Beschreibung und Abbildung, die Mörch davon gegeben hat. Das von Mörch beschriebene Stück war von Semper auf den Philippinen gesammelt. Die Art ist danach weit im indisch-pacifischen Meere verbreitet.

Digitized by Google

Ueber die magnetische Nachwirkung.

Von

C. Fromme in Gießen.

Vorgelegt von E. Riecke in der Sitzung vom 8. Juli 1897.

Im Jahre 1877[1]) habe ich unter dem Namen „Magnetische Nachwirkung“ folgende Erscheinung beschrieben: Wenn man nach einer größeren magnetisirenden Kraft — mit Zwischenschaltung der Kraft Null — eine kleinere anwendet, so ist das von dieser inducirte temporäre Moment zuerst variabel mit der Größe der vorhergegangenen Kraft, indem es mit ihr zunimmt. Bei öfters wiederholter Einwirkung der kleineren Kraft nimmt es ab und erreicht schließlich ein constantes Minimum. Während der Wirkung der Kraft beobachtet man keine Abnahme des temporären Moments, diese ist vielmehr ausschließlich eine Folge der wiederholten Magnetisirung. Die Abnahme des Moments ist unabhängig von der Wirkungsdauer der größeren Kraft und auch von der Zeit, welche bis zur Anwendung der kleineren Kraft verfloß.

Aus dieser kurzen Beschreibung der Erscheinung erhellt schon zur Genüge, daß sie kaum eine Aehnlichkeit mit der „elastistischen Nachwirkung“ besitzt. Dagegen haben später Ewing[2]) und Lord Rayleigh[3]) eine magnetische Erscheinung beobachtet, welche der elastischen Nachwirkung vollkommen entspricht und deshalb wohl besser als die erste die Bezeichnung „Magnetische Nachwirkung“ verdient. Ewing und Rayleigh bezeichneten sie als „Time-lag“ oder „Magnetic creeping.“ Sie besteht nämlich in einer langsamen Aenderung des magnetischen Moments nach

1) C. Fromme, Gött. Nachr. 1877, Wied. Ann. 4. p. 76, 1878.

2) J. A. Ewing, Phil. Trans. 1885, p. 569 § 2, Lond. R. Soc. Proc. 46., p. 269, 1890.

3) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 23, p. 225, 1887.

Digitized by Google

Herstellung eines constanten größeren resp. kleineren Werthes der magnetisirenden Kraft. Ich will sie im Folgenden „magnetische Nachwirkung“ nennen.

Bei meinen Versuchen, deren hauptsächlichste Resultate im Folgenden kurz mitgetheilt werden sollen, beschränkte ich mich auf die Beobachtung der Nachwirkung, welche beim Uebergang von einer größeren Kraft zu einer kleineren auftritt. Je nachdem die letztere größer als Null oder gleich Null ist, spreche ich von einer Nachwirkung des temporären oder des permanenten Moments. Als Material dienten aus gewissen Gründen dünne weiche Eisendrähte (15 cm lang, 0,12 cm dick), obwohl bei dicken Eisenkörpern die Nachwirkung größere Werthe aufweist. Gelegentlich wurde auch Stahldraht untersucht. Die magnetisirende Kraft der Magnetisirungsspirale lag zwischen den Grenzen 47 und 0,02. Beim Maximum war kein Rheostatenwiderstand im Stromkreis, beim Minimum waren 9999 S. E. eingeschaltet. Ebenso wie bei Ewing und Rayleigh war die momentane Wirkung einer Abnahme der magnetisirenden Kraft auf das Magnetometer durch eine Compensationsspirale aufgehoben. Diese compensirte also außer der Wirkung der Magnetisirungsspirale auch diejenige des bei Abnahme der Kraft momentan verschwindenden Theils des Magnetismus. War die vorgenommene Schwächung der Kraft bedeutend, so ließ sich eine vollkommene Compensation nicht herstellen, das Magnetometer führte dann aber nur wenige kleine Schwingungen aus, und die Beobachtung begann nach 5, höchstens 10 Secunden. Die Zurückführung der Kraft auf einen kleineren Werth geschah durch Ziehen der Stöpsel eines Siemens'schen Rheostaten, auf Null reducirt wurde durch Kurzschluß der stromgebenden Elemente und folgende Unterbrechung.

Die Versuche ergaben nun in der Hauptsache nachstehende Resultate:

Magnetische Nachwirkung, d. h. eine mit der Zeit fortschreitende Aenderung des magnetischen Moments, bei constanter magnetisirender Kraft, tritt nach jeder Abnahme der Kraft auf, mag die Abnahme bis zu einem endlichen Werth oder bis zur Null gehen. Ersteren Falls äußert sie sich gewöhnlich in einer Abnahme, unter gewissen Umständen aber auch in einer Zunahme des temporären, letzteren Falls stets in einer Abnahme des permanenten Moments. Die Zunahme des temporären Moments beobachtet man nur dann, wenn eine größere Kraft rasch auf einen mittelgroßen Werth reducirt worden ist, dagegen bleibt nach rascher Reduction auf einen kleinen oder sehr kleinen Werth das

Digitized by Google

temporäre Moment nahezu constant[1]). Nach langsamer Reduction der Kraft wächst die Nachwirkung des temporären Moments mit der Größe der Reduction, dagegen nimmt, wenn nach einigen Minuten, sobald das temporäre Moment constant geworden, die Kraft gänzlich auf Null gebracht ist, die Nachwirkung des permanenten Moments zuerst mit wachsender Differenz der beiden Kräfte zu, bei sehr klein werdender reducirter Kraft aber wieder ab. Die Ursache dieser Abnahme liegt darin, daß dann schon während des Bestehens der reducirten Kraft ein Theil derjenigen Nachwirkung verschwindet, welcher anderenfalls erst in der Nachwirkung des permanenten Moments erscheinen würde. In der That wird die letztere auch desto kleiner, je länger die sehr kleine reducirte Kraft bestanden hatte. Nach rascher Reduction der großen Kraft auf den kleineren Werth (und weiterer Reduction auf Null) verhält sich die Nachwirkung des permanenten Moments ebenso wie nach langsamer Reduction, nur hat sie immer kleinere Werthe. Diesen Unterschied beobachtet man auch dann, wenn man die große Kraft direct d. h. ohne Einschaltung von Rheostatenwiderstand langsam oder rasch auf Null reducirt hat, dadurch daß man entweder mit oder ohne vorherigen Kurzschluß der Elemente den Strom unterbrach.

Bei anderen Versuchen habe ich die kleinere Kraft nicht durch Schwächung einer größeren construirt, sondern bin von der Kraft Null an zu ihr aufgestiegen. Wirkt sie als erste nach dem Ausglühen des Drahts, so ist die Nachwirkung des permanenten Moments nur klein und nimmt noch ab, je öfter man die Kraft wirken läßt. Nach einer größeren Anzahl von Wirkungen ist ein Minimum erreicht. Schaltet man nun aber für einen Moment eine größere Kraft ein und geht darauf (durch die Null hindurch) wieder auf die kleinere über, so findet man die Nachwirkung des permanenten Moments jetzt erheblich größer als vorher, offenbar weil sich jetzt die Nachwirkung der größeren Kraft über diejenige der kleineren legt. Um erstere zu beseitigen, ist es nöthig, die Kraft Null eine angemessene Zeit bestehen zu lassen. Aber auch dann wird das frühere Minimum erst durch oft wiederholte Wirkung der kleineren Kraft wieder erreicht. Sehr häufige Wirkung der kleineren Kraft unmittelbar nach der größeren macht die Pause zwischen den beiden Kräften nicht entbehrlich.

---

1) Die Kraft wurde rasch reducirt, dadurch daß man z. B. den Rheostatenstöpsel 500 zog; die entsprechende langsame Reduction bestand in dem successiven Ziehen aller vor 500 liegenden Stöpsel.

Digitized by Google

Erschütterungen des Drahts erweisen sich als ohne Einfluß auf die Nachwirkung, wenn sie vor der Wirkung einer großen magnetisirenden Kraft erfolgten. Die Erklärung hierfür ergibt sich aus einer kürzlich[1]) von mir veröffentlichten Arbeit über Erschütterungswirkung. Dagegen üben sie einen sehr deutlichen Einfluß auf die Nachwirkung aus, wenn sie nach der großen Kraft angewandt werden. Wird nämlich die große Kraft durch Einschaltung von Rheostatenwiderstand auf einen kleinen Wert reducirt, so setzen unmittelbar nach Herstellung desselben erfolgende schwache Erschütterungen, welche das permanente Moment kaum schwächen, die Nachwirkung sowohl des temporären als auch (nach schließlicher Unterbrechung des Stroms) des permanenten Moments stark herunter und beseitigen sie bei etwas größerer Intensität fast vollständig. Ebenso sind sie bei folgender Versuchsanordnung wirksam. Zuerst wird mit einer großen Kraft magnetisirt, nach deren Reduction auf Null eine angemessene Pause eintritt, damit die Nachwirkung der großen Kraft verschwinden kann. Dann wird erschüttert, und nunmehr die kleinere Kraft hergestellt. Es zeigt sich jetzt, daß die Nachwirkung des permanenten Moments zwar auch noch abnimmt, wenn man die kleinere Kraft öfters anwendet (s. oben), daß aber die Nachwirkungswerthe bei allen Impulsen der Kraft, namentlich bei den ersten, jetzt kleiner ausfallen, als wenn nicht erschüttert worden wäre. Diese Erschütterungswirkung erreicht schon bei verhältnißmäßig sehr schwachen Erschütterungen, (welche dem permanenten Moment nur geringe Verluste zufügten), ein Maximum.

Eine folgende Magnetisirung mit der großen Kraft zerstört (cf. die citirte Arbeit) den durch die Erschütterungen geschaffenen Zustand des Drahts wieder, und man kann deshalb den obigen Versuch mit oder ohne Zwischenschaltung von Erschütterungen beliebig oft wiederholen.

Die Größe und der Ablauf der Nachwirkung hängt von der vorherigen Behandlung des Drahts ab. Der ausgeglühte, dann magnetisirte Draht zeigte eine große und langsam ablaufende Nachwirkung. Dieselbe wird, wie soeben bemerkt, durch Erschütterungen unter gewissen Bedingungen verkleinert. Wurde der Draht vor der Magnetisirung mittelst Durchziehen durch eine Bunsenflamme auf vielleicht 150° erwärmt (und wieder abgekühlt) oder wurde er ein wenig hin- und hergebogen, so war die Nachwirkung des temporären Moments[2]) kleiner und lief schneller ab.

1) C. Fromme, Wied. Ann. 61, p. 55, 1897.

2) Die Messung begann 10 Sec. nach erfolgter Stromschwächung.

Digitized by Google

Diejenige des permanenten Moments wurde ebenfalls durch Erwärmen oder Biegen beeinflußt, und zwar wurde durch die Erwärmung wahrscheinlich zwar nicht die Gesammt-Größe (vom Augenblick der Stromunterbrechung an gezählt) geändert, wohl aber der Ablauf sehr stark beschleunigt. Biegung dagegen vermindert zugleich die Gesammtgröße und beschleunigt den Ablauf. Diese Wirkungen sind dauernde und können nur durch Ausglühen wieder beseitigt werden.

Eine andere Frage war, welchen Einfluß eine Temperaturerhöhung *während* des Ablaufs der Nachwirkung ausübt. Die Magnetisirung geschah bei Temperaturen bis zu $+80^0$ herauf, auch ging ich bis -14^0 herunter. Es fand sich nun, daß sich die Nachwirkung des temporären Moments erheblich mit wachsender, aber auch mit abnehmender Temperatur verringerte und bei $+80^0$, sowie bei -14^0 schon (5 Sec. nach der Kraftschwächung) verschwunden war. Die Nachwirkung des permanenten Moments zeigte einen beschleunigten Ablauf mit gesteigerter wie mit sinkender Temperatur, doch schien die Gesammtnachwirkung, wenigstens bei steigender Temperatur sich nicht zu ändern. Dieser Einfluß geringer Erwärmung oder Abkühlung ist vorübergehend, denn mit Rückkehr zur Zimmertemperatur nahm auch die Nachwirkung immer wieder ihre alten Werthe an. Von der Ursache aller dieser Erscheinungen kann man sich auf Grund der Hypothese drehbarer Molecularmagnete eine befriedigende Vorstellung bilden.

Gießen, den 23. Juni 1897.

Digitized by Google

Der Hermitesche Reciprocitätssatz.

Von

Paul Gordan in Erlangen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Juli 1897.

Der Hermitesche Reciprocitätssatz lautet:

Die Anzahl μ der azygetischen Covarianten und Invarianten A einer Form n^{ten} Grades:

$$f = a_x^n = s_{1,2} s_{2,x} \dots s_{n,x}$$

welche in den Coefficienten den Grad m haben, stimmt mit der Anzahl ν der azygetischen Covarianten und Invarianten B einer Form m^{ten} Grades:

$$\varphi = b_x^m$$

überein, welche in den Coefficienten den Grad n haben, also:

$$\mu = \nu.$$

Der von Herrn Hermite gegebene Beweis gilt zunächst nur für binäre Formen; man kann ihn aber so gestalten, daß er auch für Formen mit mehr Variabeln gilt unter der Voraussetzung, daß diese Formen in lineare Formen zerfallen[1]).

Ich wähle $m \geqq n$ und setze aus den Symbolen:

$$a_1 a_2 \dots a_m, \quad b_1 b_2 b_3 \dots b_m$$

symbolische Produkte:

$$P_1, P_2, \dots P_\mu, \quad K_1, K_2, K_3, \dots K_\nu$$

zusammen, aus denen die A und B linear ausdrückbar sind. Aus

1) Die Erweiterung rührt von Dernyts her (Belg. Bulletin 3, XXII, pag. 11—23, 1891) vgl. F. Meyer und Hurwitz, Math. Ann. Bd. 45 pag. 398.

Digitized by Google

den K bilde ich sodann in folgender Weise 2 neue Formenreihen

$$K'_1, K'_2, \ldots K'_\nu, \quad R_1, R_2, \ldots R_\nu.$$

1. Ich ersetze die Symbole b in allen Permutationen durch die Coefficienten der linearen Formen s. Durch Addition der entstehenden Produkte erhält man die K'. Sie sind simultane symmetrische Covarianten und Invarianten der linearen Formen s.

2. Ich ersetze die Symbole b durch die Symbole r der symbolischen Form:

$$r_x^m = a_{1,x} a_{2,x} \ldots a_{m,x}.$$

Da die Relationen zwischen den Coefficienten von r, welche aussagen, daß r in Linearfaktoren zerfällt, vom Grade $m+1$ in den Coefficienten sind, so sind die R asyzygetisch.

In Folge der beiden Formeln:

$$a_x^n = s_{1,x} s_{2,x} \ldots s_{n,x}, \quad r_x^m = a_{1,x} a_{2,x} \ldots a_{m,x}$$

sind die P Aggregate der K' und die R Aggregate der P. Man hat somit die Ungleichungen:

$$\mu \geqq \nu, \quad \nu \geqq \mu$$

und die Gleichung:

$$\mu = \nu.$$

Digitized by Google

Bestimmung relativer Wärmeleitfähigkeiten nach der Isothermenmethode.

Von

W. Voigt.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Juli 1897.)

Wie ich unlängst gezeigt habe, kann man die de Sénarmont'sche Methode zur Darstellung der Isothermen auf der Oberfläche eines ungleichtemperirten Körpers vervollkommnen, wenn man den leichtschmelzenden Ueberzug desselben nicht aus einem Gemisch von Wachs und Terpentin, sondern aus reiner Elaidinsäure mit einem geeigneten Zusatz der vorgenannten Stoffe herstellt. In diesem Gemisch besitzt die Elaidinsäure einen gut definirten Schmelzpunkt in der Nähe von 45° C; sie krystallisirt beim Erstarren in sehr kleinen Individuen und liefert deshalb Schmelz- oder Erstarrungscurven von außerordentlicher Schärfe und Feinheit.

Diese Isothermen habe ich bereits bei einer neuen Methode zur Bestimmung der Verhältnisse der thermischen Hauptleitfähigkeiten in Krystallen benutzt[1]); hier will ich zeigen, wie man dieselben unter Umständen auch zur Bestimmung der relativen Leitfähigkeiten verschiedener fester Körper vortheilhaft benutzen kann.

Eine neue Methode zur Lösung dieser Aufgabe dürfte nicht überflüssig sein, weil die gebräuchlichen mannigfache Uebelstände besitzen. Diejenige, welche die Messung der stationären Temperaturen in einem an den Enden konstant temperirten Stabe benutzt, leidet unter der Schwierigkeit, diese Temperaturen zuverlässig zu bestimmen, überdies gestattet sie die Anwendung auf schlecht leitende Körper nicht und erfordert viel Material, ver-

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1896, No. 4.

Digitized by Google

sagt somit bei Krystallen durchaus. Schon bei Gläsern hat man daher, obwohl für die eigentlichen Zwecke der Untersuchung die Kenntniß der relativen Leitfähigkeiten ausreichend gewesen wäre, eine der umständlichen Methoden zur Bestimmung ihrer absoluten Werthe bevorzugt[1]). Die unten zu beschreibende Anordnung ist theoretisch denkbar einfach, insofern sie durchaus auf einem bekannten, direct aus den Differentialgleichungen der Wärmeleitung folgenden Theorem beruht; sie umgeht die Berücksichtigung der oberflächlichen Leitfähigkeit und vermeidet dadurch eine Quelle großer Komplication und Unsicherheit; sie erfordert überaus wenig Material und gestattet eine recht günstige Genauigkeit der Bestimmung, um so mehr, als die Beobachtungen sich schnell hintereinanderfolgend wiederholen lassen. —

Durchsetzt eine Wärmeströmung eine Grenzfläche o_{12} zwischen zwei Körpern (1) und (2), so gelten für die Temperatur τ in o_{12} die Bedingungen

$$(1) \qquad \tau_1 = \tau_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial n},$$

wobei λ_h die Leitfähigkeit des Körpers (h) und n die in beliebigem Sinne positiv gerechnete Normale auf o_{12} bezeichnet.

Schneidet die Fläche o_{12} die äußere Begrenzung O des körperlichen Systemes normal, so bilden das Element ds der Schnittcurve s und dasjenige dn der Normale n zwei zu einander senkrechte, in der Tangentenebene an O gelegene Richtungen.

Schreibt man also obige Gleichungen in der Form

$$(2) \qquad \frac{\partial \tau_1}{\partial s} = \frac{\partial \tau_2}{\partial s}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial n},$$

so folgt aus ihnen durch Division bei Einführung der Winkel φ_h zwischen den Isothermen auf O und dem Element ds der Grenzcurve

$$(3) \qquad \lambda_1 \operatorname{ctg} \varphi_1 = \lambda_2 \operatorname{ctg} \varphi_2.$$

Diese Formeln giebt das Brechungsgesetz für die Isothermen auf der äußeren Begrenzungsfläche des Systems beim Durchgang durch die Grenzcurve zwischen den beiden Körpern (1) und (2); sie ist von der äußern Leitfähigkeit der Körper durchaus unabhängig. Kann man die Winkel φ_h mit genügender Genauigkeit messen, so vermittelt Gleichung (3) den Werth der relativen Leitfähigkeit λ_1/λ_2.

1) O. Paalhorn, über die Wärmeleitung verschieden zusammengesetzter Gläser. (Diss.). Jena 1894.

Digitized by Google

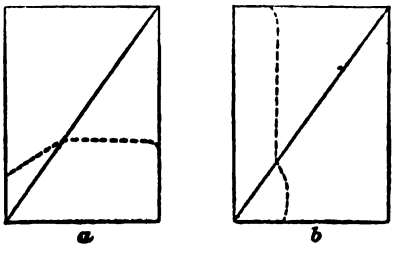
Um diese Beobachtung bequem ausführen zu können, wird man den beiden Körpern die Gestalt dünner Platten geben, die längs eines ebenen Schnittes, der normal zu ihren Hauptflächen steht, zusammenhängen. Da aus (3) bei logarithmischem Variiren folgt

$$(4) \qquad \frac{\delta(\lambda_1/\lambda_2)}{\lambda_1/\lambda_2} = \frac{2\delta\varphi_1}{\sin 2\varphi_1} - \frac{2\delta\varphi_2}{\sin 2\varphi_2},$$

wird man ferner zur Erzielung größter Genauigkeit die Winkel φ_A dem Werthe $\pi/4$ möglichst nahe bringen. Bei nur wenig verschiedenen λ_1 und λ_2 geschieht dies genügend genau, wenn man die „einfallende" Isotherme, d. h. die im Ursprungsgebiet des Wärmestromes liegende, um 45° gegen die Grenzlinie geneigt verlaufen läßt; bei stärker verschiedenen λ_1 und λ_2 wird man den Einfallswinkel so wählen, daß das eine φ_A etwa ebensoviel oberhalb 45° bleibt, wie das andere unterhalb.

Hiernach ergiebt sich die folgende Anordnung als geboten. Man setzt aus zwei Platten von der Form congruenter rechtwinkliger Dreiecke durch Verkitten der Hypothenusenflächen eine rechteckige Platte zusammen, deren Seitenverhältniß am besten ungefähr der Quadratwurzel aus dem Verhältniß der Leitfähigkeiten gleich gewählt wird; eine zur angenäherten Bestimmung des letzteren dienende Beobachtung kann mit Hülfe einer quadratischen Doppelplatte im Voraus angestellt werden.

Diese Doppelplatte wird mit dem Elaidinsäuregemisch recht dünn und gleichmäßig überzogen und sodann entweder mit der kürzeren Kathedenfläche der besser, oder mit der längeren der schlechter leitenden Hälfte an einen auf 70—90° C erwärmten amalgamirten Kupferklotz angelegt, wie dies in der früheren Notiz eingehender beschrieben ist. Die Schmelzcurven, die in diesen beiden Fällen entstehen haben die Gestalten *a* und *b* in der nebenstehenden Figur; die Form *a* ist weniger gekrümmt, als *b*, und eignet sich daher besser zur Messung der Winkel φ_A, die in der früher beschriebenen Weise angestellt werden kann.



Wendet man bei der Herstellung des Ueberzuges der Doppelplatte die früher beschriebenen Vorsichtsmaßregeln an und probirt die vortheilhafteste Temperatur des Kupferklotzes aus, die bei schlechten Leitern passend höher, bei guten niedriger gewählt

Digitized by Google

wird, so werden die Schmelzcurven überraschend klar und geradlinig und gestatten die Messung der Winkel φ_k bis auf Bruchtheile eines Grades. Da nun einer Unsicherheit beider Winkel um je $\frac{1}{4}^0$ einer Unsicherheit des Verhältnisses λ_1/λ_2 um 2 % entspricht, so ist die Genauigkeit der Methode keine unbeträchtliche.

Um zu zeigen, daß eine solche Genauigkeit in praxi leicht erreichbar ist, theile ich nachstehend die Beobachtungen an drei Doppelplatten aus drei Glasproben 1, 2, 3 mit, welche ich der Güte des Herrn Dr. Schott in Jena verdanke; die Herstellung der Doppelplatten hat die Firma Dr. Steeg und Reuter in Bad Homburg ausgeführt. Die Doppelplatten besaßen, da die Leitfähigkeiten der Hälften sich nicht sehr beträchtlich unterschieden, quadratische Form, und die Erwärmung geschah einmal von der einen, dann von der andern Kathedenfläche der besser leitenden Hälfte aus. Die mit ihnen erhaltenen Resultate sind die folgenden.

Plattencombination (1, 2)

1. Isotherme $\varphi_1 = 44^0.8$, $\varphi_2 = 36^0.0$
2. „ $\varphi_1 = 45^0.1$, $\varphi_1 = 37^0.0$.

Plattencombination (2, 3)

1. Isotherme $\varphi_2 = 45^0.6$, $\varphi_3 = 34^0.8$
2. „ $\varphi_2 = 47^0.0$, $\varphi_3 = 37^0.1$.

Plattencombination (3, 1)

1. Isotherme $\varphi_3 = 25^0,7$, $\varphi_1 = 44^0.4$
2. „ $\varphi_3 = 31^0.6$, $\varphi_1 = 49^0.1$.

Berechnet man hieraus die Verhältnisse λ_k/λ_k nach (3), so erhält man die im Folgenden mit „beobachtet“ überschriebenen Werthe; bestimmt man jedes dieser Verhältnisse dagegen aus den beiden andern beobachteten Zahlen, so gelangt man zu den als „berechnet“ bezeichneten.

	Beobachtet	Berechnet
$\lambda_1 : \lambda_2 =$	1.34_5	1.35_5
$\lambda_2 : \lambda_3 =$	1.44_0	1.45_0
$\lambda_3 : \lambda_1 =$	0.514	0.515.

Die Uebereinstimmung ist eine sehr gute.

In der von den Herren Winkelmann und Schott veröffentlichten Tabelle [1]) der Konstanten einiger Glassorten finden

1) A. Winkelmann und O. Schott, Wied. Ann. 51, p. 742, 1894.

Digitized by Google

sich drei Gläser, die nach der Mittheilung von Herrn Dr. Schott den mir gesandten sehr ähnlich sind; die dort mit (19 = 5 = 80) bezeichnete soll mit (1), (21 = 41) mit (2), (20 = 58) mit (3) nahezu übereinstimmen. Indessen ist die thermische Leitfähigkeit nur für die erste Sorte beobachtet, für die beiden andern aus der chemischen Zusammensetzung nach einer Interpolationsformel berechnet, die just für die erste Sorte besonders schlecht mit der Beobachtung stimmt [1]). Deshalb sind die in jener Tabelle angegebenen Zahlen mit den obigen nicht wohl vergleichbar.

1) S. Paalhorn l. c. p. 30; in der dortigen Tabelle steht jene Glassorte in letzter Reihe, und dem beobachteten Werth 2.267 entspricht der berechnete 2.046.

Digitized by Google

Erwerbung neuer, auf Bernhard Riemann bezüglicher Manuscripte.

Von

F. Klein.

Vorgelegt in der Sitzung vom 31. Juli 1897.

Die Gesellschaft der Wissenschaften hat neuerdings eine Anzahl auf B. Riemann bezüglicher Manuscripte aus dem Nachlasse des verstorbenen Prof. Hattendorff erworben und der Universitätsbibliothek dahier überwiesen, welche sie mit den bisher dort befindlichen Riemann'schen Manuscripten zusammen aufbewahren wird.

Es sind dies zunächst einige lose Blätter, wie sie Riemann für seine Rechnungen zu benutzen pflegte. Dieselben beziehen sich großentheils auf die Theorie der Minimalflächen, zum Theil auch auf die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Herr H. A. Schwarz hat diese Blätter genau durchgesehen und eine Reihe erklärender Bemerkungen hinzugefügt.

Hierzu treten nun zwei Vorlesungsmanuscripte,

nämlich erstens die Originalnotizen, welche sich Riemann für die erste von ihm gehaltene Vorlesung (Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen, Winter 1854/55) zusammengestellt hat; auf dieselben hat Hattendorff in seinem 1869 unter gleichem Titel erschienenen Buche bereits ausführlich Bezug genommen; vergl. insbesondere die Vorrede daselbst; —

zweitens die Nachschrift und die Ausarbeitung, welche sich Hattendorff von der im Sommer 1861 und Winter 1861/62 gehaltenen Vorlesung Riemann's über die Theorie der Functionen einer complexen Größe, der elliptischen und Abel'schen Functionen gemacht hat.

Sehr viel Neues ist aus den hiermit genannten Ausarbeitungen allerdings wohl nicht zu entnehmen; immerhin ist es sehr erwünscht, daß dieselben jetzt allgemein zugänglich sind.

Digitized by Google

Inzwischen ist der Universitätsbibliothek von anderer Seite, nämlich durch Herrn v. Bezold, ein Riemann'sches Vorlesungsheft überwiesen worden, das nicht verfehlen wird, das Interesse der Mathematiker in einem ganz besonderen Maaße auf sich zuziehen. Es handelt sich um die stenographische Nachschrift[1]) einer Vorlesung über die hypergeometrische Reihe, welche Riemann im Sommer 1859 gehalten hat. Wir erfahren aus derselben, daß Riemann bereits damals eine Reihe von Untersuchungen zum Vortrage gebracht hat, welche erst viel später oder bis jetzt auch gar nicht aus seinem Nachlasse bekannt geworden sind. Dahin gehören seine Ideen über lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, die Kettenbruchentwicklung der Quotienten verwandter P-Functionen, die Abbildung der Halbebene auf Kreisbogendreiecke auf der Kugel und anderes mehr. Die Vorlesung schließt mit der heutzutage wohlbekannten Figur mehrerer neben einander liegender dreizipfeliger Kreisbogendreiecke, wie sie in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen auftritt, wenn man das Quadrat k^2 des Legendre'schen Moduls als ursprüngliche Variable zu Grunde legt. Hierneben steht ein Satz, der nicht ganz zu Ende stenographiert ist, aus dem man aber deutlich herauslies't, daß alle Functionen von k^2, welche nirgends sonst als bei $0, 1, \infty$ singuläre Puncte besitzen, eindeutige Functionen des Verhältnisses der beiden Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung werden!

1) In Gabelsberger Stenographie.

Digitized by Google

Note über die symmetrischen und alternirenden Vertauschungsgruppen von n Dingen.

Von

A. Wiman in Lund.

(Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 31. Juli 1897).

1. In einer vorangehenden Note[1]) habe ich erwiesen, daß die Gleichungen 8. Grades gegenüber den Gleichungen niedrigeren Grades die besondere Eigenschaft besitzen, daß dieselben sich nicht auf Formenprobleme von geringerer Dimensionenzahl reduciren lassen. Hier wollen wir nun kurz skizziren, wie man die entsprechende Eigenschaft auch bei den allgemeinen Gleichungen höheren Grades nachweisen kann, daß man also dabei nicht auf Formenprobleme von weniger als $n-2$ Dimensionen gelangen kann. Es ist vortheilhaft den Beweis zuerst für die symmetrischen Gruppen $G_{n!}$ und dann für die alternirenden $G_{\frac{n!}{2}}$ durchzuführen, welche Fälle ja der Nicht-Adjunction bez. Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante entsprechen.

2. Ist n Primzahl, so erledigt sich der Beweis für die symmetrischen $G_{n!}$ schon durch Betrachtung der metacyklischen Untergruppen $G_{n(n-1)}$, welche bekanntlich aus einer ausgezeichneten G_n und n cyklischen G_{n-1} bestehen. Denken wir uns die $G_{n(n-1)}$ in einem Raume R_n als Collineationsgruppe dargestellt. Die bei der G_n festen Punkte erfüllen eine gewisse Anzahl (höchstens n) linearer Räume. Zwei von den letzteren Räumen können bei keiner von der Identität verschiedenen Untergruppe einer G_{n-1} jeder in sich übergehen. Nehmen wir nämlich dies als möglich (etwa bei einer G_δ) an und combiniren die G_δ mit

---

1) „Note über die Vertauschungsgruppen von acht Dingen", Göttinger Nachrichten (1897. Heft 1).

Digitized by Google

der G_n, so erhalten wir ersichtlich eine Operation, welche δ-mal wiederholt noch von der Periode n ist; um dies einzusehen, braucht man nur den durch die beiden bei der G_δ festbleibenden Räume bestimmten höheren Raum zu betrachten. Diese Folgerung widerspricht aber der Natur der $G_{n(n-1)}$. Jetzt erschließt man leicht, daß jede G_{n-1} $n-1$ von den soeben erwähnten bei der G_n festbleibenden linearen Räumen cyklisch vertauschen muß. Nehmen wir an, diese Räume seien Punkte, und daß ein n-ter Raum nicht existirt, so ist doch die Dimensionenzahl $m = n-2$; unter allen anderen Voraussetzungen ist dieselbe natürlich höher.

3. Wir betrachten jetzt die symmetrischen Gruppen $G_{n!}$ für beliebiges n und denken uns als erzeugende Operationen das System von Transpositionen: (1,2), (1,3), ... (1,n), Betreffend die geometrische Darstellung der $G_{n!}$ unterscheiden wir hier leicht drei Hauptfälle je nach den Eigenschaften der den Transpositionen entsprechenden Collineationen:

a) Die Transpositionen werden als centrische Perspectivitäten dargestellt; festbleibende Punkte sind also einerseits ein einzelner Punkt R_0 anderseits die Punkte eines R_{m-1}. Wir setzen hier voraus, daß die Dimensionenzahl $m > 1$.

b) Die festen Punkte erfüllen einen R_i und einen R_{m-i-1}, wobei $1 \leqq i < m-i-1$, also $m \geqq 4$.

c) Die Punkte zweier $R_{\frac{m-1}{2}}$ bleiben fest; also m ungerade.

Wir wollen jetzt untersuchen, welche Resultate durch diese verschiedenen Fälle geliefert werden.

a) Wir betrachten die zu den $n-1$ erzeugenden Perspectivitäten gehörigen Punkte R_0. Setzen wir voraus, daß die Gruppe nicht schon einen R_μ, wo $\mu < m$, invariant läßt, so können diese $n-1$ Punkte nicht alle in einem solchen R_μ liegen; ja auch nicht deren $\mu+2$, weil dann auf Grund der Transitivitätseigenschaften der $G_{n!}$ auch die anderen dort belegen sein müßten. Setzen wir also $n = m+1$, bleibt noch ein R_{m-1} invariant, und für $n = m+2$ erhalten wir ein System von $m+2$ R_{m-1}, deren jeder bei einer einzelnen der $m+2$ Untergruppen $G_{m+1!}$ invariant bleibt. Wir können den R_m auf diese R_{m-1} als ein überzähliges Coordinatensystem beziehen, wobei noch die identische Relation

$$\sum_{i=1}^{i=m+2} x_i = 0$$

Digitized by Google

hergestellt werden kann. Die $G_{m+3!}$ erhält man dann unmittelbar als Vertauschungsgruppe der x_i.

Wir sollen noch beweisen, daß diese $G_{m+2!}$ keine Untergruppe einer $G_{m+3!}$ im Raume R_m sein kann. Nehmen wir einstweilen an, dieses sei der Fall. Den $\frac{(m+3)(m+2)}{2}$ Untergruppen $G_{m+1!}$ sollen eben so viele R_{m-1} entsprechen. Nun ist aber auch jeder Transposition innerhalb der $G_{m+3!}$ eine solche $G_{m+1!}$ zugeordnet. Daraus folgert man leicht, daß die den Transpositionen und den $G_{m+1!}$ zugeordneten R_{m-1} zusammenfallen müssen, daß also die weiteren $\frac{(m+1)(m+2)}{2} R_{m-1}$ durch die Gleichungen $x_i - x_k = 0$ gegeben sind. Es sind also $x_i - x_k = 0$ bez. $x_i = 0$ den Transpositionen (i,k) bez. $(i, m+3)$ zugeordnet, und wir erhalten für jeden der $m+2$ i-Werthe eine neue $G_{m+2!}$, deren $m+2$ zugehörige R_{m-1} durch die Gleichungen:

$$y_i = -(m+2)\,x_i = 0,\ y_k = x_i - x_k = 0\ (k = 1, \ldots i-1, i+1, \ldots m+2)$$

gegeben sind, wobei noch der Relation

$$\sum_1^{m+2} y = 0$$

genügt wird. Von den y_i ausgehend muß man auf dieselbe $G_{m+3!}$ gelangen, also müssen $y_i = 0$ und $y_i - y_k = 0$ $(l, k = 1, \ldots . m+2)$ dasselbe System von R_{m-1} liefern wie $x_i = 0$ und $x_i - x_k = 0$. Nun ist aber

$$y_i - y_k = -x_k - (m+3)\,x_i,$$

wodurch die Ungereimtheit der Voraussetzung, daß die $G_{m+3!}$ existire, nachgewiesen ist. Der Fall a) liefert uns also nur die triviale Erzeugung der $G_{n!}$ in einem R_{n-2} als Vertauschungsgruppe von n R_{n-3}.

b) Dieser Fall wird uns mit einer einzigen Ausnahme keine $G_{n!}$ in einem R_m, wo $m \leqq n-2$, liefern. Es ist $1 \leqq i < m-i-1 \leqq n-4$ und $n \geqq 6$. Auch hat man $m-i-1 \leqq n-5$ in allen Fällen, ausgenommen wenn $i = 1$ und $m = n-2$. Wir lassen zuerst den letzteren Fall bei Seite und nehmen an, es sei schon nachgewiesen, daß die $G_{n-2!}$ in keinem Raume von weniger als $n-4$ Dimensionen existirt. Dann gelangen wir hier bei der Herstellung der $G_{n!}$ zu einem Widerspruch. Die einer einzelnen Transposition zugeordnete $G_{n-2!}$ muß ja jeden der beiden von den festen Punkten erfüllten Räume R_i und R_{m-i-1} in sich überführen. Es folgt aber aus der obigen Annahme, daß jeder Punkt von so-

Digitized by Google

wohl R_i als R_{n-i-1} wenigstens bei der alternirenden $G_{\frac{n-2}{2}!}$ fest bleiben muß, was aber nur bei einer cyklischen Gruppe zulässig ist. Nun wissen wir, daß sowohl die $G_{7!}$ (nach unserer 2. Nummer) als die $G_{6!}$ (nach unserer früheren Note) in keinem Raume von weniger als 5 bez. 6 Dimensionen existirt. Dieses können wir sofort auf die Fälle $n = 9$ und $n = 10$ anwenden, und in gleicher Weise erledigt sich die Frage für höhere n; nur muß man dabei auch auf die Resultate des Falles c) Bezug nehmen.

Für den Fall $i = 1$, $m = n-2$ beweist man durch Betrachtung der gegenseitigen Verhältnisse der zu den Transpositionen gehörigen R_1, daß nur $n = 6$ eine Gruppe liefert, daß man aber für höhere n auf Widersprüche gelangt. Die für $n = 6$ erhaltene Gruppe ist aber keine andere als die unter a) gegebene; es beruht dieses auf den zweierlei Möglichkeiten eine $G_{6!}$ als Vertauschungsgruppe von 6 Dingen herzustellen.

c) Hier erhalten wir für $m = 1$ in bekannter Weise die Oktaedergruppe oder die $G_{4!}$ und für $m = 3$ die $G_{6!}$[1]). Diese beiden Gruppen sind aber auch die einzigen symmetrischen $G_{n!}$, welche in einem Raume R_m mit $m = n-3$ vorkommen. Den Beweis hierfür kann man folgendermaaßen erbringen. Bei einer Transposition, etwa $(1, 2)$, bleiben ja die Punkte zweier $R_{\frac{n-1}{2}}$ fest. Diese $R_{\frac{n-1}{2}}$ müssen ersichtlich bei der zugeordneten $G_{\frac{n-2}{2}!}$, welche durch die Vertauschungen von $(3, 4, \ldots . n)$ entsteht ein invariantes System bilden und also wenigstens bei der alternirenden $G_{\frac{n-2}{2}!}$ jeder in sich übergehen; letztere enthält aber als Untergruppen symmetrische $G_{n-4!}$. Nun ist es aber durch Benutzung unserer schon erhaltenen Resultate leicht zu erweisen, daß, falls $\frac{m-1}{2} \geqq 3$ und $m \leqq n-3$[2]), gerade diese $G_{\frac{n-2}{2}!}$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, $G_{n-4!}$ in einem $R_{\frac{n-1}{2}}$ nicht existirt, wobei man doch freilich zugleich einen Rückschluß von niedrigeren n-Werthen auf höhere ziehen muß.

In derselben Weise findet man, daß für $m = n-2$ keine an-

---

1) Die Existenz letzterer Gruppe in einem R_3 wurde von F. Klein durch liniengeometrische Betrachtungen erschlossen. Man sehe Math. Ann. IV, XXVIII.

2) Betreffend die Darstellung von $G_{6!}$ in R_5 (also für $\frac{m-1}{2} = 2$) ist ja die Frage schon durch unsere frühere Note entschieden.

Digitized by Google

deren Fälle als diejenigen, für welche $n = 3, 5, 7, 9$, möglich sind. Die beiden letzteren Fälle kann man auch beseitigen, wobei freilich complicirtere Methoden, über welche wir hier nicht referiren wollen, angewandt werden müssen; die $G_{3!}$ ist die gewöhnliche binäre diedrische D_3, und von $G_{5!}$ erhält man zwei Arten, nämlich die beiden Systeme von Untergruppen innerhalb der soeben besprochenen $G_{6!}$. Es besteht also der Satz, daß mit einer einzigen Ausnahme, nämlich für $n = 5$, die symmetrischen $G_{n!}$ nur auf die durch a) gegebene triviale Weise in einem R_{n-2} darstellbar sind.

4. Jetzt betrachten wir die alternirenden $G_{\frac{n!}{2}}$ und denken uns dieselben durch ein System von Operationen; $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, ... $(1, 2, n)$ erzeugt. Betreffend die geometrische Darstellung unterscheiden wir hier zwei Hauptfälle.

Im ersten Falle erfüllen die bei $(1, 2, 3)$ festbleibenden Punkte nur zwei lineare Räume. Jeder von diesen Räumen muß auch bei den geraden Vertauschungen der $n-3$ Elemente $4, 5, \ldots n$ invariant bleiben. Wenn aber sowohl $1, 2, 3$ als $4, 5, \ldots n$ sich ungerade vertauschen, müssen jene beiden Räume Platz wechseln. Man überzeugt sich in der That leicht, daß, falls auch hier jeder der beiden Räume in sich übergeführt würde, man keine $G_{3 \cdot n-3!}$ von der nöthigen Structur erhalten kann, weil jede G_μ, wo μ nicht durch 3 theilbar ist, sich durch Combination mit der G_3 $(1, 2, 3)$ als Untergruppe einer $G_{3\mu}$ erweisen würde. Die gedachten Räume müssen also von gleicher Dimension $\frac{m-1}{2}$ sein.

Wir setzen jetzt voraus, daß $m \leqq n-3$. Für $m = 1$ erhalten wir bekanntlich die Tetraedergruppe und die Ikosaedergruppe, also die $G_{\frac{4!}{2}}$ und die $G_{\frac{5!}{2}}$ und für $m = 3$ die $G_{\frac{6!}{2}}$ und die $G_{\frac{7!}{6}}$[1]). Diese sind aber auch die einzigen Beispiele von Erniedrigung der Dimension, auf welche wir hier geführt werden. Auf Grund der schon bekannten Eigenschaften der Vertauschungsgruppen von acht Dingen erhalten wir ja für $m = 5$ keine $G_{\frac{8!}{2}}$. Um zu ent-

1) Auch die $G_{\frac{7!}{2}}$ ist zuerst von F. Klein als in einem R_3 existirend nachgewiesen; man sehe Math. Ann. XXVIII.

Digitized by Google

scheiden, ob die $G_{\frac{10!}{2}}$ in einem R_7 dargestellt werden kann, bedarf es einer besonderen Untersuchung, auf welche wir hier nicht eingehen können. Für höhere ungerade Werthe von m beweist man dagegen ohne Schwierigkeit, daß die $G_{\frac{n-3!}{2}}$ $(n \geqq m+3)$ in keinem $R_{\frac{m-1}{2}}$ vorkommt, was ja eine nothwendige Bedingung für die fragliche Herstellung von $G_{n!}$ in einem R_m war.

Im zweiten Hauptfalle bleiben bei (1, 2, 3) die Punkte von drei linearen Räumen fest. Diese Räume müssen ersichtlich jeder in sich bei der zugehörigen alternirenden Gruppe von $4, 5, .. n$ übergeführt werden, falls nämlich letztere Gruppe einfach ist, also $n-3 \geqq 5$; dagegen erweist es sich wie im vorigen Falle als nothwendig, daß bei derjenigen Hälfte der Operationen der $G_{3 \cdot n-3!}$, welche nicht durch Combination von (1, 2, 3) mit der $G_{\frac{n-3!}{2}}$ erhalten wird, zwei von den drei Räumen permutirt werden und also von gleicher Dimension sein sollen. Bewirkt aber die alternirende $G_{\frac{n-3!}{2}}$ schon eine Vertauschung, so ersieht man aus der Zerlegung in den beiden hier vorkommenden Fällen (Tetraedergruppe und G_3), daß die drei Räume dann cyklisch permutirt werden müssen und also alle drei von derselben Dimension μ, was unmittelbar die Bedingung $m = 3\mu + 2$ liefert. Nehmen wir auch $m \leqq n-3$, so bleibt als der einzige hier zu betrachtende Fall $m = 2$ übrig. In der That erhalten wir hier in der Ebene eine Repräsentation der alternirenden $G_{\frac{6!}{2}}$; die $G_{3 \cdot n-3!}$ oder die G_{18} ist diejenige Gruppe, welche eine gewöhnliche ebene C_3 in sich überführt, und die Fixpunkte bei (1, 2, 3) sind die Ecken eines Wendepunktsdreiecks, welche ja auch bei der G_{18} alle möglichen Vertauschungen erleiden. Diese $G_{\frac{6!}{2}}$ und die Ikosaederuntergruppe sind aber auch die einzigen Fälle, bei denen eine Erniedrigung der Dimension hier eintritt. Zwar erhalten wir auch die $G_{\frac{6!}{2}}$ in der Weise im R_3 dargestellt, daß bei (1, 2, 3) zwei einzelne Punkte und die Punkte einer Geraden fest bleiben; aber diese $G'_{\frac{6!}{2}}$ ist dieselbe wie die im ersten Hauptfalle erhaltene, nur haben die beiden Systeme von Ikosaederuntergruppen Platz gewechselt. In den anderen Fällen stößt man mit einer Ausnahme schon bei der Herstellung der $G_{3 \cdot n-3!}$ auf Wider-

Digitized by Google

sprüche. Im Ausnahmefalle ist $m = n-3$, und es bleiben bei einer Operation $(1, 2, 3)$ zwei einzelne Punkte und die Punkte eines R_{n-5} fest. Man bedarf dann noch weiterer Ueberlegungen. Diese können vortheilhaft daran angeknüpft werden, daß die $G_{3 \cdot n-3}!$ ersichtlich im R_{n-5} eine symmetrische $G_{n-3}!$ erzeugen muß. Nun kennen wir ja schon aus unseren Untersuchungen über symmetrische Gruppen die verschiedenen Möglichkeiten diese $G_{n-3}!$ herzustellen. Hiermit erhalten wir aber auch Aufschlüsse über die Natur der $G_n!$, und es läßt sich (etwa wie im Falle a) der 3. Nummer zeigen, daß dieselben auf Widersprüche führen.

Hiermit beenden wir unsere vorläufige Mittheilung. Wir wollen in der nächsten Zeit an einem anderen Orte mehr eingehend die hier besprochenen Fragestellungen behandeln.

Göttingen, Juli 1897.

Digitized by Google

Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder.

Von

Hermann Minkowski in Zürich.

Vorgelegt von David Hilbert in der Sitzung vom 31. Juli 1897.

Ein convexer Körper ist vollständig dadurch gekennzeichnet[1]), daß er eine abgeschlossene Punktmenge ist, innere Punkte besitzt, und daß jede gerade Linie, die innere Punkte von ihm aufnimmt, mit seiner Begrenzung stets zwei Punkte gemein hat (niemals mehr als zwei Punkte, falls auch die convexen Körper, die sich in's Unendliche erstrecken, mit in Betracht gezogen werden). Infolge dieses einfachen Charakters spielen diese Gebilde eine gewisse Rolle bei der Behandlung einiger partieller Differentialgleichungen, die in der mathematischen Physik auftreten. Neuerdings habe ich in dem Buche „Geometrie der Zahlen" gezeigt, daß auch merkwürdige arithmetische Beziehungen sich an die convexen Körper knüpfen. Einen besonderen Reiz bieten die Sätze über convexe Körper noch durch den Umstand dar, daß sie in der Regel für diese ganze Kategorie von Gebilden ohne jede Ausnahme Geltung haben.

Der vorliegende Aufsatz entstand bei Gelegenheit von Versuchen, den folgenden Satz zu beweisen, den ich seit längerer Zeit vermuthete und dessen elementare Fassung nicht auf die Schwierigkeiten seiner Verificirung schließen läßt: Wenn aus einer endlichen Anzahl von lauter Körpern[2]) mit Mittel-

1) Geometrie der Zahlen, I. Lieferung, Leipzig bei B. G. Teubner, 1896; S. 200. Ich habe dort die betreffenden Gebilde nirgends concave Körper genannt, hier will ich mich der kürzeren Bezeichnung convex bedienen.

2) Unter den „Körpern mit Mittelpunkt" dürfen hier, wie aus Lehrsatz V (S. 19) der Arbeit leicht ersichtlich ist, jedenfalls beliebige abgeschlossene Punktmengen mit Mittelpunkt, denen eine bestimmte Größe der Oberfläche zukommt, verstanden werden.

Digitized by Google

punkt, die unter einander nur in den Begrenzungen zusammenstoßen, sich ein convexer Körper aufbaut, so hat dieser stets ebenfalls einen Mittelpunkt.

Ich behandle hier nur diejenigen convexen Körper, die ihre ganze Begrenzung in einer endlichen Anzahl von Ebenen liegen haben und auch sich nicht in's Unendliche erstrecken; ich entwickele über die eindeutige Festlegung eines derartigen Polyeders unter Verwendung der Inhalte seiner Seitenflächen einige Theoreme, die durch ihren leicht verständlichen Inhalt und andererseits die zu ihrem Nachweise erforderlichen Methoden Beachtung verdienen. Diese Theoreme sowie ihre Ausdehnung auf beliebige convexe Körper werfen auch ein neues Licht auf die Eigenschaft der Kugel, unter allen Körpern von gleicher Oberfläche das größte Volumen zu besitzen.

§ 1. Vorbemerkungen.

1. Es seien rechtwinklige Coordinaten x, y, z zu Grunde gelegt. Wenn von einer Richtung (α, β, γ) gesprochen wird, so soll gemeint sein, daß α, β, γ die Cosinus der Neigungswinkel der Richtung gegen die Richtungen der Coordinatenaxen sind. Es sei $\mathfrak{P}$ ein convexes Polyeder mit n Seitenflächen, die in beliebiger Ordnung numerirt sein mögen. Es sei J das Volumen von $\mathfrak{P}$, F_ν $(\nu = 1, \ldots n)$ der Flächeninhalt der ν^{ten} Seitenfläche, mithin $O = F_1 + \cdots + F_n$ die Größe der Oberfläche von $\mathfrak{P}$. Es sei ferner $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ die Richtung einer auf der ν^{ten} Seitenfläche nach dem Aeußeren von $\mathfrak{P}$ hin errichteten Normalen. Die n Richtungen $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ sind verschieden und jedenfalls derart, daß darunter sich irgend drei unabhängige finden, d. h. daß sie nicht alle einer einzigen Ebene angehören können.

Es sei $\mathfrak{p}$ irgend ein innerer Punkt von $\mathfrak{P}$, und es sei p_ν für $\nu = 1, \ldots n$ die Länge des von $\mathfrak{p}$ auf die ν^{te} Seitenfläche von $\mathfrak{P}$ gefällten Perpendikels. Hält man den Punkt $\mathfrak{p}$ und die Richtungen $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ fest, betrachtet hingegen die Längen p_ν als veränderlich, so ändert sich das Polyeder $\mathfrak{P}$ und mit ihm sein Volumen J gemäß der Differentialformel:

$$dJ = F_1 dp_1 + \cdots + F_n dp_n. \tag{1}$$

Will man diese Formel auf den Unterschied des Volumens derjenigen zwei Polyeder anwenden, die aus $\mathfrak{P}$ durch Dilatation vom Punkte $\mathfrak{p}$ aus in allen Richtungen in einem Verhältnisse $t : 1$, beziehlich $t + dt : 1$ entstehen, so hat man F_ν durch $F_\nu t^2$ und dp_ν

Digitized by Google

durch $p_\nu dt$ zu ersetzen. Wird die hervorgehende Formel nach t zwischen 0 und 1 integrirt, so ergiebt sich

$$3J = F_1 p_1 + \cdots + F_n p_n. \tag{2}$$

Benutzen wir statt $\mathfrak{p}$ irgend einen anderen Punkt in $\mathfrak{P}$, der die relativen Coordinaten a, b, c in Bezug auf $\mathfrak{p}$ haben mag, so haben wir p_ν durch $p_\nu - (a\alpha_\nu + b\beta_\nu + c\gamma_\nu)$ zu ersetzen. Weil a, b, c innerhalb gewisser Grenzen beliebig sind, so führt die Formel (2) zu

$$\sum F_\nu \alpha_\nu = 0, \quad \sum F_\nu \beta_\nu = 0, \quad \sum F_\nu \gamma_\nu = 0, \tag{3}$$

wo die Summen sich auf die Werthe $\nu = 1, \ldots n$ beziehen. Die n Richtungen $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ sind also weiter jedenfalls derart, daß diese drei Gleichungen (3) eine Auflösung in positiven Größen F_ν zulassen.

2. Es sei (α, β, γ) irgend eine Richtung und Θ das Maximum, ϑ das Minimum von $\varphi = \alpha x + \beta y + \gamma z$ im Bereiche des Polyeders $\mathfrak{P}$, so liegt $\mathfrak{P}$ zwischen den zwei parallelen Ebenen $\varphi = \vartheta$ und $\varphi = \Theta$ eingeschlossen und kann $\Theta - \vartheta = d$ als die Breite des Polyeders in der Richtung (α, β, γ) bezeichnet werden. Projicirt man die gesammte Oberfläche des Polyeders senkrecht auf die Ebene $\varphi = \vartheta$, so wird von der Projection ein gewisses Polygon in dieser Ebene im ganzen Inneren doppelt überlagert, und ist danach der Flächeninhalt dieses Polygons gewiß $< \frac{1}{2} O$. Sodann schließt derjenige Cylinder, der senkrecht auf diesem Polygon steht und die Höhe d hat, so daß er von der Ebene $\varphi = \vartheta$ bis zur Ebene $\varphi = \Theta$ reicht, das Polyeder $\mathfrak{P}$ ganz in sich ein, und daraus folgt

$$\tfrac{1}{2} Od > J. \tag{4}$$

Es sei $\mathfrak{f}$ der Schwerpunkt von $\mathfrak{P}$ und s sein Abstand von der Ebene $\varphi = \Theta$. Nimmt man irgend einen Punkt aus $\mathfrak{P}$ in der Ebene $\varphi = \vartheta$, so zerlegt sich das Polyeder $\mathfrak{P}$ in die Pyramiden, welche diesen Punkt als Spitze und die einzelnen, nicht durch ihn gehenden Seitenflächen von $\mathfrak{P}$ als Grundflächen haben; diese Pyramiden stoßen unter einander nur in den Begrenzungen zusammen. Da in einer Pyramide der Abstand des Schwerpunkts von der Basis $^1/_4$ der Höhe beträgt, so hat in jeder dieser Pyramiden der Schwerpunkt von der Ebene $\varphi = \Theta$ einen Abstand $\geqq \frac{1}{4} d$, und daher ist auch $s \geqq \frac{1}{4} d$; mit Hülfe von (4) folgt daher

$$s > \frac{J}{2O}. \tag{5}$$

Da dieses Resultat für jede beliebige Richtung (α, β, γ) gilt,

Digitized by Google

so ist danach die Kugel vom Radius $\frac{J}{2O}$ mit $\mathfrak{f}$ als Mittelpunkt ganz im Inneren von $\mathfrak{P}$ enthalten; daraus folgt

$$J > \frac{4\pi}{3}\left(\frac{J}{2O}\right)^3, \quad \frac{O^3}{J^3} > \frac{\pi}{6}.$$

Betrachtet man weiter irgend einen Punkt aus $\mathfrak{P}$ in der Ebene $\varphi = \vartheta$, irgend einen Punkt aus $\mathfrak{P}$ in der Ebene $\varphi = \Theta$ und dazu den größten Kreis dieser Kugel in der parallelen Ebene $\varphi = \Theta - s$, so enthält das Polyeder mit diesem Kreis und den zwei Punkten sogleich die zwei Kegel, welche die Fläche dieses Kreises als Basis und ihre Spitze beziehlich in jenen zwei Punkten haben; daraus folgt

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{J}{2O}\right)^2 d < J. \tag{6}$$

Ersetzt man (α, β, γ) durch $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$, so vertauschen sich die Rollen der Ebenen $\varphi = \vartheta$ und $\varphi = \Theta$, und anstatt $s \geqq \frac{1}{4} d$ gewinnt man die weitere Ungleichung $s \leqq \frac{3}{4} d$.

Die Werthe von s und d für die Richtung $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ mögen s_ν und d_ν heißen. Für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ im Inneren von $\mathfrak{P}$ gilt offenbar stets

$$p_\nu < d_\nu. \tag{7}$$

Nimmt man endlich für den Punkt $\mathfrak{p}$, auf den sich (2) bezieht, den Schwerpunkt $\mathfrak{f}$ des Polyeders, so zeigt sich, daß der größte unter den Abständen s_ν vorkommende Werth $\geqq \frac{3J}{O}$ sein muß. Verbindet man diesen Umstand mit $s_\nu \leqq \frac{3}{4} d_\nu$ und mit der Ungleichung (6), so folgt

$$\frac{O^3}{J^3} > \frac{\pi}{3}. \tag{8}$$

3. Als convexen Bereich will ich überhaupt jede abgeschlossene Punktmenge bezeichnen, zu der mit irgend zwei Punkten stets auch die ganze sie verbindende Strecke gehört; ein convexer Körper bedeutet dann einen solchen convexen Bereich, der auch innere Punkte enthält, d. h. nicht ganz in einer Ebene gelegen ist.

Unter einer Stützebene eines convexen Bereichs verstehe ich eine Ebene, die nicht zu beiden Seiten von sich Punkte des Bereichs liegen hat und selbst mindestens einen Punkt des Bereichs enthält. Ein convexer Bereich besitzt durch jeden Punkt

Digitized by Google

seiner Begrenzung wenigstens eine Stützebene. Wenn ferner ein convexer Bereich sich nicht in's Unendliche erstreckt, giebt es zu jeder Richtung (α, β, γ) eine und nur eine Stützebene des Bereichs mit dieser Richtung als Normale und so, daß auf der Seite der Ebene, nach welcher die Richtung weist, kein Punkt des Bereichs liegt. Die Gleichung der betreffenden Stützebene ist $\alpha x+\beta y+\gamma z = r^*$, wenn r^* das Maximum von $\alpha x+\beta y+\gamma z$ im Bereiche bedeutet. —

Es seien jetzt irgend n verschiedene Richtungen $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ für $\nu = 1, \ldots n$ gegeben, so, daß darunter drei unabhängige sich finden und daß die drei Gleichungen

$$\sum H_\nu \alpha_\nu = 0, \quad \sum H_\nu \beta_\nu = 0, \quad \sum H_\nu \gamma_\nu = 0 \tag{9}$$

eine Lösung in positiven Werthen H_ν zulassen. Dann läßt sich zunächst zeigen, daß es jedenfalls ein Polyeder giebt mit n Seitenflächen, bei welchem jene Richtungen als die der äußeren Normalen der Flächen auftreten. In der That, durch die n Ungleichungen

$$\alpha_\nu x+\beta_\nu y+\gamma_\nu z-1 \leqq 0 \qquad (\nu = 1, \ldots n) \tag{10}$$

wird ein convexer Bereich Π definirt. Die n Ebenen $\alpha_\nu x+\beta_\nu y+\gamma_\nu z = 1$ sind Tangentialebenen der Kugel $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$. Also enthält Π diese Kugel, und es wird die Begrenzung des Bereichs Π von n, aber nicht schon von weniger Stützebenen geliefert. Ist jetzt x, y, z ein Punkt aus Π, so stellt $p_\nu = 1-\alpha_\nu x-\beta_\nu y-\gamma_\nu z$ die Länge des von x, y, z auf die ν^{te} jener Ebenen gefällten Perpendikels vor; unter Verwendung der vorausgesetzten Lösung von (9) folgt dann $\sum H_\nu p_\nu = \sum H_\nu$. Da die Größen H_ν alle >0 sind, ergiebt sich hieraus, daß die Längen p_ν nicht über eine gewisse Grenze hinausgehen. Da nun unter jenen n Ebenen sich drei solche finden, die sich nur in einem Punkte schneiden, ist danach Π in einem gewissen Parallelepipedum enthalten und kann sich also nicht in's Unendliche erstrecken; somit ist Π ein Polyeder, das der gestellten Forderung entspricht. Das Volumen von Π werde $= \frac{1}{\varrho^3}$ gesetzt.

Wir bezeichnen die Linearform $\alpha_\nu x+\beta_\nu y+\gamma_\nu z$ mit φ_ν. Es seien nun r_ν für $\nu = 1, \ldots n$ irgend welche n Größen $\geqq 0$, und es sei etwa r der größte darunter vorkommende Werth; dann wird durch

$$\varphi_\nu - r_\nu \leqq 0 \qquad (\nu = 1, \ldots n) \tag{11}$$

ein convexer Bereich — er heiße $\mathfrak{P}(r_\nu)$ — definirt, der ganz in

Digitized by Google

demjenigen Polyeder liegt, welches durch Dilatation des Polyeders Π vom Nullpunkte aus im Verhältnisse $r:1$ entsteht. Es kann $\mathfrak{P}(r_\nu)$ ein Polyeder mit n oder mit weniger Seitenflächen von nicht verschwindenden Inhalten werden oder auch sich auf die Fläche eines convexen Polygons in einer Ebene oder auf eine Strecke oder gar auf den Nullpunkt allein reduciren.

Wenn $\mathfrak{P}(r_\nu)$ nicht ein Polyeder mit n Polygonen als Begrenzung wird, so brauchen nicht alle n Ebenen $\varphi_\nu = r_\nu$ wirklich Punkte der Begrenzung des Polyeders zu enthalten. Es sei allgemein r_ν^* das Maximum von φ_ν im Bereiche $\mathfrak{P}(r_\nu)$, so ist jedenfalls $r_\nu^* \leqq r_\nu$ und dann $\mathfrak{P}(r_\nu)$ identisch mit $\mathfrak{P}(r_\nu^*)$; die Ebenen $\varphi_\nu = r_\nu^*$ sind nunmehr sämmtlich Stützebenen dieses Bereichs. Die so bestimmten Größen r_ν^* mögen tangentiale Parameter von $\mathfrak{P}(r_\nu)$ heißen.

Ein solcher Bereich $\mathfrak{P}(r_\nu)$ wird nun, da er sich nicht in's Unendliche erstreckt, stets ein bestimmtes Volumen $J = J(r_\nu)$ besitzen, wobei jedenfalls

$$J \leqq \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \tag{12}$$

sein wird; ferner wird das Gebiet von $\mathfrak{P}(r_\nu)$ in der Ebene $\varphi_\nu = r_\nu^*$, welches allgemein die ν^{te} Seitenfläche von $\mathfrak{P}(r_\nu)$ genannt werden möge, einen bestimmten Flächeninhalt F_ν besitzen; es kann J und jedes F_ν auch Null sein. Diese Größen J und F_ν $(\nu = 1, \ldots n)$ sind offenbar im ganzen durch $r_1 \geqq 0, \ldots r_n \geqq 0$ definirten Gebiete stetige Functionen von $r_1, \ldots r_n$.

Wenn für $\mathfrak{P}(r_\nu)$ alle Größen $F_\nu > 0$ ausfallen, sind die Werthe r_ν ohne Weiteres tangentiale Parameter. — Sind für zwei Bereiche $\mathfrak{P}(q_\nu)$ und $\mathfrak{P}(r_\nu)$ die Systeme q_ν und r_ν tangentiale Parameter, so stellen für $\mathfrak{P}((1-t)q_\nu + tr_\nu)$, wenn $0 < t < 1$ ist, die Werthe $(1-t)q_\nu + tr_\nu$ ebenfalls tangentiale Parameter vor. Daraus ist zu erkennen, daß die Menge derjenigen Systeme r_ν, welche tangentiale Parameter sind, einen convexen Körper in der n-fachen Mannigfaltigkeit aller Systeme r_ν bilden. Die Begrenzung dieses Körpers wird von einer endlichen Anzahl von Stützebenen geliefert, die sämmtlich durch den Punkt $r_1 = 0, \ldots r_n = 0$ gehen, sodaß der Körper ein Kegel mit diesem Punkte als Spitze ist; derselbe ist leicht mittelst seiner Kanten zu charakterisiren, doch gehe ich auf diese Untersuchung, die für das Folgende entbehrlich ist, nicht weiter ein. — Wenn von zwei Bereichen $\mathfrak{P}(q_\nu)$ und $\mathfrak{P}(r_\nu)$, von denen keiner sich auf den Nullpunkt allein reducire, der eine aus dem anderen durch Dilatation und Translation her-

Digitized by Google

vorgeht, d. h. beide ähnlich und ähnlich gelegen sind, so besteht zwischen ihren tangentialen Parametern q_ν^* und r_ν^* ein System von Gleichungen

$$q_\nu^* = a\alpha_\nu + b\beta_\nu + c\gamma_\nu + dr_\nu^* \tag{13}$$

mit bestimmten Werthen a, b, c, d; dabei ist noch stets $d > 0$; wenn $J(r_\nu) > 0$ ist, hat man $d = \frac{\sqrt[3]{J(q_\nu)}}{\sqrt[3]{J(r_\nu)}}$.

§ 2. Die Grundlagen der Untersuchung.

4. Herr Hermann Brunn[1]) hat den folgenden Satz entwickelt: Wenn ein convexer Körper durch drei parallele Ebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ geschnitten wird, von denen die mittlere $\mathfrak{B}$ den Abstand zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ im Verhältnisse $t : 1-t$ theilt, und es haben die Schnittfiguren des Körpers in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Flächeninhalte A, B, C, so besteht die Ungleichung

$$\sqrt{B} \geqq (1-t)\sqrt{A} + t\sqrt{C};$$

dabei gilt hier das Zeichen = nur dann, wenn der Theil des Körpers zwischen den Ebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ sei es ein Cylinder, sei es ein Kegelstumpf mit den Grundflächen in diesen Ebenen, sei es ein Kegel mit der Grundfläche in der einen und der Spitze in der anderen dieser Ebenen ist. Eine entsprechende Eigenschaft der ebenen convexen Figuren ist sehr einfach einzusehen, und die Methode von Brunn zum Nachweis jener Ungleichung ist wesentlich ein Schluß von 2 auf 3 Dimensionen, wobei die Schnitte des convexen Körpers mit allen denjenigen Ebenen zu Hülfe genommen werden, welche die Schnittfigur in $\mathfrak{A}$ in einer Schaar paralleler Linien schneiden und gleichzeitig die Schnittfigur in $\mathfrak{C}$ jedesmal in zwei Stücke von gleichem Verhältniß der Flächeninhalte wie die Schnittfigur in $\mathfrak{A}$ zerlegen. Besondere Schwierigkeiten macht die strenge Erledigung der Grenzfälle, in welchen das Zeichen = in jener Ungleichung eintritt[2]).

Brunn hat auch bereits bemerkt, daß die eben erwähnten

---

1) Ueber Ovale und Eiflächen, S. 23, Inaugural-Dissertation, München 1887; Ueber Curven ohne Wendepunkte, S. 50, Habilitationsschrift, München 1889.

2) Geometrie der Zahlen, §§ 56—57. — H. Brunn, Referat über eine Arbeit: Exacte Grundlagen für eine Theorie der Ovale, Sitzungsber. d. math.-physik. Classe der bayer. Akad. d. Wiss. 1894, Bd. XXIV, S. 101.

Digitized by Google

Sätze sich auf convexe Körper in Mannigfaltigkeiten von mehr als drei Dimensionen ausdehnen lassen. Die hierzu erforderlichen Entwickelungen sind vollständig und in analytischer Form in den §§ 56—57 meiner „Geometrie der Zahlen" auseinandergesetzt.

5. Hier nun werden uns die betreffenden Sätze für eine Mannigfaltigkeit von 4 Dimensionen dienlich sein; diese lassen sich auch leicht als Sätze über convexe Körper in 3 Dimensionen fassen. Ich gehe wieder nur auf die Behandlung von Polyedern ein.

Es seien die n Richtungen $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ für $\nu = 1, \ldots n$ wie in 3. beschaffen, und es sollen alle dort erklärten Bezeichnungen für sie Verwendung finden. Es seien q_ν $(\nu = 1, \ldots n)$ und r_ν $(\nu = 1, \ldots n)$ zwei Systeme von jedesmal n Größen $\geqq 0$, so wird durch

$$0 \leqq t \leqq 1, \quad \alpha_\nu x + \beta_\nu y + \gamma_\nu z - (1-t) q_\nu - t r_\nu \leqq 0, \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

ein convexer Bereich in der Mannigfaltigkeit der vier Variabeln x, y, z, t definirt. Liegt dieser Bereich ganz in einer dreidimensionalen Ebene, so sind alle Größen $J((1-t)q_\nu + t r_\nu)$ für $0 \leqq t \leqq 1$ gleich Null. Anderenfalls haben wir, wenn wir den in Rede stehenden Satz auf die Schnitte dieses Bereichs mit den drei Ebenen anwenden, die durch $t = 0$, durch $t = 1$ und durch einen beliebigen Werth $t > 0$ und < 1 bestimmt sind, für letzteren Werth t die Ungleichung zu verzeichnen:

$$\sqrt[3]{J((1-t)q_\nu + t r_\nu)} \geqq (1-t)\sqrt[3]{J(q_\nu)} + t\sqrt[3]{J(r_\nu)}; \tag{14}$$

des Weiteren tritt, wenn wir noch die q_ν für $\mathfrak{P}(q_\nu)$ und die r_ν für $\mathfrak{P}(r_\nu)$ als tangentiale Parameter voraussetzen, in dieser Ungleichung insbesondere das Gleichheitszeichen dann und nur dann ein, wenn alle q_ν oder alle r_ν Null sind oder die Bereiche $\mathfrak{P}(q_\nu)$ und $\mathfrak{P}(r_\nu)$ aus einander durch Dilatation und Translation hervorgehen, also Beziehungen

$$q_\nu = a\alpha_\nu + b\beta_\nu + c\gamma_\nu + d r_\nu \qquad (d > 0)$$

statthaben. —

Sind $J(q_\nu)$ und $J(r_\nu)$ beide > 0 und wird $\dfrac{\sqrt[3]{J(q_\nu)}}{\sqrt[3]{J(r_\nu)}} = d$ gesetzt, so geht (14) vermöge der Substitution $\dfrac{(1-t)d}{t} = \dfrac{1-\tau}{\tau}$ bei Multiplication mit $\dfrac{\tau}{t}$ in

$$\sqrt[3]{J\left((1-\tau)\frac{q_\nu}{d} + \tau r_\nu\right)} \geqq (1-\tau)\sqrt[3]{J\left(\frac{q_\nu}{d}\right)} + \tau\sqrt[3]{J(r_\nu)} = \sqrt[3]{J(r_\nu)}$$

Digitized by Google

über. Man erkennt daraus, daß die Ungleichung (14) wesentlich auf den einfacheren Satz hinausläuft: Hat man $J(q_\nu) = J(r_\nu)$, so gilt für $0 < t < 1$ stets $J((1-t)q_\nu + tr_\nu) \geqq J(r_\nu)$.

6. Wir schreiben nun $\sqrt[n]{J((1-t)q_\nu + tr_\nu)} = j(t)$. Diese Function $j(t)$ ist im Intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ eine stetige Function von t, und aus der allgemein aufgefassten Regel (14) geht des Weiteren

$$j(t) \geqq \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} j(t_0) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} j(t_1) \tag{15}$$

für $0 \leqq t_0 < t < t_1 \leqq 1$ hervor. Diese Ungleichung lehrt, daß, wenn wir t, u als Parallelcoordinaten eines Punktes in einer zweidimensionalen Ebene $\mathfrak{E}$ deuten, durch $0 \leqq t \leqq 1$, $u = j(t)$, kurz ausgedrückt, ein nach der Seite der wachsenden u hin convexer Zug in dieser Ebene geliefert wird; derselbe kann auch geradlinige Strecken aufweisen oder selbst eine einzige Strecke sein.

Nun wollen wir speciell annehmen, daß die q_ν und die r_ν und somit auch alle Systeme $(1-t)q_\nu + tr_\nu$ für $0 \leqq t \leqq 1$ tangentiale Parameter sind und weder alle q_ν noch alle r_ν Null sind, noch auch $\mathfrak{P}(q_\nu)$ und $\mathfrak{P}(r_\nu)$ aus einander durch Dilatation und Translation hervorgehen. Dann gilt nach den Ausführungen in 5. in der Ungleichung (15) stets das Zeichen $>$ und enthält daher der ebengenannte convexe Zug keine geradlinige Strecke. Es sei J das Volumen, F_ν der Flächeninhalt der ν^{ten} Seitenfläche von $\mathfrak{P}((1-t)q_\nu + tr_\nu)$ und t dabei irgend ein Werth > 0 und < 1; aus der Gleichung (1) entnimmt man dann leicht, daß durch

$$(1-\bar{t})(F_1 q_1 + \cdots + F_n q_n) + \bar{t}(F_1 r_1 + \cdots + F_n r_n) = 3J^{\frac{2}{3}} \bar{u},$$

$\bar{t}, \bar{u}$ als Coordinaten eines variabeln Punktes in $\mathfrak{E}$ gedacht, die einzige vorhandene Tangente an diesen convexen Zug im Punkte $t, u = j(t)$ dargestellt wird. Der Schnittpunkt dieser Tangente mit der Geraden $\bar{t} = 1$ hat die Ordinate

$$\bar{u} = \frac{F_1 r_1 + \cdots + F_n r_n}{3J^{\frac{2}{3}}};$$

nach der Natur eines nach der Seite der wachsenden u hin convexen Zuges ohne geradlinige Strecken wird daher der Ausdruck

$$\frac{F_1 r_1 + \cdots + F_n r_n}{3J^{\frac{2}{3}}}, \tag{16}$$

(in welchem $r_1, \ldots r_n$ fest und $J, F_1, \ldots F_n$ mit t variabel sind),

Digitized by Google

eine mit wachsendem t von $t = 0$ bis $t = 1$ beständig abnehmende Function von t sein. Insbesondere also wird dieser Ausdruck für $t = 0$ stets größer als für $t = 1$, d. h. $> J^{\frac{1}{3}}$ sein.

§ 3. Die einer Kugel umbeschriebenen Polyeder.

7. Nehmen wir speciell alle Größen $r_\nu = 1$, also für $\mathfrak{P}(r_\nu)$ das Polyeder Π aus 3., so geht der Ausdruck (16) in

$$\frac{O}{3J^{\frac{2}{3}}}$$

über, wo J das Volumen, $O = F_1 + \cdots + F_n$ die Gesammtoberfläche von $\mathfrak{P}((1-t)q_\nu + t)$ darstellt. Für das Polyeder Π ist zufolge (2): $3J = O$, also, wenn das Volumen von Π wie in der Zeile vorher mit $\frac{1}{\varrho^3}$ bezeichnet wird, $\frac{O}{3J^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\varrho}$.

Mit Bezug auf die Fälle, in welchen $\frac{O^3}{J^2}$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint, sei Folgendes bemerkt. Hat ein Bereich $\mathfrak{P}(p_\nu)$ ein Volumen $J > 0$ und sind die p_ν tangentiale Parameter, so gilt nach (7) und (6) für ihn stets $p_\nu < \frac{12}{\pi} J^{\frac{1}{3}} \left(\frac{O^3}{J^2}\right)^{\frac{2}{3}}$. Läßt man nun die p_ν als tangentiale Parameter sich stetig verändern und nach Grenzwerthen convergiren, die nicht sämmtlich Null sind, während J dabei nach Null convergire, so wird daher das Verhältniß $\frac{O^3}{J^2}$ dabei stets über jede Grenze hinaus wachsen, selbst wenn auch O zugleich nach Null convergirt.

Die hier erlangten Resultate sprechen wir folgendermaßen aus:

Lehrsatz I. Es seien $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ für $\nu = 1, \ldots n$ irgend n verschiedene Richtungen so, daß darunter drei unabhängige sind und die Gleichungen

$$\sum H_\nu \alpha_\nu = 0, \quad \sum H_\nu \beta_\nu = 0, \quad \sum H_\nu \gamma_\nu = 0$$

eine Auflösung in n positiven Größen H_ν zulassen. Dann und nur dann existiren Polyeder $\mathfrak{P}$ mit n oder weniger Seitenflächen, bei welchen die Richtungen der äußeren Normalen der Flächen zu jenen n Richtungen gehören. Unter diesen Polyedern giebt es

Digitized by Google

solche mit n Flächen, die Kugeln umbeschrieben sind; es sind dies diejenigen, welche dem Polyeder $\alpha_\nu x+\beta_\nu y+\gamma_\nu z \leqq 1$ $(\nu = 1, \ldots n)$ ähnlich und ähnlich gelegen sind. Unter allen Polyedern $\mathfrak{P}$ haben diese letzteren das Minimum von $\frac{O^3}{J^2}$, des Verhältnisses der dritten Potenz der Oberfläche zum Quadrat des Volumens.

Ist ferner $\mathfrak{P}_0$ ein beliebiges unter den Polyedern $\mathfrak{P}$, das nicht zu den eben erwähnten speciellen Polyedern gehört, und construirt man zu den n Stützebenen von $\mathfrak{P}_0$ mit den Richtungen $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ als äußeren Normalen Parallelebenen in einem Abstande l nach dem Aeußeren des Polyeders hin, so begrenzen diese ein gewisses Polyeder $\mathfrak{P}_l$; dann ist für diese Polyeder $\mathfrak{P}_l$ die Function $\frac{O^3}{J^2}$ eine mit wachsendem l beständig abnehmende, und sie convergirt für $l = \infty$ nach jenem Minimumwerthe von $\frac{O^3}{J^2}$.

Dilatirt man vom Nullpunkte aus ein jedes Polyeder $\mathfrak{P}_l$ zu einem Polyeder $\overline{\mathfrak{P}}_l$ mit einer Oberfläche $= \frac{3}{\varrho^3}$, so ist für diese Polyeder $\overline{\mathfrak{P}}_l$ das Volumen eine mit l beständig wachsende Größe, und es deckt sich $\overline{\mathfrak{P}}_\infty$ mit Π.

Der erste Theil des Lehrsatzes I ist bereits von Herrn L. Lindelöf[1]) durch interessante, ganz andersartige Betrachtungen bewiesen worden. Hier hat sich nicht allein die betreffende Maximumeigenschaft des Polyeders Π herausgestellt, es hat sich zugleich für jedes Polyeder $\mathfrak{P}$, das nicht Π ähnlich und ähnlich gelegen ist, ein ganz bestimmter einfacher Uebergang zu einem Polyeder dieser Art ergeben, wobei das Verhältniß $\frac{O^3}{J^2}$ beständig abnimmt und nach seinem Minimumwerthe convergirt.

Wenn man in derselben Weise, wie wir soeben die Ungleichung (14) und die Bemerkungen über das Eintreten des Gleichheitszeichens in ihr behandelt haben, von den entsprechenden Sätzen über beliebige convexe Körper Gebrauch macht, so kommt man zu den Sätzen:

1) Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume, Math. Ann. Bd. 2, S. 150. — Mémoire couronné par l'Académie Royale des Sciences de Berlin du prix Steiner en 1880.

Digitized by Google

Unter allen convexen Körpern besitzen die Kugeln das Minimum von $\frac{O^3}{J^2}$. Ist $\mathfrak{K}_0$ ein convexer Körper, der keine Kugel vorstellt, und construirt man zu jeder Stützebene von $\mathfrak{K}_0$ eine parallele Ebene im Abstande l auf der dem Körper abgewandten Seite der Ebene, so begrenzen diese sämmtlichen Parallelebenen jedesmal wieder einen convexen Körper $\mathfrak{K}_l$; dann ist für diese Körper $\mathfrak{K}_l$ die Function $\frac{O^3}{J^2}$ eine mit wachsendem l beständig abnehmende, und sie convergirt für $l = \infty$ nach ihrem Werthe für Kugeln. Während für eine Kugel $O^3 = 36\pi J^2$ gilt, besteht danach für jeden convexen Körper, der keine Kugel ist, die bekannte Ungleichung $O^3 > 36\pi J^2$.

Die Begrenzung von $\mathfrak{K}_l$ wird von der äusseren Parallelfläche im Abstande l zur Begrenzung von $\mathfrak{K}_0$ gebildet, und an diese Bemerkung knüpft sich leicht eine Ausdehnung der letzten Sätze auch auf nicht convexe Körper, wie ich bei einer anderen Gelegenheit auseinandersetzen will.

§ 4. Bestimmung eines convexen Polyeders unter Verwendung der Größen der Seitenflächen.

8. Es mögen alle Bezeichnungen wie in 5. Geltung haben, und man setze allgemein $\sqrt[3]{J(r_\nu)} = \psi(r_\nu)$; die Ungleichung (14) geht dann in

$$\psi((1-t)q_\nu + tr_\nu) \geqq (1-t)\psi(q_\nu) + t\psi(r_\nu) \tag{17}$$

über. Es sei nun $\mathfrak{W}$ in der Mannigfaltigkeit der $n+1$ Variabeln $r_1, \ldots r_n, w$ der durch

$$r_1 \geqq 0, \ldots r_n \geqq 0, \quad 0 \leqq w \leqq \psi(r_\nu)$$

definirte Bereich. Aus (17) ist zu ersehen, daß mit irgend zwei Punkten, die diesem Bereiche $\mathfrak{W}$ angehören, stets jeder Punkt der sie verbindenden Strecke zu ihm gehört. Da überdies wegen der Stetigkeit von $\psi(r_\nu)$ als Function der r_ν dieser Bereich in jener Mannigfaltigkeit eine abgeschlossene Punktmenge ist, so stellt er einen convexen Körper in derselben vor, freilich einen solchen, der sich auch in's Unendliche erstreckt. Wegen der Beziehung $\psi(tr_\nu) = t\psi(r_\nu)$ $(t \geqq 0)$ ist $\mathfrak{W}$ ein Kegel mit der Spitze im Nullpunkte $r_1 = 0, \ldots r_n = 0$.

Digitized by Google

Es sei weiter $\mathfrak{B}$ die Menge der durch

$$r_1 \geqq 0, \ldots r_n \geqq 0, \quad w = \psi(r_\nu)$$

definirten Punkte. Die Begrenzung von $\mathfrak{W}$ wird von den Punkten aus $\mathfrak{W}$, für welche $w = 0$ ist, und zudem von der Menge $\mathfrak{B}$ gebildet. Nach der Natur eines convexen Körpers giebt es daher durch jeden Punkt von $\mathfrak{B}$ mindestens eine (n-dimensionale) Stützebene an $\mathfrak{W}$, also eine Ebene, die $\mathfrak{W}$ ganz auf einer Seite liegen hat, abgesehen von den Punkten aus $\mathfrak{W}$, die sie selbst enthält.

Sind $p_1, \ldots p_n$ lauter Werthe > 0, und ist J das Volumen, F_ν der Flächeninhalt der ν^{ten} Seitenfläche von $\mathfrak{P}(p_\nu)$, so besitzt, wie man leicht aus der Gleichung (1) erkennt, die Menge $\mathfrak{B}$ im Punkte $r_1 = p_1, \ldots r_n = p_n$, $w = \psi(p_\nu)$ die durch die Gleichung

$$3J^{\frac{2}{3}} w = F_1 r_1 + \cdots + F_n r_n$$

dargestellte Ebene als Tangentialebene. Diese Ebene ist somit die einzige Ebene durch den Punkt, welche überhaupt Stützebene an $\mathfrak{W}$ sein könnte, und demnach gilt dann für jeden beliebigen Punkt $r_1, \ldots r_n, w$ in $\mathfrak{W}$ stets

$$3J^{\frac{2}{3}} w \leqq F_1 r_1 + \cdots + F_n r_n. \tag{18}$$

9. Wir können nunmehr den folgenden Lehrsatz beweisen:

Lehrsatz II. Es seien $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ für $\nu = 1, \ldots n$ irgend n Richtungen, unter denen sich drei unabhängige finden, und F_ν für $\nu = 1, \ldots n$ irgend n gegebene positive Größen so, daß

$$\sum F_\nu \alpha_\nu = 0, \quad \sum F_\nu \beta_\nu = 0, \quad \sum F_\nu \gamma_\nu = 0$$

ist, endlich sei o irgend ein gegebener Punkt; dann existirt stets ein und nur ein convexes Polyeder mit o als Schwerpunkt und mit n Seitenflächen, wobei je eine Seitenfläche die Richtung $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ als äußere Normale und F_ν als Flächeninhalt hat.

Beweis. Wir setzen der Einfachheit halber o als den Nullpunkt der Coordinaten voraus. Wir machen in Bezug auf die gegebenen n Richtungen $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ von den in 3. und 8. eingeführten Bezeichnungen Gebrauch und bilden dazu gemäß 8. die Punktmengen $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{B}$ in einer $n+1$ fachen Mannigfaltigkeit.

Zunächst wollen wir annehmen, daß ein Bereich $\mathfrak{P}(p_\nu)$ je mit F_ν als Größe der ν^{ten} Seitenfläche und mit o als Schwerpunkt bereits bekannt ist, und wir beweisen, daß es nicht noch einen anderen Bereich derselben Art geben kann. Da alle $F_\nu > 0$ sein sollen,

Digitized by Google

stellen die p_ν gewiß tangentiale Parameter vor; da sie jedenfalls nicht alle Null sind, folgt aus (2): $J(p_\nu) > 0$, und da nunmehr der Schwerpunkt gewiß ein innerer Punkt in $\mathfrak{P}(p_\nu)$ ist, fallen die Größen p_ν sämmtlich > 0 aus. Nach (18) gilt für ein jedes System $r_1 \geqq 0, \ldots r_n \geqq 0$, da alsdann $r_1, \ldots r_n$, $w = \psi(r_\nu)$ ein Punkt in $\mathfrak{W}$ ist, stets

$$3(\psi(p_\nu))^3 \psi(r_\nu) \leqq F_1 r_1 + \cdots + F_n r_n.$$

Jetzt sei $\mathfrak{P}(q_\nu)$ gleichfalls ein Bereich mit o als Schwerpunkt und F_ν als Größe der ν^{ten} Seitenfläche, so ist $F_1 q_1 + \cdots + F_n q_n = 3(\psi(q_\nu))^3$ und folgt daher mit Rücksicht auf die vorstehende Ungleichung $\psi(p_\nu) \leqq \psi(q_\nu)$. Genau so würde $\psi(q_\nu) \leqq \psi(p_\nu)$ hervorgehen und also müßte zunächt $\psi(p_\nu) = \psi(q_\nu)$ sein. Dann würde also der Punkt $r_1 = q_1, \ldots r_n = q_n$, $w = \psi(q_\nu)$ in der Stützebene

$$3(\psi(p_\nu))^3 w = F_1 r_1 + \cdots + F_n r_n$$

durch den Punkt $r_1 = p_1, \ldots r_n = p_n$, $w = \psi(p_\nu)$ an $\mathfrak{W}$ liegen. Mit diesen zwei Punkten in einer Stützebene müßte die ganze sie verbindende Strecke zur Begrenzung von $\mathfrak{W}$, also zu $\mathfrak{B}$, gehören; es würde demnach in der Ungleichung

$$\psi((1-t)p_\nu + tq_\nu) \geqq (1-t)\psi(p_\nu) + t\psi(q_\nu) \quad \text{für } 0 < t < 1$$

stets das Gleichheitszeichen gelten. Dies hätte nach den Bemerkungen bei (14) zur Folge, daß das System q_ν von der Form

$$q_\nu = a\alpha_\nu + b\beta_\nu + c\gamma_\nu + dp_\nu$$

mit einem Coefficienten $d > 0$ wäre. Dabei wäre nun d das Verhältniß $\sqrt[3]{J(q_\nu)} : \sqrt[3]{J(r_\nu)}$, also $= 1$, und da auch die Schwerpunkte von $\mathfrak{P}(p_\nu)$ und $\mathfrak{P}(q_\nu)$ übereinstimmen sollen, so hätte man weiter $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; also wäre $\mathfrak{P}(q_\nu)$ nicht von $\mathfrak{P}(p_\nu)$ verschieden.

Ich will jetzt den Schnitt von $\mathfrak{W}$ durch die Ebene $w = 1$ mit $\mathfrak{W}'$ bezeichnen. Ferner bedeute $\frac{1}{\varrho^3}$ das Volumen des speciellen Polyeders $\mathfrak{P}(r_\nu = 1)$; der Punkt $r_1 = \varrho, \ldots r_n = \varrho$, $w = 1$ liegt dann in $\mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{B}$. Es mögen nun irgend welche positive Werthe F_ν von der im Lehrsatze angegebenen Beschaffenheit vorausgesetzt werden; es sei F das Minimum unter diesen Werthen. Für jeden Punkt $r_1 = r_1', \ldots r_n = r_n'$, $w = 1$ in $\mathfrak{W}'$ gilt dann, wenn r' das Maximum unter den Werthen r_ν' bedeutet, mit Rücksicht auf (12):

$$(19) \qquad F_1 r_1' + \cdots + F_n r_n' \geqq Fr' \geqq F\varrho \sqrt[3]{J(r_\nu')} \geqq F\varrho.$$

Für den Punkt $r_1' = \varrho, \ldots r_n' = \varrho$, $w = 1$ in $\mathfrak{W}'$ wird $F_1 r_1' + \cdots + F_n r' = (\sum F_\nu)\varrho$.

Digitized by Google

Nun wird durch die Bedingung $F_1 r_1' + \cdots + F_n r_n' \leqq (\sum F_\nu)\varrho$ aus $\mathfrak{W}'$ ein bestimmter convexer Bereich ausgesondert, in dem für alle Coordinaten r_ν' obere Grenzen bestehen. In diesem endlichen Bereich wird der Ausdruck $F_1 r_1' + \cdots + F_n r_n'$ ein bestimmtes Minimum besitzen, das zufolge (19) jedenfalls > 0 ausfallen wird und welches $3l^2$ heißen möge. Es sei $r_1 = p_1', \ldots r_n = p_n'$, $w = 1$ ein Punkt aus $\mathfrak{W}'$, in dem dieses Minimum eintritt. Dieses Minimum ist zugleich das Minimum von $F_1 r_1' + \cdots + F_n r_n'$ im ganzen Bereiche $\mathfrak{W}'$, und also gilt in $\mathfrak{W}'$ stets $F_1 r_1' + \cdots + F_n r_n' \geqq 3l^2$ und somit im Bereiche $\mathfrak{W}$, der ein Kegel mit der Spitze im Nullpunkte ist, stets $F_1 r_1 + \cdots + F_n r_n \geqq 3l^2 w$. Die Ebene

$$F_1 r_1 + \cdots + F_n r_n = 3l^2 w \tag{20}$$

ist nunmehr eine Stützebene durch den Punkt $r_1 = p_1', \ldots r_n = p_n'$, $w = 1$ an $\mathfrak{W}$, dieser Punkt somit jedenfalls ein Punkt aus $\mathfrak{B}$, mithin das Volumen von $\mathfrak{P}(p_\nu')$ gleich 1. Es seien a, b, c die Coordinaten des Schwerpunkts von $\mathfrak{P}(p_\nu')$ und allgemein

$$q_\nu' = p_\nu' - a\alpha_\nu - b\beta_\nu - c\gamma_\nu,$$

so sind wegen $J(p_\nu') = 1$ alle Größen $q_\nu' > 0$; es entsteht nun $\mathfrak{P}(q_\nu')$ durch Translation aus $\mathfrak{P}(p_\nu')$ und hat den Nullpunkt $\mathfrak{o}$ als Schwerpunkt. Wegen der für die Größen F_ν vorausgesetzten drei linearen Gleichungen liegt auch der Punkt $r_1 = q_1', \ldots r_n = q_n'$, $w = 1$ in der Ebene (20). Da durch diesen Punkt nur eine Stützebene an $\mathfrak{W}$ geht, so leuchtet ein, daß für das Polyeder $\mathfrak{P}(q_\nu')$ der Inhalt der ν^{ten} Seitenfläche $= \frac{F_\nu}{l^2}$ ausfällt. Das Polyeder $\mathfrak{P}(lq_\nu')$ ist dann ein solches mit F_ν als Größe der ν^{ten} Seitenfläche und $\mathfrak{o}$ als Schwerpunkt, trägt mithin genau den im Lehrsatze geforderten Charakter.

10. Es seien die n Richtungen $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ wieder so beschaffen, daß der Bereich $\alpha_\nu x + \beta_\nu y + \gamma_\nu z \leqq 1$ sich nicht in's Unendliche erstreckt, und es seien F_ν $(\nu = 1, \ldots n)$ irgend n Größen $\geqq 0$, so daß $\sum F_\nu \alpha_\nu = 0$, $\sum F_\nu \beta_\nu = 0$, $\sum F_\nu \gamma_\nu = 0$ ist. Es sollen diese Größen nicht sämmtlich Null sein, sodaß $F_1 + \cdots + F_n = O > 0$ ist; sie brauchen aber jetzt nicht sämmtlich > 0 zu sein.

Wir betrachten diejenigen Richtungen $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$, zu denen ein $F_\nu > 0$ gegeben ist. Haben wir erstens den Fall, daß unter diesen Richtungen schon drei unabhängige vorkommen, so giebt es nach dem Lehrsatze II unter den Bereichen $\mathfrak{P}(r_\nu)$ zu den gegebenen n Richtungen ein und nur ein Polyeder $\mathfrak{P}(p_\nu)$ je mit F_ν als Größe der ν^{ten} Seitenfläche für $\nu = 1, \ldots n$ und noch mit

Digitized by Google

beliebigem Schwerpunkte; wir wollen dann unter $J(F_\nu)$ das Volumen dieses Polyeders verstehen. Zweitens mögen dagegen alle jene Richtungen $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$, für welche ein $F_\nu > 0$ gegeben ist, einer einzigen Ebene E angehören. Nähern wir uns dann dem gegebenen Systeme F_ν irgendwie vermittelst solcher Systeme $F_\nu^{(0)}$, die dem zuerst genannten Falle entsprechen, und construiren für diese jedesmal das zugehörige Polyeder $\mathfrak{P}(p_\nu^{(0)})$ wie soeben, so convergirt für diese Polyeder $\mathfrak{P}(p_\nu^{(0)})$ die senkrechte Projection ihrer Oberfläche auf die Ebene E schließlich nach Null; es wird damit für diese Polyeder auch die kleinste unter ihren Breiten d (s. 2) in den Richtungen dieser Ebene und zufolge der Formel (4): $\frac{1}{2}Od > J$ also auch $J(F_\nu^{(0)})$ stets nach Null convergiren. In diesem zweiten Falle setzen wir demgemäß $J(F_\nu) = 0$. Endlich werde, wenn alle Größen $F_\nu = 0$ sind, ebenfalls $J(F_\nu) = 0$ gesetzt.

Auf solche Weise ist nun für jedes System F_ν in dem durch

$$(21) \qquad F_\nu \geqq 0, \quad \sum F_\nu \alpha_\nu = 0, \quad \sum F_\nu \beta_\nu = 0, \quad \sum F_\nu \gamma_\nu = 0$$

definirten Bereiche der Werth $J(F_\nu)$ eindeutig festgelegt und stellt dieser Werth, wie aus dem Lehrsatze II und den eben gemachten Bemerkungen leicht ersichtlich ist, eine stetige Function der F_ν in diesem ganzen Bereiche vor.

Wir setzen nun $(J(F_\nu))^{\frac{1}{3}} = \Psi(F_\nu)$. Dann gilt, wenn G_ν und H_ν $(\nu = 1, \ldots n)$ irgend zwei Systeme in dem Bereiche (21) sind und noch $\Psi(H_\nu) > 0$ ist, für jeden Werth $t > 0$ und < 1 stets

$$\Psi((1-t)G_\nu + tH_\nu) \geqq (1-t)\Psi(G_\nu) + t\Psi(H_\nu),$$

und zwar tritt das Zeichen $=$ hier nur dann ein, wenn $G_1 : \ldots : G_n = H_1 : \ldots : H_n$ ist.

Daß in dem zuletzt bezeichneten Falle diese Ungleichung und zwar mit dem Zeichen $=$ erfüllt ist, leuchtet ohne Weiteres ein. Nehmen wir nun an, es sei nicht $G_1 : \ldots : G_n = H_1 : \ldots : H_n$. Nach (18) gilt für jedes System von Größen $r_\nu \geqq 0$ stets

$$(22) \qquad G_1 r_1 + \cdots + G_n r_n \geqq 3\Psi(G_\nu)\psi(r_\nu),$$

$$(23) \qquad H_1 r_1 + \cdots + H_n r_n \geqq 3\Psi(H_\nu)\psi(r_\nu).$$

Wegen $\Psi(H_\nu) > 0$ und $t > 0$ giebt es ein bestimmtes Polyeder $\mathfrak{P}(p_\nu)$ mit $(1-t)G_\nu + tH_\nu$ als Größe der ν^{ten} Seitenfläche und dem Nullpunkt als Schwerpunkt. Für dieses Polyeder hat man dann

$$((1-t)G_1 + tH_1)p_1 + \cdots + ((1-t)G_n + tH_n)p_n = 3\Psi((1-t)G_\nu + tH_\nu)\psi(p_\nu).$$

Es sind dabei die p_ν sämmtlich > 0 und geht daher durch den Punkt $r_1 = p_1 \ldots r_n = p_n$, $w = \psi(p_\nu)$ nur eine Stützebene an $\mathfrak{W}$;

Digitized by Google

nun gelten die Ungleichungen (22), (23) auch für $r_1 = p_1, \ldots r_n = p_n$; aus dem eben angeführten Grunde und weil nicht

$$(1-t)G_1 + tH_1 : \ldots : (1-t)G_n + tH_n = H_1 : \ldots : H_n$$

ist, hat dabei in der zweiten jedenfalls das Zeichen $>$ statt. Man erhält somit aus ihnen

$$((1-t)G_1 + tH_1)p_1 + \cdots + ((1-t)G_n + tH_n)p_n > 3((1-t)\Psi(G_\nu) + t\Psi(H_\nu))\psi(p_\nu);$$

der Vergleich dieser Relation mit der davor angegebenen liefert unmittelbar die zu beweisende Ungleichung.

Es sei jetzt O eine beliebige positive Größe. Unter allen Polyedern $\mathfrak{P}(r_\nu)$ mit einer Gesammtoberfläche $= O$ giebt es, wie schon in 7. ausgeführt wurde, ein, bis auf Translationen völlig bestimmtes Polyeder wirklich mit n Seitenflächen, welches einer Kugel umbeschrieben ist. Es sei Φ_ν die Größe der ν^{ten} Seitenfläche bei diesem Polyeder. Ist dann $F_\nu (\nu = 1, \ldots n)$ irgend ein, von dem Systeme der Φ_ν $(\nu = 1, \ldots n)$ verschiedenes System von Größen $\geqq 0$ im Bereiche (21) und gleichfalls mit der Summe $F_1 + \cdots + F_n = 0$, so gilt nach dem Lehrsatze I stets $\Psi(F_\nu) < \Psi(\Phi_\nu)$. Betrachtet man nun t, u als Parallelcoordinaten in einer Ebene und faßt die Punkte $0 \leqq t \leqq 1$, $u = \Psi((1-t)F_\nu + t\Phi_\nu)$ in's Auge, so bilden diese Punkte nach den vorhin gewonnenen Ungleichungen daselbst einen nach der Seite der wachsenden u hin convexen Zug, und nach der eben gemachten Bemerkung hat dabei u für $t = 1$ seinen größten Werth. Nach der Natur eines solchen Zuges muß nun, wenn auf demselben u zugleich mit t am größten ist, auf seiner ganzen Ausdehnung u mit abnehmendem t beständig abnehmen. Danach stellt $J((1-t)F_\nu + t\Phi_\nu)$ im Intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ eine mit wachsendem t beständig wachsende Function vor. Damit ist ein sehr bemerkenswerther neuer Proceß gefunden, um von einem beliebigen der Polyeder $\mathfrak{P}(r_\nu)$, welches nicht einer Kugel und zwar mit n Berührungen umbeschrieben ist, zu einem Polyeder $\mathfrak{P}(r_\nu)$ dieser besonderen Art überzugehen so, daß die Oberfläche sich nicht ändert und das Volumen beständig wächst.

§ 5. Convexe Körper mit Mittelpunkt.

11. Es sei jetzt n eine gerade Zahl $= 2m$ und die $2m$ Richtungen $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots 2m)$ sollen aus m Paaren entgegengesetzter Richtungen bestehen. Sowie sich unter diesen $2m$ Richtungen drei unabhängige finden, was wir jetzt voraussetzen wollen,

Digitized by Google

zeigt sich bereits, daß der Bereich $\alpha_\nu x+\beta_\nu y+\gamma_\nu z-1\leqq 0$ $(\nu=1,\dots n)$ ganz im Endlichen liegt; denn es begrenzen alsdann die sechs Ebenen $\alpha_\nu x+\beta_\nu y+\gamma_\nu z=1$ zu diesen drei Richtungen und den drei ihnen entgegengesetzten ein Parallelepipedum, welches jenen Bereich ganz in sich schließt.

Es sei

$$\alpha_{m+\mu}=-\alpha_\mu,\ \beta_{m+\mu}=-\beta_\mu,\ \gamma_{m+\mu}=-\gamma_\mu \qquad (\mu=1,\dots m). \tag{24}$$

Wir wollen nun von den Bereichen $\mathfrak{B}(r_\nu)$ zu den $2m$ gegebenen Richtungen nur diejenigen betrachten, bei welchen $r_{m+\mu}=r_\mu$ für $\mu=1,\dots m$ ist; einen solchen Bereich bezeichnen wir durch $\mathfrak{B}\{r_\mu\}$, er ist stets ein Bereich mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, und haben wir dabei stets $F_{m+\mu}=F_\mu$ $(\mu=1,\dots m)$, unter F_ν die Größe der ν^{ten} Seitenfläche des Bereichs verstanden. Bezeichnen wir das Volumen von $\mathfrak{B}\{r_\mu\}$ mit $J\{r_\mu\}$, so folgt aus (14) sogleich

$$\sqrt[3]{J\{(1-t)q_\mu+tr_\mu\}}\geqq(1-t)\sqrt[3]{J\{q_\mu\}}+t\sqrt[3]{J\{r_\mu\}},$$

und auch die Bemerkungen über das Eintreten des Gleichheitszeichens in (14) sind sinngemäß auf diese Ungleichung zu übertragen. Setzen wir $\sqrt[3]{J\{r_\mu\}}=\psi\{r_\mu\}$, so ist danach der durch

$$r_1\geqq 0,\dots r_m\geqq 0,\quad 0\leqq w\leqq\psi\{r_\mu\}$$

definirte Bereich in der Mannigfaltigkeit der $m+1$ Variabeln $r_1,\dots r_m$, w ein convexer Körper; und durch jeden Punkt, wo $r_1>0,\dots r_m>0$, $w=\psi\{r_\mu\}$ ist, giebt es stets nur eine Stützebene an diesen Körper.

Erwägen wir nun, daß für beliebige $2m$ Größen $F_\nu\geqq 0$ $(\nu=1,\dots 2m)$, bei welchen $F_{m+\mu}=F_\mu$ $(\mu=1,\dots m)$ ist, wegen (24) die Gleichungen $\sum F_\nu\alpha_\nu=0$, $\sum F_\nu\beta_\nu=0$, $\sum F_\nu\gamma_\nu=0$ stets erfüllt sind, so gelangen wir durch ganz entsprechende Ueberlegungen wie in 9. zu dem Satze:

Lehrsatz III. Es seien $(\alpha_\mu,\beta_\mu,\gamma_\mu)$ für $\mu=1,\dots m$ irgend m verschiedene Richtungen, von denen auch keine zwei einander entgegengesetzt sind und unter denen sich drei unabhängige finden, ferner seien F_μ für $\mu=1,\dots m$ irgend m positive Größen, und o ein gegebener Punkt; dann giebt es stets ein und nur ein convexes Polyeder mit o als Mittelpunkt und mit $2m$ paarweise parallelen Seitenflächen, von denen je ein Paar als Richtungen der äußeren Normalen

Digitized by Google

$(\alpha_\mu, \beta_\mu, \gamma_\mu)$ und $(-\alpha_\mu, -\beta_\mu, -\gamma_\mu)$ und als Größe der Seitenfläche F_μ haben.

Wir ziehen hieraus und aus Lehrsatz II sogleich die weitere Folgerung:

Lehrsatz IV. Ein convexes Polyeder mit einer geraden Anzahl von Seitenflächen, wobei diese paarweise parallel und von gleichem Flächeninhalt sind, ist stets ein Polyeder mit Mittelpunkt.

Denn es sei $n = 2m$ die Anzahl der Seitenflächen des Polyeders, $(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ für $\nu = 1, \ldots n$ die Richtung der äußeren Normalen, F_ν die Größe seiner ν^{ten} Seitenfläche, und man habe $\alpha_{m+\mu} = -\alpha_\mu$, $\beta_{m+\mu} = -\beta_\mu$, $\gamma_{m+\mu} = -\gamma_\mu$, $F_{m+\mu} = F_\mu$ $(\mu = 1, \ldots m)$, endlich sei o der Schwerpunkt des Polyeders. Nach dem Lehrsatze II kann es überhaupt nur ein convexes Polyeder, also nur das vorgelegte geben, bei welchem alle die eben erwähnten Stücke in der betreffenden Weise eintreten; andererseits ist nach Lehrsatz III zu diesen Stücken speciell ein convexes Polyeder mit o als Mittelpunkt vorhanden; mithin ist das vorgelegte Polyeder nothwendig ein Polyeder mit Mittelpunkt.

12. Wir können weiter den Satz aufstellen:

Lehrsatz V. Wenn irgend welche (nicht nothwendig convexe) Polyeder in endlicher Anzahl, von denen jedes einen Mittelpunkt hat und die unter einander nur in Punkten der Begrenzungen zusammenstoßen, durch ihre Vereinigung ein convexes Polyeder erfüllen, so hat dieses zusammengesetzte convexe Polyeder stets ebenfalls einen Mittelpunkt.

Denn betrachten wir irgend eine Seitenfläche $\mathfrak{F}$ dieses so zusammengesetzten convexen Polyeders $\mathfrak{P}$. Es sei (α, β, γ) die Richtung der äußeren Normale von $\mathfrak{F}$. Unter den Einzelpolyedern, deren Vereinigung $\mathfrak{P}$ vorstellt, finden sich dann nothwendig ebenfalls solche, welche sei es eine, sei es mehrere Seitenflächen mit (α, β, γ) als Richtung der äußeren Normalen darbieten. Bei jedem hier in Betracht kommenden Einzelpolyeder treten, da das Polyeder jedesmal einen Mittelpunkt besitzt, symmetrisch in Bezug auf diesen, zu den Seitenflächen mit der äußeren Normalenrichtung (α, β, γ) ebensoviele Seitenflächen mit der äußeren Normalenrichtung $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ auf; und irgend zwei einander auf diese Weise entsprechende Seitenflächen haben stets gleichen Flächeninhalt. Bilden wir den gesammten Flächeninhalt aller bei den Einzelpolyedern auftretenden Seitenflächen mit der äußeren Normalen-

Digitized by Google

richtung (α, β, γ) und subtrahiren davon den gesammten Flächeninhalt aller bei ihnen auftretenden Seitenflächen mit der äußeren Normalenrichtung $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$, so muß daher die Differenz $= 0$ sein. Nun wird, soweit diese verschiedenen Seitenflächen im Inneren von $\mathfrak{P}$ liegen, hier die Gesammtheit der Seitenflächen der ersteren Stellung genau überdeckt von der Gesammtheit der Seitenflächen der anderen Stellung; also verschwindet für sich der Theil jener Differenz, welcher sich auf Seitenflächen bezieht, die (abgesehen vielleicht von Punkten ihres Randes) in's Innere von $\mathfrak{P}$ fallen. Weiter setzen diejenigen von den Seitenflächen der ersteren Stellung, welche auf die Begrenzung von $\mathfrak{P}$ fallen, hier eben die Seitenfläche $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{P}$ zusammen. Nunmehr leuchtet ein, daß noch Seitenflächen der anderen Stellung übrig bleiben, welche zusammen eine begrenzende Seitenfläche von $\mathfrak{P}$ mit der äußeren Normalenrichtung $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ und genau von einem Flächeninhalt gleich dem von $\mathfrak{F}$ ergeben müssen. Es sind danach die Seitenflächen des convexen Polyeders $\mathfrak{P}$ paarweise parallel und von gleichem Flächeninhalt. Nach dem Lehrsatze IV ist somit $\mathfrak{P}$ ein Polyeder mit Mittelpunkt.

§ 6. Convexe Restbereiche.

Die Gesammtheit der Punkte x, y, z, für welche sowohl x, wie y, wie z ganze rationale Zahlen sind, soll das Zahlengitter heißen; ein einzelner Punkt daraus heiße ein Gitterpunkt. Unter einem convexen Restbereich soll ein convexer Körper $\mathfrak{K}$ von solcher Art verstanden werden, daß $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_{0,0,0}$ und die Gesammtheit derjenigen Körper $\mathfrak{K}_{a,b,c}$, die aus $\mathfrak{K}_{0,0,0}$ durch die Translationen vom Nullpunkte 0, 0, 0 nach den verschiedenen anderen Gitterpunkten a, b, c hervorgehen, den ganzen Raum lückenlos überdecken, und zwar so, daß irgend zwei von diesen Körpern höchstens in Punkten der Begrenzung zusammenstoßen.

Lehrsatz VI. Ein jeder convexe Restbereich ist ein convexes Polyeder mit Mittelpunkt und wird von nicht mehr als $2(2^3-1)$ Seitenflächen begrenzt; dabei ist weiter jede Seitenfläche ein convexes Polygon mit Mittelpunkt.

Beweis. Es sei $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_{0,0,0}$ ein convexer Restbereich; man erkennt sofort, daß $\mathfrak{K}$ nicht einen ganz im Endlichen gelegenen convexen Körper von einem Volumen > 1 enthalten kann und somit selbst ganz im Endlichen liegen muß; also wird $\mathfrak{K}$ auch nur mit einer endlichen Anzahl der anderen Körper $\mathfrak{K}_{a,b,c}$ in

Digitized by Google

Punkten der Begrenzung zusammenstoßen. Da der Körper $\mathfrak{K}$ von jedem dieser Körper $\mathfrak{K}_{a,b,c}$, mit dem er zusammentrifft, durch eine gemeinsame Stützebene geschieden werden kann, so daß die gemeinschaftlichen Punkte beider Körper in dieser Ebene und im Uebrigen der eine ganz auf der einen, der andere ganz auf der anderen Seite von ihr liegt, so leuchtet zuvörderst ein, daß $\mathfrak{K}$ jedenfalls ein von einer endlichen Anzahl von Ebenen begrenztes convexes Polyeder ist.

Wir wollen unter $\mathfrak{L}$ denjenigen Körper verstehen, der zu $\mathfrak{K}$ symmetrisch in Bezug auf den Nullpunkt liegt; dann ist $\mathfrak{L}$ ebenfalls ein convexer Restbereich, sodaß die sämmtlichen Körper $\mathfrak{L}_{a,b,c}$, die aus $\mathfrak{L}$ durch die Translationen nach den einzelnen Gitterpunkten a, b, c entstehen, den ganzen Raum erfüllen und dabei je zwei unter ihnen stets in den inneren Punkten durchweg verschieden sind. Es wird nun unter allen diesen Polyedern $\mathfrak{L}_{a,b,c}$ eine endliche Anzahl von solchen geben, welche in's Innere von $\mathfrak{K}$ eintreten; und der Körper $\mathfrak{K}$ erscheint dann genau zusammengesetzt aus den einzelnen Polyedern, welche $\mathfrak{K}$ mit diesen einzelnen Körpern $\mathfrak{L}_{a,b,c}$ gemein hat. Nun ist ein Bereich $\mathfrak{L}_{a,b,c}$ jedes mal symmetrisch zu $\mathfrak{K}$ in Bezug auf den Punkt $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; ein Polyeder, welches $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}_{a,b,c}$ gemein haben, wird danach ein Polyeder mit $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ als Mittelpunkt sein. Es erscheint also $\mathfrak{K}$ zerlegt in eine endliche Anzahl von Polyedern mit Mittelpunkt; nach dem Lehrsatze V ist daher $\mathfrak{K}$ selbst ein Polyeder mit Mittelpunkt.

Da durch eine Translation eines convexen Restbereichs offenbar stets wieder ein solcher Bereich hervorgeht, so wollen wir jetzt der Einfachheit wegen annehmen, es habe $\mathfrak{K}$ den Nullpunkt als Mittelpunkt. Betrachten wir nun irgend eine Seitenfläche $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_{0,0,0}$, so giebt es unter allen übrigen Polyedern $\mathfrak{K}_{a,b,c}$ eines oder mehrere, welche sich an diese Seitenfläche mit einem Flächenstück (nicht bloß mit Punkten einer Kante) anlegen. Ist $\mathfrak{K}_{a,b,c}$ ein derartiges Polyeder, so ist das Flächenstück aus $\mathfrak{S}$, das $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_{a,b,c}$ gemein haben, da $\mathfrak{K}_{a,b,c}$ symmetrisch zu $\mathfrak{K}$ in Bezug auf den Punkt $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ ist, ein Polygon mit $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ als Mittelpunkt. Danach erscheint das convexe Polygon $\mathfrak{S}$ zerlegt in Polygone mit Mittelpunkt, und von diesen ist noch leicht ersichtlich, daß sie unter einander nur in den Rändern zusammentreffen können. Nun gilt ein dem Satze V ganz entsprechender

Digitized by Google

Satz für zwei Dimensionen, und danach ist die Fläche $\mathfrak{S}$ nothwendig selbst ein Polygon mit Mittelpunkt.

Wie sich ferner ergeben hat, liegt auf der Fläche $\mathfrak{S}$, noch von ihrem Rande abgesehen, mindestens ein Punkt $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$, wo a, b, c ganze Zahlen sind. Dabei können a, b, c niemals sämmtlich gerade Zahlen sein, weil die Gitterpunkte im Inneren der betrachteten Polyeder liegen.

Andererseits kann kein Punkt $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$, bei dem a, b, c ganze Zahlen, aber nicht sämmtlich Null sind, in's Innere von $\mathfrak{R}$ fallen; denn sonst hätte $\mathfrak{R}$ mit dem Körper $\mathfrak{R}_{a,b,c}$ einen inneren Punkt gemein. Es sei nun $\bar{\mathfrak{S}}$ eine Seitenfläche von $\mathfrak{R}$, die von $\mathfrak{S}$ und auch von der zu $\mathfrak{S}$ parallelen Seitenfläche verschieden ist, und $\frac{\bar{a}}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, \frac{\bar{c}}{2}$ ein in dieser Seitenfläche, aber nicht auf ihrem Rande gelegener Punkt mit ganzen Zahlen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$; dann kann nicht $\bar{a} \equiv a, \bar{b} \equiv b, \bar{c} \equiv c \pmod 2$ sein, da sonst $\frac{\bar{a}+a}{4}, \frac{\bar{b}+b}{4}, \frac{\bar{c}+c}{4}$ ein Punkt der eben besprochenen Art im Inneren von $\mathfrak{R}$ wäre. Da es nun im ganzen 2^3-1 nach 2 incongruente und von 0, 0, 0 (mod 2) verschiedene Systeme $a, b, c \pmod 2$ giebt, so besteht danach die Begrenzung von $\mathfrak{R}$ aus höchstens $2(2^3-1)$ Seitenflächen.

Die Lehrsätze I—VI sind hier nur für convexe Polyeder im Raume von 3 Dimensionen ausgesprochen, sie sind mit ihren hier auseinandergesetzten Beweisen unmittelbar auf Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Veränderlichen zu übertragen.

Zürich, den 22. Juli 1897.

Digitized by Google

Digitized by Google

Ueber die Massenvertheilung im Innern der Erde.

Von

E. Wiechert.

Vorgelegt am 29. Mai 1897 von W. Voigt.

§ 1. Einleitung. Die Beobachtungsdaten über die Oberflächendichte und die mittlere Dichte der Erde, über ihre Abplattung und über Präcession und Nutation führen bekanntlich gleichmäßig zu dem Schluß, daß die Erde im Innern erheblich dichter ist als an der Oberfläche. Man findet bei den einschlägigen Rechnungen die Dichte im Mittelpunkt mehrmals größer als außen. Helmert z. B., in seinen „Physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie“ [1]) setzt in zwei näher untersuchten Fällen die Oberflächendichte $= 2{,}6$ und $= 2{,}8$ und erhält für den Mittelpunkt die Dichten 11,2 und 11,6. Hier wäre das Verhältniß etwa 1 : 4.

Die oft gemachte Annahme, bei der die Dichtevermehrung nach innen zu als Folge des zunehmenden Druckes betrachtet wird, scheint mir nach allem, was wir über den molecularen Bau der Materie wissen, äußerst bedenklich. Wir müssen in den Molecülen sehr widerstandsfähige Dinge sehen, die in den festen Körpern schon unter gewöhnlichen Druckverhältnissen wegen der wechselseitigen Kräfte so enge aneinanderliegen, daß eine erhebliche Compression durch Druck nicht mehr stattfinden kann. Es scheint mir daher richtiger, die Dichteunterschiede in der Erde durch Materialverschiedenheiten zu erklären.

Die mittlere Dichte der Erde beträgt etwa 5,6. Die Dichten der Gesteine, welche sich hauptsächlich an dem Bau der Erdrinde betheiligen, gehen wenig über 3 hinaus, liegen also erheblich unter der mittleren Dichte. Von Substanzen mit Dichten über 5,6 kom-

1) Dem zweiten Bande des Werkes: „Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie“, Leipzig 1880—84.

Digitized by Google

men nur Metalle in Betracht, deren Dichten etwa bei 7 beginnen. Aus diesen Daten ist erstens zu schließen, daß die Erde einen Metallkern enthält, und zweitens, daß an der Grenze des Kernes sehr wahrscheinlich ein jäher Sprung der Dichte stattfindet.

Stellt man sich die Aufgabe, mit möglichst einfacher Rechnung den wirklichen Verhältnissen möglichst nahe zu kommen, so erscheint hiernach die Annahme einer stetigen Aenderung der Dichte unzweckmäßig, und es empfiehlt sich weit mehr, statt dessen vorauszusetzen, die Erde bestehe aus einem Kern constanter Dichte, der von einem Mantel ebenfalls constanter Dichte umgeben ist.

Einige Folgerungen, zu welchen man bei Benutzung dieses Ausgangspunktes geführt wird, habe ich schon im Januar vorigen Jahres in einem Vortrag der Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. mitgetheilt. Ausführlicheres berichtete ich im September vorigen Jahres auf der Naturforscherversammlung in Frankfurt a./M. — Die wichtigsten Ergebnisse sind im Folgenden zusammengestellt. — Eine Inhaltsübersicht der Arbeit findet man im Schlußparagraphen.

§ 2. Allgemeines. Wir werden Reihenentwicklungen benutzen. Für viele Zwecke — z. B. für die Schlüsse des § 6 über Material und Dimensionen des Metallkerns — wäre es hinreichend, nur die Glieder von der Größenordnung der ersten Potenz der Abplattung zu berücksichtigen; die Oberflächen der ganzen Erde und des Kernes dürften dann als Ellipsoide gelten, und die Rechnungen würden sich sehr einfach gestalten. Für andere und nicht minder wichtige Probleme aber wäre die Annäherung ungenügend, weil die Schärfe der Rechnung gerade da aufhören würde, wo unser Interesse bei der Verwerthung der Beobachtungen beginnt. In den Sätzen z. B., welche die Variation der Schwere auf der Erdoberfläche, oder die Nutation mit der Erdabplattung verbinden, ergäbe sich für die Erdabplattung, die wir mit $\varepsilon = 1/\eta$ bezeichnen wollen, eine Unsicherheit von der Größenordnung $\varepsilon^2 = \frac{1}{\eta^2}$ oder $\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta+1}$, sodaß in η Rechnungsfehler von einigen Einheiten zu befürchten wären. Es handelt sich aber heutzutage gerade um die Sicherstellung von η auf eine Einheit oder womöglich auf Bruchtheile einer Einheit.

So müssen wir also in den Entwicklungen auch die zweite Potenz der Abplattung berücksichtigen. In den Reihen nach

Digitized by Google

Kugelfunctionen sind dann noch die Glieder mit der Kugelfunction 4ter Ordnung beizubehalten. —

φ sei das Potential der Schwerkraft außerhalb der Erde; wir schreiben:

$$(1) \qquad \varphi = -\varkappa\frac{\Gamma}{R}\left(1-p\frac{a^2}{R^2}P^{(2)}(\cos\vartheta)+q\frac{a^4}{R^4}P^{(4)}(\cos\vartheta)\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R^2\sin^2\vartheta.$$

Hierin sind $\varkappa$, Γ, p, q, a, T Constanten, und zwar bedeutet $\varkappa$ die Gravitationsconstante, Γ die Masse der Erde, a den äquatorialen Halbmesser, T die Umdrehungszeit. R bezeichnet den Radiusvector vom Erdmittelpunkt, ϑ den geozentrischen Polabstand. Unter $P^{(2)}$ und $P^{(4)}$ sind die Kugelfunctionen 2ter und 4ter Ordnung zu verstehen:

$$P^{(2)}(\cos\vartheta) = \tfrac{3}{2}(\cos^2\vartheta-\tfrac{1}{3}); \quad P^{(4)}(\cos\vartheta) = \tfrac{35}{8}(\cos^4\vartheta-\tfrac{6}{7}\cos^2\vartheta+\tfrac{3}{35}).$$

Bei Vernachlässigung des Gliedes mit der Kugelfunction 4ter Ordnung erscheint die Erde als Rotationsellipsoid, in unserem Falle, bei Berücksichtigung dieses Gliedes, ist es daher bequem, die Erde als ein Rotationsellipsoid aufzufassen, das gemäß einer Kugelfunction 4ter Ordnung deformirt ist. α und β seien Aequatorial- und Polaraxe des Ellipsoides, a und b die entsprechenden Axen der deformirten Oberfläche, welche uns als die normale Oberfläche, als das „Geoid" gilt. Mit $\varepsilon = 1/\eta$ und $e = 1/h$ mögen die beiden Abplattungen bezeichnet werden:

$$(2) \qquad \varepsilon = \frac{1}{\eta} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}, \quad e = \frac{1}{h} = \frac{a-b}{a}$$

und mit ϱ und r die Radienvectoren nach den beiden Oberflächen. Dann darf gesetzt werden:

$$(3) \quad \varrho = \alpha(1-\varepsilon\cos^2\vartheta-\tfrac{3}{8}\varepsilon^2\sin^2 2\vartheta), \quad r = \varrho+QP^{(4)}(\cos\vartheta),$$

wobei Q eine Constante ist. Die erstere Formel stellt das Ellipsoid in der verlangten Annäherung dar; die zweite Formel zeigt die Abweichung des Geoids von dem Ellipsoid. Bei positivem Q wäre das Geoid an den Polen und am Aequator höher als das Ellipsoid und in mittleren Breiten niedriger, bei negativem Q verhielte es sich umgekehrt. — Aus (3) folgt:

$$(4) \quad a = \alpha+\tfrac{3}{8}Q, \quad b = \beta+Q, \quad e = \varepsilon-\tfrac{5}{8}\frac{Q}{\alpha}, \quad h = \eta+\tfrac{5}{8}\frac{Q}{\alpha}\eta^2.$$

g sei die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche, g_a der

Digitized by Google

Werth am Aequator, g_p der Werth an den Polen, g_{45} der Werth unter 45° geographischer Breite. g_a^* bedeute die Beschleunigung wegen der Rotation der Erde in der Oberfläche am Aequator:

$$g_a^* = +a\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

An der Oberfläche ist:

$$\varphi = \text{const}, \quad g^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)^2.$$

Beachtet man dieses, so ergiebt sich mittels (1):

$$\varepsilon = \tfrac{3}{2}p + \tfrac{1}{2}\frac{g_a^*}{g_a} + \frac{\varepsilon^2}{2} - \tfrac{1}{7}\varepsilon\frac{g_a^*}{g_a} - \tfrac{3}{4}\left(\frac{g_a^*}{g_a}\right)^2, \tag{5}$$

$$\frac{Q}{\alpha} = q - \tfrac{4}{5}\varepsilon^2 + \tfrac{4}{7}\varepsilon\frac{g_a^*}{g_a}, \tag{6}$$

$$\frac{g_p - g_a}{g_a} = \tfrac{5}{2}\frac{g_a^*}{g_a} - \varepsilon - \tfrac{17}{14}\varepsilon\frac{g_a^*}{g_a} + \tfrac{15}{8}\frac{Q}{\alpha}. \tag{7}$$

(7) ist Clairaut's Formel in erweiterter Form.

Bezeichnet $\vartheta^{(g)}$ den geographischen Polabstand und ψ die geographische Breite, so erhalten wir weiter:

$$\vartheta - \vartheta^{(g)} = \left(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 - \tfrac{5}{8}\frac{Q}{\alpha}\right)\sin 2\vartheta - \left(\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{55}{16}\frac{Q}{\alpha}\right)\sin 4\vartheta, \tag{8}$$

$$\left\{\begin{aligned} g &= g_a + (g_p - g_a)\sin^2\psi - \left(\frac{g_p + g_a}{2} - g_{45}\right)\sin^2 2\psi \\ &= g_{45} - \frac{g_p - g_a}{2}\cos 2\psi + \left(\frac{g_p + g_a}{2} - g_{45}\right)\frac{1 + \cos 4\psi}{2}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\frac{g_p + g_a}{2} - g_{45} = \tfrac{5}{8}\varepsilon g_a^* - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 g_a + \tfrac{105}{32}\frac{Q}{\alpha}g_a. \tag{10}$$

§ 3. Specielle Annahmen über die Massenvertheilung im Erdinnern. Unserem Programm entsprechend wollen wir nun annehmen, die Erde bestehe aus einem Kern constanter Dichte und einem Mantel ebenfalls constanter Dichte. δ_m sei die mittlere Dichte der Erde, δ die Dichte des Mantels, δ' die Dichte des Kerns.

Gewöhnlich geht man von der Voraussetzung aus, die Massen in der Erde seien so vertheilt, wie es beim flüssigen Zustande der Fall wäre, d. h. man betrachtet die Flächen gleicher Dichte als Niveauflächen der Schwere. Diese „Hypothese des hydrostatischen Gleichgewichts", wie wir sie nennen wollen, verlangt, daß Kern und Mantel durch Niveauflächen der Schwere

Digitized by Google

begrenzt seien. Im Folgenden soll die Hypothese zwar in den Vordergrund gerückt werden, doch werden wir immerhin auch mit der Möglichkeit geringer Abweichungen rechnen.

Von derselben Bedeutung, wie α, $\varepsilon = 1/\eta$, Q für die Geoidfläche, seien $\bar{\alpha}$, $\bar{\varepsilon} = 1/\bar{\eta}$, $\bar{Q}$ für die Oberfläche des Mantels, ferner $\bar{\alpha}'$, $\bar{\varepsilon}' = 1/\bar{\eta}'$, $\bar{Q}'$ für die Oberfläche des Kerns und α', $\varepsilon' = 1/\eta'$, Q' für die zugehörige Niveaufläche gleichen Rauminhalts. Wir nehmen an, daß auch die beiden Flächen α, ε und $\bar{\alpha}$, $\bar{\varepsilon}$ gleichen Rauminhalt umschließen; es entspricht dies unserer Abmachung, Dichteunterschiede in dem Mantel unberücksichtigt zu lassen.

Aus den Beobachtungen wird später gefolgert werden, daß die Differenz $\bar{\eta} - \eta$ verschwindend ist, und die Differenz $\bar{\eta}' - \eta'$ höchstens einige Einheiten beträgt; schon jetzt soll daher vorausgesetzt werden, daß $\bar{\eta} - \eta$ und $\bar{\eta}' - \eta'$ von der Größenordnung 1 seien, daß also $\bar{\varepsilon} - \varepsilon$, $\bar{\varepsilon}' - \varepsilon'$, $(\bar{\alpha}/\alpha) - 1$, $(\bar{\alpha}'/\alpha') - 1$ zur Größenordnung ε^2 gehören.

Wir dürfen erwarten, daß $\bar{Q}$, $\bar{Q}'$ sich procentlich nur wenig von Q, Q' unterscheiden, und werden daher später $\bar{Q} = Q$, $\bar{Q}' = Q'$ setzen. Vorläufig soll auf diese numerische Uebereinstimmung noch nicht Rücksicht genommen werden, weil so die Bedeutung unserer Formeln klarer hervortritt. —

Nach diesen Festsetzungen ergiebt sich nun zunächst die Beziehung:

$$(11) \quad 1 = \frac{\delta}{\delta_m} + \frac{\delta' - \delta}{\delta_m} \frac{1 - \bar{\varepsilon}'}{1 - \bar{\varepsilon}} \left(\frac{\bar{\alpha}'}{\bar{\alpha}}\right)^3 = \frac{\delta}{\delta_m} + \frac{\delta' - \delta}{\delta_m} \frac{1 - \varepsilon'}{1 - \varepsilon} \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3.$$

Zur Berechnung des Potentiales der Schwere betrachten wir die Erde als Superposition eines homogenen Körpers mit der Dichte δ, der durch die Oberfläche des Mantels begrenzt wird, und eines Körpers mit der Dichte $\delta' - \delta$, der die Gestalt des Kernes hat. Weiter denken wir uns die Masse zwischen der Oberfläche jedes der beiden Körper und der des zugehörigen Ellipsoides zu einer unendlich dünnen Fläche verdichtet, und diese zu einer Kugelfläche deformirt. Die letzteren Veränderungen haben keinen merklichen Einfluß auf das Resultat der Rechnung.

Das Potential der Gravitation, welches von einem homogenen Ellipsoid α, ε, δ verursacht wird, ist mit der hier erforderlichen Genauigkeit[1]) in einem außerhalb gelegenen Punkt

$$= -\varkappa \tfrac{4}{3} \alpha^3 \pi (1 - \varepsilon) \delta \frac{1}{R} \left(1 - \tfrac{2}{5} \varepsilon \frac{\alpha^2}{R^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) P^{(2)}(\cos\vartheta) + \tfrac{1}{35} \varepsilon^2 \frac{\alpha^4}{R^4} P^{(4)}(\cos\vartheta)\right),$$

1) Vergl z. B.: Helmert, Physikalische Theorieen der höheren Geodäsie, 1884, Kap. II.

Digitized by Google

und in einem innerhalb gelegenen Punkt

$$= -\varkappa\pi\delta\,(\text{const} - \tfrac{2}{5}R^2 - (\tfrac{8}{15}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{5}\varepsilon^2)\,R^2 P^{(2)}(\cos\vartheta)).$$

Das Potential, welches von einer unendlich dünnen Schicht der für uns in Betracht kommenden Art verursacht wird, ist in einem außerhalb der Kugel gelegenen Punkt

$$= -\varkappa\tfrac{4}{3}\alpha^3\pi\tfrac{1}{3}\delta\frac{Q}{\alpha}\frac{\alpha^4}{R^5}P^{(4)}(\cos\vartheta),$$

und in einem innerhalb gelegenen Punkt

$$= -\varkappa\tfrac{4}{3}\alpha^3\pi\tfrac{1}{3}\delta\frac{Q}{\alpha}\frac{R^4}{\alpha^5}P^{(4)}(\cos\vartheta).$$

Diese Ausdrücke ergeben für die Constanten p und q in der Formel (1) für das Potential der Schwere außerhalb der Erde die Werthe:

$$(12)\quad p = \tfrac{2}{5}\bar{\varepsilon}(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\frac{\delta}{\delta_m} + \tfrac{2}{5}\bar{\varepsilon}'\frac{1-\frac{2}{3}\varepsilon'}{1-\varepsilon}\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^5,$$

$$(13)\quad q = \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{5}\varepsilon^2\frac{\delta}{\delta_m} + \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{5}\varepsilon'^2\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^7 + \tfrac{1}{3}\frac{\delta}{\delta_m}\frac{\bar{Q}}{\alpha} + \tfrac{1}{3}\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^7\frac{\bar{Q}'}{\alpha'}.$$

Für das Potential der Schwere im Innern des Kerns erhalten wir die Formel:

$$(14)\quad \begin{cases} \varphi = \text{const} + \varkappa\dfrac{\Gamma\alpha'^2}{(1-\varepsilon)\alpha^3}\left(\tfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\delta}{\delta_m} + \dfrac{\delta'-\delta}{\delta_m}\right\}\dfrac{R^2}{\alpha'^2}\right. \\ \quad + \left\{\dfrac{\delta}{\delta_m}(\tfrac{2}{5}\bar{\varepsilon} + \tfrac{9}{3\,5}\varepsilon^2) + \dfrac{\delta'-\delta}{\delta_m}(\tfrac{2}{5}\bar{\varepsilon}' + \tfrac{9}{3\,5}\varepsilon'^2)\right\}\dfrac{R^2}{\alpha'^2}P^{(2)}(\cos\vartheta) \\ \quad \left. - \left\{\tfrac{1}{3}\dfrac{\delta}{\delta_m}\left(\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\dfrac{\bar{Q}}{\alpha} + \tfrac{1}{3}\dfrac{\delta'-\delta}{\delta_m}\dfrac{\bar{Q}'}{\alpha'}\right\}\dfrac{R^4}{\alpha'^4}P^{(4)}(\cos\vartheta)\right) - \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 R^2\sin^2\vartheta. \end{cases}$$

Für die Verwerthung der Beobachtungsdaten über Präcession und Nutation kommt noch der Ausdruck $(C-A)/C$ in Betracht, wenn C und A die Trägheitsmomente der Erde in Bezug auf die polare und eine äquatoriale Axe bedeuten. Es ist:

$$C = \tfrac{2}{5}\bar{\alpha}^2\cdot\tfrac{4}{3}\pi\bar{\alpha}^3(1-\bar{\varepsilon})\delta + \tfrac{2}{5}\bar{\alpha}'^2\cdot\tfrac{4}{3}\pi\bar{\alpha}'^3(1-\bar{\varepsilon}')(\delta'-\delta),$$

$$C-A = \alpha^2\cdot\tfrac{4}{3}\pi\alpha^3(1-\varepsilon)\delta_m.p;$$

hieraus folgt:

$$(15)\quad \frac{C-A}{C} = \bar{\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\dfrac{\delta}{\delta_m} + \dfrac{\bar{\varepsilon}'}{\bar{\varepsilon}}\dfrac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon}\dfrac{\delta'-\delta}{\delta_m}\left(\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)^5\dfrac{1-\frac{\varepsilon'}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\dfrac{\delta}{\delta_m} + \dfrac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon}\dfrac{\delta'-\delta}{\delta_m}\left(\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)^5}.$$

Digitized by Google

Wir wollen jetzt die Hypothese des hydrostatischen Gleichgewichtes verwerthen.

Besteht das hydrostatische Gleichgewicht für die Oberfläche des Mantels, so ist die Geoidfläche zugleich als Oberfläche des Mantels anzusehen; es wird dann $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$, $\bar{Q} = Q$, und es ergeben (5) und (12), sowie (6) und (13):

$$(16)\quad \varepsilon\left(1-\tfrac{3}{5}\frac{\delta}{\delta_m}\right)\left(1-\tfrac{3}{14}\varepsilon\right)-\tfrac{3}{5}\bar{\varepsilon}'\frac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon}\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^5\left(1+\tfrac{3}{7}\varepsilon-\tfrac{1}{2}\varepsilon'\right)=\frac{g_a^*}{2g_a+3g_a^*},$$

$$(17)\quad \tfrac{1}{35}\varepsilon^2\left(1-\frac{\delta}{\delta_m}-2\frac{\bar{\varepsilon}'}{\varepsilon}\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^5+\left(\frac{\bar{\varepsilon}'}{\varepsilon}\right)^2\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^7\right)=\frac{Q}{\alpha}-\tfrac{1}{3}\frac{\delta}{\delta_m}\frac{Q}{\alpha}-\tfrac{1}{3}\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^7\frac{\bar{Q}'}{\alpha'}.$$

Die entsprechenden Bedingungen dafür, daß die Oberfläche des Kernes eine Niveaufläche der Schwere ist, werden mittels (14) erhalten, wenn nach Anweisung von (3)

$$R = \alpha'(1-\varepsilon'\cos^2\vartheta-\tfrac{3}{8}\varepsilon'^2\sin^2 2\vartheta)+Q'P^{(4)}(\cos\vartheta)$$

gesetzt wird. Man findet:

$$(18)\quad \varepsilon'\left(\frac{\delta}{\delta_m}\left(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon'\right)+\tfrac{3}{5}\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\left(1-\tfrac{3}{14}\varepsilon'\right)\right)-\tfrac{3}{5}\bar{\varepsilon}\frac{\delta}{\delta_m}\left(1+\tfrac{3}{14}\varepsilon-\tfrac{1}{2}\varepsilon'\right)=\frac{g_a^*}{2g_a+3g_a^*},$$

$$(19)\quad \left(\frac{\delta}{\delta_m}+\tfrac{3}{5}\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\right)\frac{Q'}{\alpha'}=\tfrac{1}{5}\frac{\delta}{\delta_m}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3\frac{\bar{Q}}{\alpha}.$$

§ 4. Numerische Grundlagen der Rechnungen. In diesem Paragraphen sollen die Zahlen zusammengestellt werden, welche ich meinen numerischen Rechnungen zu Grunde gelegt habe.

Was zunächst die Umdrehungszeit der Erde anbetrifft, so war zu setzen:

$$T = 86164{,}1 \text{ Sekunden.}$$

Nach Bessel (1841) ist $\alpha = 6377397$ m, nach Clarke (1880) $\alpha = 6378249$ m. Das Clarke'sche Resultat abrundend und ein wenig verkleinernd, nahm ich an:

$$\alpha = 6378200 \text{ m.}$$

Zur Berechnung von g_a benutzte ich die Bessel'schen Pendelmessungen in Königsberg i. Pr. und in Berlin. Für diese Auswahl bestimmend war einmal der Umstand, daß die Beobachtungsstationen sehr günstig liegen — nämlich weit ab von Gebirgen und steilen Küsten —, und zweitens der Umstand, daß die Bessel'schen Werthe recht gut das mittlere Resultat der Gesammtheit aller bisherigen absoluten Bestimmungen darstellen.

Digitized by Google

Die Beobachtungsdaten sind in der folgenden Tabelle enthalten:

Station	Breite	Seehöhe		Secunden-Pendel		R. a. M.-N.
		Toisen	Meter	Linien	Centimeter	
Königsberg	54° 52′ 50″	11,20	21,8	440,8147	99,44159	+0,00068
Berlin	52° 30′ 16″	17,77	34,6	440,7354	99,42370	+0,00108

Für den Uebergang zum Metermaaß setzte ich:

$$1 \text{ Linie} = 0{,}22558591 \text{ cm},$$

entsprechend den „Endwerthen zur Maaßbestimmung“ in Kapitel 4 der Veröffentlichung des Königlich Preußischen geodätischen Institutes: „Die europäische Längengradmessung in 52° Breite von Greenwich bis Warschau“, I. Heft, 1893, herausgegeben von F. R. Helmert.

Bei der Berechnung der Reduction auf das Meeresniveau („R. a. M.-N.“) wurde nach Faye verfahren, d. h. es blieben die Massen über dem Meeresniveau unberücksichtigt. (Vergl. S. 234.)

Das arithmetische Mittel der reducirten Pendellängen beider Stationen in Centimetern ist 99,43352; hierin dürfen wir die reducirte Pendellänge für diejenige Breite sehen, deren Quadrat des Sinus das arithmetische Mittel der entsprechenden Quadrate für die beiden Stationen darstellt. Die so bestimmte Breite ist 53° 41′ 5″. Berücksichtigt man noch, daß g aus der Pendellänge durch Multiplication mit π^2 entsteht, so ergeben sich als Endresultat der Bessel'schen Beobachtungen die zusammengehörigen Werthe:

$$\psi = 53° 41′ 5″, \quad g = 981{,}3695 \text{ Gal.}$$

Unter „Gal“ ist nach v. Oettingen (Naturforscher-Versammlung in Frankfurt a. M., 1896) die Einheit der Beschleunigung im Centimeter-Sekunden-System zu verstehen. —

Für den Zusammenhang von $(C-A)/C$ mit den Constanten der Präcession und Nutation stellt Serret in der Abhandlung „Théorie du mouvement de la terre autour de son centre de gravité“, 1859 [1]) die Formeln auf:

$$\frac{C-A}{C} = \frac{1}{305{,}6}(1+3{,}150\,\eta-2{,}158\,\sigma);$$

$$P = 50″{,}23572\,(1+\eta), \quad N = 9″{,}223\,(1+\sigma).$$

1) Annales de l'observatoire impériale de Paris, t. V.

Digitized by Google

P bedeutet die Constante der Präcession bezogen auf die Epoche 1 Januar 1850, N die Constante der Nutation. P ist mit so viel größerer Schärfe bekannt als N, daß für uns allein die Unsicherheit von N in Betracht kommt. Ich setzte einfach $\eta = 0$, und erhielt dann eine Relation zwischen $(C-A)/C$ und N.

Für die mittlere Dichte der Erde wurde angenommen:

$$\delta_m = 5{,}58.$$

Für die Dichte des Steinmantels δ berücksichtigte ich die Werthe 3,0, 3,2, 3,4 und bevorzugte 3,2.

Für die Abplattung ε des Erdellipsoids berücksichtigte ich die Werthe 1/300, 1/299, u. s. w. bis 1/293, und bevorzugte 1/297 und 1/296. —

§ 5. Rechnungen unter Annahme des hydrostatischen Gleichgewichts. Setzt man $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$, $\bar{\varepsilon}' = \varepsilon'$, so erlauben (11), (16), (18) bei vorgegebenen Werthen von g_a, δ und ε die Berechnung von α'/α, ε', δ' durch Näherungsrechnung; (17), (19) ergeben dann weiter Q/α, Q'/α', (15) liefert $(C-A)/C$ und mittels der Serret'schen Formel auch N, (7) liefert $g_p - g_a$, (10) endlich liefert $(g_p - g_a)/2 - g_{45}$. Derartige Rechnungen habe ich mit der 6-stelligen Burckhardt'schen Rechenmaschine des mathematisch-physikalischen Seminars der Königsberger Universität ausgeführt.

Bei den ersten, vorläufigen Rechnungen wurde für g_a ein Näherungswerth gesetzt, bei den definitiven Rechnungen benutzte ich dann die genaueren Werthe, welche aus den vorläufigen Rechnungen unter Berücksichtigung der Bessel'schen Pendelmessungen folgten.

Einige der Resultate sind in den Tabellen I und II wiedergegeben, andere, die sich auf g beziehen, werden in § 7 mitgetheilt werden.

Tabelle I.

$\delta = 3{,}2$

ε	α'/α	ε'/ε	Q/α	δ'	$(C-A)/C$	N
1/300	0,769887	0,909952	$0{,}0_6 4293$	8,414	1/359,000	9″,270
299	773399	913009	4196	8,343	307,729	9″,253
298	776900	915996	4101	8,274	306,464	9″,235
297	780390	918914	4005	8,206	305,203	9″,217
296	783871	921762	3911	8,140	303,947	9″,200
295	787344	924546	3816	8,075	302,696	9″,182
294	790809	927267	3723	8,011	301,450	9″,164
293	794266	929920	3629	7,949	300,208	9″,146

Digitized by Google

Tabelle IIa.

δ	3,0	3,2	3,4	3,0	3,2	3,4	3,0	3,2	3,4
ε	α'/α			ε'/ε			Q/α		
1/297	0,799579	0,780390	0,757036	0,928733	0,918914	0,905985	$0,0_6 3646$	$0,0_6 4005$	$0,0_6 4432$
1/296	802710	783871	760961	931174	921762	909404	3560	3911	4327

Tabelle IIb.

δ	3,0	3,2	3,4	3,0	3,2	3,4
ε	δ'			$(C-A)/C$		
1/297	8,046	8,206	8,423	1/305,204	1/305,203	1/305,200
1/296	7,987	8,140	8,346	303,947	303,946	303,944

§ 6. Dichte und Material des Kernes; Dicke des Mantels. Die Tabellen I und IIb lehren zunächst, daß sich für δ', d. h. für die Dichte des Metallkerns stets Werthe ergeben, die ein wenig über 7,8 liegen. Nun ist 7,8 die Dichte des Eisens unter den Umständen, unter denen wir gewöhnlich beobachten. Bedenkt man, daß die Schichten der Erde um so mehr Eisen führen, je tiefer sie liegen, daß auf die Erde theils Stein- theils Eisen-Meteoriten fallen, daß sich Eisen nach dem Ausweis des Spectroscopes an dem Bau des Sonnenkörpers in sehr bedeutendem Maaße betheiligt, und nehmen wir hierzu unser Rechnungsresultat, so wird es sehr wahrscheinlich, daß der Metallkern der Erde hauptsächlich aus Eisen besteht, welches durch den Druck der darüber liegenden Schichten ein wenig comprimirt ist. Die Sache umgekehrt ansehend, können wir behaupten, daß unsere Rechnung sehr an Gewicht gewinnt, weil sie für den Metallkern gerade diejenige Dichte ergiebt, welche aus anderen Gründen die größte Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Durch die Tabellen I und IIa erfahren wir weiter, daß der Gesteinmantel etwa 1/5 des Erdradius beansprucht; seine Dicke beträgt etwa 1400 Kilometer ($\alpha'/\alpha = 0{,}78$); 1200 km ($\alpha'/\alpha = 0{,}81$) und 1600 km ($\alpha'/\alpha = 0{,}75$) sind wohl die äußersten Grenzwerthe, welche noch in Betracht kommen können.

§ 7. Vertheilung der Schwere auf der Erdoberfläche. Setzt man die Zahlen der Tabellen I und II für Q/α in (10), so folgt Tabelle III. Wie man sieht, unterscheidet sich $(g_p - g_a)/2 - g_{45}$ höchstens um wenige Zehntel von 7 Milligal. Da

Digitized by Google

Tabelle III.

$\frac{g_p - g_a}{2} - g_{45}$ in Milligal[1]).

ε	$\delta = 3{,}0$	$\delta = 3{,}2$	$\delta = 3{,}4$
1/300		7,09	
299		7,07	
298		7,05	
297	6,92	7,03	7,17
296	6,90	7,02	7,15
295		7,01	
294		6,99	
293		6,98	

Tabelle IV.

Constanten der Gleichung (9) in Gal.

ε	g_a	$g_p - g_a$	g_{45}	$\frac{g_p + g_a}{2}$	$\frac{g_p + g_a}{2} - g_{45}$
1/300	977,9968	5,2045	980,5921	2,6023	
299	978,0039	1936	5937	5968	
298	0111	1825	5954	5913	
297	0183	1714	5970	5857	
296	0256	1602	5987	5801	0,0070
295	0329	1490	6004	5745	
294	0402	1377	6020	5688	
293	0476	1263	6037	5631	

nun in der Praxis selbst bei den feinsten Pendelmessungen die Milligal unsicher bleiben, so scheint es völlig ausreichend, abrundend zu setzen:

$$\frac{g_p - g_a}{2} - g_{45} = +7 \text{ Milligal.}$$

Das ist bei der Berechnung der Tabelle IV für die Constanten der Gleichung (9) auf Grund der Bessel'schen Pendelmessungen geschehen, und infolgedessen enthält die Tabelle nichts mehr, was auf die specielle Verfügung über δ hinweist. Wie wir später erfahren werden, besteht in der Erde jedenfalls mit großer Annäherung hydrostatisches Gleichgewicht, daher darf angenommen werden, daß die etwaigen Abweichungen Q und damit $(g_p - g_a)/2 - g_{45}$

1) 1 Gal = 1 (Centimeter $\times$ Secunde $^{-2}$), vergl. S. 228.

Digitized by Google

nicht merklich beeinflussen. Sollte ferner eine Verbesserung der absoluten Werthe für g_a und g_{45} nöthig werden, so kann diese jedenfalls nicht so groß sein, daß davon $g_p - g_a$ und $(g_p - g_a)/2 - g_{45}$ merklich berührt werden. Wir dürfen daher die Angaben der Tabelle IV über die Variation der Schwere auf der Erdoberfläche und ihre Abhängigkeit von der Abplattung als definitive Resultate unserer Theorie ansehen, die von allen noch übrig bleibenden Unsicherheiten unabhängig sind.

Daß sich ein bestimmter Werth für die Constante $(g_a - g_a)/2 - g_{45}$ ergeben hat, ist nicht unwesentlich, da man bisher über sie in großer Unsicherheit war. Helmert gebrauchte in Ermangelung eines zuverlässigen Anhaltes einfach den Werth 0.

§ 8. Abweichung des Geoids von der ellipsoidischen Gestalt. Mit der bisherischen Unsicherheit über $(g_p - g_a)/2 - g_{45}$ hing enge zusammen eine solche über die Abweichung des Geoids von der ellipsoidischen Gestalt, soweit sie durch die Kugelfunction 4^{ter} Ordnung $P^{(4)}(\cos\vartheta)$ dargestellt wird, denn diese Abweichung wird ja durch Q/α gemessen, und es besteht zwischen Q/α und $(g_p - g_a)/2 - g_{45}$ die lineare Beziehung (10). — Nach unserer Theorie ist, wie die Tabellen I und II zeigen, nahezu:

$$\frac{Q}{\alpha} = +0{,}0000004, \quad \text{also} \quad Q = +2\tfrac{1}{2}\text{ m}.$$

Das Geoid erhebt sich hiernach an den Polen um etwa $2\frac{1}{2}$ m, am Aequator um etwa 1 m über das Ellipsoid und sinkt in den Breiten $\pm 41°$ bis auf etwa 1 m unter das Ellipsoid herab.

Die größten Breitenverschiebungen wegen dieser Deformation der Geoidfläche finden wir in den Breiten $\mp 66°$ und $\pm 21°$ mit den Beträgen von etwa $\frac{1}{5}''$ und $\frac{1}{7}''$.

Für die Veränderung der Abplattung ergiebt sich nach (4):

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{\varepsilon} = h - \eta = \tfrac{1}{40}.$$

Diese Zahlen lehren, daß die Störungen des Geoids durch das Glied mit der Kugelfunction 4^{ter} Ordnung nur äußerst gering sind. Unsere Theorie rechtfertigt daher den gewöhnlichen Gebrauch, das Geoid als Ellipsoid zu betrachten.

Aus der Helmert'schen Annahme $(g_p - g_a)/2 - g_{45} = 0$ würde folgen:

Digitized by Google

$$\frac{Q}{\alpha} = -0{,}0000018, \quad Q = -11\tfrac{1}{2}\text{ m}$$

Die Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid wären also etwa 4mal so groß wie nach unserer Theorie und von entgegengesetzter Art.

§ 9. Beziehung zwischen Nutation und Erdabplattung im Falle des hydrostatischen Gleichgewichtes. Die Werthe von $(C-A)/C$ in den Tabellen I und IIb sind unter Verwendung der Hypothese des hydrostatischen Gleichgewichtes gewonnen worden. Tabelle IIb zeigt, daß $(C-A)/C$ im Wesentlichen nur von ε abhängt und von der Verfügung über δ nur wenig beeinflußt wird. Dies ist nicht weiter auffällig, denn es variirt, wie durch Untersuchungen von Callandreau und Poincaré bekannt ist, die Beziehung zwischen $(C-A)/C$ und ε überhaupt nur innerhalb enger Grenzen mit der Annahme über die Massenvertheilung im Erdinnern, wenn hydrostatisches Gleichgewicht vorausgesetzt wird. In unserem speciellen Fall, wo nur der Werth von δ unbestimmt bleibt, ist nach dem Ausweis der Tabelle IIb innerhalb des in Betracht kommenden Intervalles von δ die Variation so gering, daß sie ganz unbeachtet bleiben darf. Tabelle I darf daher allgemein als maaßgebend für den Zusammenhang von ε und $(C-A)/C$ angesehen werden. Da wir ferner auch zwischen $(C-A)/C$ und N eine feste, durch die Serret'sche Formel gegebene Beziehung annehmen, so werden auch ε und N fest miteinander verbunden, und Tabelle I gewinnt auch für diesen Zusammenhang allgemeine Gültigkeit. —

Hier ist nun aber wohl zu beachten, daß diese Schlüsse nur dann zutreffend sind, wenn im Innern der Erde hydrostatisches Gleichgewicht herrscht.

§ 10. Möglichkeit einer Störung des hydrostatischen Gleichgewichtes. Wird die Hypothese des hydrostatischen Gleichgewichtes aufgegeben, so könnte man zunächst sowohl für die Oberfläche des Mantels wie für die des Kernes Abweichungen voraussetzen. Dabei wären die allmähligen Veränderungen zu bedenken, welche die Rotationsgeschwindigkeit der Erde wegen der Contraction durch Abkühlung und wegen der Reibung der Flutwelle erfährt, und es müßte angenommen werden, daß die Umgestaltungen beider Oberflächen den Veränderungen der Rotationsgeschwindigkeit nur zögernd folgen. Es giebt jedoch gute Gründe, die eine merkliche Störung des Gleichgewichtes für

Digitized by Google

die Oberfläche des Mantels sehr unwahrscheinlich machen. — Darüber Folgendes.

Bekanntlich variirt nach dem Ausweis des Pendels die Masse der Erdrinde keineswegs entsprechend den sichtbaren Hebungen und Senkungen der festen Oberfläche, sondern scheint — wenn man sich die lokalen Unebenheiten ausgeglichen denkt — nur wenig abhängig von der äußeren Begrenzung. Bedenkt man nun, daß im Laufe der Zeiten Schichten von vielen Kilometern Dicke der Erdoberfläche theils aufgelagert, theils entführt worden sind, so muß geschlossen werden, daß bei der Ausbildung der heutigen Verhältnisse unter der festen Erdrinde eine plastische Unterlage vorhanden war, auf der die Rinde schwimmend ruhte, sodaß die Massenumlagerungen sich durch Hebungen und Senkungen der Erdrinde wieder ausgleichen konnten. — Als Material der plastischen Unterlage werden wir feurig-flüssige Gesteine betrachten müssen.

Wenn es nach diesen Ueberlegungen erlaubt — ja, geboten — scheint, für die Oberfläche des Mantels hydrostatisches Gleichgewicht anzunehmen, so steht es wesentlich anders um die Oberfläche des Kernes.

Das Wasser unterhält auch heute noch wie in früheren geologischen Epochen Massenumlagerungen auf der Erdoberfläche, und seine Arbeit hat sich seit den jüngeren Epochen wohl nicht sehr viel vermindert. So scheint es nöthig, die feurig-flüssige Unterlage der Erdrinde auch heute noch anzunehmen. Dahin sehen wir uns ja auch durch die Thätigkeit der Vulkane gedrängt. Die seismographischen Untersuchungen deuten ebenfalls darauf hin, denn sie scheinen zu zeigen, daß von den Erdbebencentren sich Erschütterungswellen längs der Erdrinde fortpflanzen, was nur möglich ist, wenn die Rinde durch ein nachgiebiges Polster von ihrer Unterlage isolirt ist. Nun ist andererseits durch Arbeiten von Darwin und W. Thomson bekannt, daß die Erde im Ganzen bei der Ebbe und Flut eine Starrheit zeigt, die der von Stahl etwa gleichkommt. Es kann also nur eine plastische Schicht von verhältnißmäßig geringer Dicke vorhanden sein, und diese muß einen sehr starren Kern von großen Dimensionen umschließen. Der Unterschied in dem Verhalten von plastischer Schicht und starrem Kern mag zum Theil auf den von uns angenommenen Materialverschiedenheiten in der Erde beruhen, die Hauptsache aber ist wohl, daß der nach innen zu immer weiter steigende Druck die materiellen Moleküle schließlich so enge aneinanderpreßt, daß sie

Digitized by Google

trotz der steigenden Temperatur die gegenseitige Beweglichkeit völlig verlieren.

Nach dieser Auffassung kann der starre Erdkern schon lange vor jener Zeit bestanden haben, als die äußere Rinde zu erstarren begann, und es scheint daher möglich, daß früher durchlaufene Rotationsgeschwindigkeiten ihre Spuren in merklichen Abweichungen der Gestalt des Kernes von der Gleichgewichtsfigur hinterlassen haben.

§ 11. Rechnungen für den Fall einer Störung des hydrostatischen Gleichgewichtes. Dies alles erwägend wollen wir nun die Hypothese des hydrostatischen Gleichgewichtes zwar für den Kern aufgeben, für die äußere Begrenzung des Mantels aber beibehalten. Es werden dann die auf den Kern bezüglichen Formeln (18) und (19) in § 3 ungültig, während die auf den Mantel bezüglichen Formeln (16) und (17) bestehen bleiben. Da jedenfalls nur geringe Abweichungen zu erwarten sind, solche aber für $\bar{Q}$ und $\bar{Q}'$ nicht in Betracht kommen, ist allein auf das Versagen von (18) zu achten.

η_N sei derjenige Werth von η, der vorhanden sein müßte, wenn die Nutation — und also auch der Quotient $(C-A)/C$ — den jetzigen Werth hätte, und hydrostatisches Gleichgewicht bestände. In ähnlicher Weise möge durch den Index η an dem Symbol einer Größe derjenige Werth bezeichnet werden, der im Falle des hydrostatischen Gleichgewichtes — und bei gleichem Werth von δ — zu dem thatsächlichen Werth von η gehören würde. Unsere Tabelle I gilt dann sowohl für $\frac{C-A}{C}$ und η_N, als auch für $\left(\frac{C-A}{C}\right)_\eta$ und η und ergiebt näherungsweise:

$$\frac{C}{C-A} - \left(\frac{C}{C-A}\right)_\eta = 1{,}26\,(\eta_N - \eta).$$

Die Formeln (11), (16) und auch (15), nachdem $\bar{\varepsilon}$ durch ε ersetzt ist, werden sowohl durch

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \frac{\alpha'}{\alpha},\ \frac{\delta'-\delta}{\delta_m},\ \frac{C}{C-A},$$

also auch durch

$$\varepsilon,\ \varepsilon'_\eta,\ \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)_\eta,\ \left(\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\right)_\eta,\ \left(\frac{C}{C-A}\right)_\eta$$

erfüllt; hieraus folgt näherungsweise:

Digitized by Google

$$\bar{\eta}'-\eta'_\eta = \frac{\frac{\delta}{\delta_m}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^5}{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^5}\left\{\frac{C}{C-A}-\left(\frac{C}{C-A}\right)_\eta\right\},$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha}-\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)_\eta = \tfrac{1}{2}\varepsilon'\frac{\alpha'}{\alpha}(\bar{\eta}'-\eta'_\eta),$$

$$\frac{\delta'-\delta'_\eta}{\delta_m} = \frac{\delta'-\delta}{\delta_m}-\left(\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\right)_\eta = -\tfrac{3}{2}\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\varepsilon'(\bar{\eta}'-\eta'_\eta).$$

In Zahlen erhalten wir bei Verwerthung der schon hingeschriebenen Gleichung und der Tabelle I näherungsweise:

$$\bar{\eta}'-\eta'_\eta = 4{,}3\,(\eta_\varkappa-\eta),\quad \frac{\alpha'}{\alpha}-\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)_\eta = 0{,}0052\,(\eta_\varkappa-\eta),$$

$$\delta'-\delta'_\eta = -0{,}099\,(\eta_\varkappa-\eta).$$

Durch diese Gleichungen werden die Verbesserungen angegeben, welche die Zahlen der Tabellen I und II erfahren müssen, wenn die Oberfläche des Kernes nicht im hydrostatischen Gleichgewicht ist.

Damit die Bedeutung der ersten Gleichung deutlich hervortrete, ist zu beachten, daß näherungsweise

$$\eta' = 320.$$

Von Interesse ist die Frage, wie weit sich die Gestalt des Kernes von der Gleichgewichtsfigur entfernt. Um ein Urtheil zu gewinnen, suchen wir die Differenz $\bar{\eta}'-\eta'$ zwischen $\bar{\eta}'$, dem reciproken Werth der Abplattung des Kerns und η', dem reciproken Werth der Abplattung der Niveaufläche gleichen Rauminhalts.

Wird in der Gleichung für das Potential φ der Schwere im Kern $R = \alpha'(1-\varepsilon'\cos^2\vartheta)$ gesetzt, so muß φ bis auf Glieder von der Ordnung ε'^2 constant werden; hieraus folgt:

$$\left(\frac{\delta}{\delta_m}+\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\right)\varepsilon' = \tfrac{3}{5}\left(\frac{\delta}{\delta_m}\bar{\varepsilon}+\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\bar{\varepsilon}'\right)+\tfrac{1}{2}\frac{g^*_a}{g_a}+G_2,$$

wobei G_2 eine Größe von der Ordnung ε'^2 darstellt. Diese Gleichung muß auch gültig bleiben, wenn ε', $\bar{\varepsilon}'$ und $\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}$ durch $\varepsilon'_\eta = \bar{\varepsilon}'_\eta$, $\bar{\varepsilon}'_\eta$ und $\left(\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\right)_\eta$ ersetzt werden; es ergiebt sich hieraus bei Rücksicht auf die früher gefundene Gleichung für

$$\left(\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\right)-\left(\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\right)_\eta$$

Digitized by Google

in gleicher Annäherung:

$$\eta' = \eta'_\eta, \qquad \bar{\eta}' - \eta' = \bar{\eta}' - \bar{\eta}'_\eta,$$

also:

$$\bar{\eta}' - \eta' = 4{,}3\ (\eta_\varkappa - \eta).$$

H sei die Erhebung des Kerns über die Niveaufläche an den Polen; dann ist $H/2$ die Einsenkung am Aequator. Da die Zahl η' etwa 320, und der Radius α etwa 5,0 Millionen Meter beträgt, so ergiebt die letzte Gleichung:

$$H = 140(\eta_\varkappa - \eta) \text{ Meter.}$$

Weiter fragen wir nun noch nach der Umdrehungszeit T_k, welche statt der heutigen vorhanden sein müßte, wenn die Oberfläche des Kerns bei unveränderter Gestalt eine Niveaufläche der Schwere darstellen sollte. Die Oberfläche des Mantels setzen wir dabei als völlig nachgiebig voraus, nehmen also an, daß durch den Uebergang von T in T_k für die ganze Erde hydrostatisches Gleichgewicht hergestellt werde: ε_k sei dann die Abplattung des Mantels, $(g_a^*)_k$ die Beschleunigung wegen der Erdrotation am Aequator. Die Gleichungen (16) und (18) müssen dann gelten sowohl für

$$\bar{\varepsilon}', \ \frac{\alpha'}{\alpha}, \ \frac{\delta' - \delta}{\delta_m}, \ \varepsilon_k, \ (g_a^*)_k$$

wie für

$$\bar{\varepsilon}'_\eta, \ \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)_\eta, \ \left(\frac{\delta' - \delta}{\delta_m}\right)_\eta, \ \varepsilon, \ g_a^*;$$

berücksichtigt man überdies die Beziehung

$$(g_a^*)_k : g_a^* = T^2 : T_k^2,$$

so ergiebt sich näherungsweise:

$$\eta_k - \eta = \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2 \frac{\delta'}{\delta_m} (\bar{\eta}' - \eta'_\eta),$$

$$\frac{T_k - T}{T} = \varepsilon'^2 \frac{\delta'}{\delta_m} \left(1 - \tfrac{3}{5} \frac{\delta}{\delta_m}\right) \frac{g_a}{g_a^*} (\bar{\eta}' - \eta'_\eta),$$

$$\eta_k - \eta = 5{,}3\,(\eta_\varkappa - \eta),$$

$$\frac{T_k - T}{T} = \frac{1}{88} (\eta_\varkappa - \eta).$$

Uns stützend auf die vorstehenden Rechnungen können wir

Digitized by Google

hoffen, zu einem Urtheil über die Größe der etwaigen Störung des hydrostatischen Gleichgewichts im Innern der Erde zu gelangen, wenn wir die wirkliche Abplattung der Erde $\varepsilon = 1/\eta$ mit derjenigen $\varepsilon_N = 1/\eta_N$ vergleichen, welche der Nutation im Fall des hydrostatischen Gleichgewichts entspräche. Wir wollen demgemäß nun nach den Beobachtungsergebnissen über $\varepsilon = 1/\eta$ und $\varepsilon_N = 1/\eta_N$ fragen.

§ 12. Abplattung der Erde. Beobachtungsergebnisse. Unabhängig davon, ob im Innern der Erde hydrostatisches Gleichgewicht besteht oder nicht, kann die Abplattung der Erde auf drei verschiedenen Wegen bestimmt werden: 1) durch geodätische Messungen; 2) aus der Breitenvariation der Schwere; 3) aus den Störungen der Mondbahn, die durch das zweite, $P^{(2)}(\cos\vartheta)$ enthaltende Glied der Formel für das Gravitationspotential der Erde verursacht werden.

Da die beiden ersten Wege sich vorläufig nur auf Messungen stützen können, die einen verhältnißmäßig sehr kleinen Theil der Erdoberfläche umfassen, haftet ihnen wegen der Unregelmäßigkeiten in der Massenvertheilung der Erdrinde erhebliche Unsicherheit an. In dem nach der Methode der kleinsten Quadrate durch Vergleich der Beobachtungen unter sich bestimmten „wahrscheinlichen Fehler“ kommt diese Unsicherheit nur zum Theil zum Ausdruck.

Für den dritten Weg liegen ähnliche Schwierigkeiten zwar nicht vor, dafür muß er sich auf so kleine und deßhalb schwierig beobachtbare Größen stützen, daß er uns ebenfalls keine größere Sicherheit zu bieten vermag.

Aus geodätischen Messungen folgerte im Jahre 1841 Bessel:

$$\eta = 299{,}2;$$

später, im Jahr 1880, berechnete Clarke auf Grund eines weit umfangreicheren Beobachtungsmaterials:

$$\eta = 293{,}5 \pm 1{,}1.$$

Die neueren europäischen Längengradmessungen in $47^1/_2{}^0$ und 52^0 Breite stimmen mit dem Clarke'schen Werth recht schlecht zusammen und deuten auf einen größeren Werth von η.

Bei den bisherigen Versuchen, die Abplattung aus den Schweremessungen zu berechnen, wurden meist die Beobachtungen in Flachländern, in Gebirgen, an Küsten und auf Inseln ohne Unterscheidung verwendet, sodaß nach den neueren Erfahrungen

Digitized by Google

große Fehler zu befürchten sind. Helmert in seinen „Physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie", 1884, erhielt bei Ausschluß der Inselstationen (sowie einiger Stationen im Hochgebirge) und bei Berücksichtigung des Unterschiedes von Inland und Küste durch eine weitgeführte Diskussion den Werth:

$$\eta = 299{,}2 \pm 1{,}2.$$

Trotzdem die Zahl der Beobachtungsstationen über 100 hinausgeht, sind hierbei freilich doch nur verhältnißmäßig wenige Messungen ausschlaggebend, die äquatoriale Stationen mit europäischen verbinden. Dieser Uebelstand kann auch durch die neuerdings hinzugekommenen so zahlreichen Schweremessungen noch nicht beseitigt werden, weil bei der Auswahl der Stationen bisher andere Gesichtspunkte maaßgebend waren. Immerhin glaube ich einige Anzeichen dafür zu finden, daß die Helmert'sche Zahl η um 1—2 Einheiten zu groß ist.

In den folgenden Angaben über Resultate des dritten Weges schließe ich mich an die Helmert'schen „Physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie".

Bürg folgerte (1833) aus der Breitenstörung der Mondbahn:

$$\eta = 295$$

und aus der Längenstörung:

$$\eta = 294.$$

Hansen — bei seinen Arbeiten über die Mondtheorie — verwerthete zur Bestimmung von η nur die Breitenstörung und erhielt:

$$\eta = 296.$$

Helmert berechnet aus den Hansen'schen Angaben von 1865 über die Breitenstörung

$$\eta = 300$$

und über die Längenstörung:

$$\eta = 295\tfrac{1}{2}.$$

Vergleichen wir zurückblickend die Ergebnisse aller drei Wege, so müssen wir den wahrscheinlichsten Werth für η wohl etwa in

Digitized by Google

suchen; die Werthe

298 und 294

kommen schon weniger in Betracht.

§ 13. Nutation und Erdabplattung; Beobachtungsergebnisse und Folgerungen. Wird die Hypothese des hydrostatischen Gleichgewichts nicht ohne Weiteres anerkannt, so erlauben die Störungen der Erdrotation infolge des zweiten, $P^{(2)}(\cos\vartheta)$ enthaltenden Gliedes in der Formel für das Gravitationspotential der Erde, d. h. Präcession und Nutation, nicht direkt eine Berechnung der Erdabplattung, sondern nur eine Bestimmung der in § 11 eingeführten Hülfsgröße $\varepsilon_N = 1/\eta_N$. Diese erhalten wir nach § 9 in einfachster Weise aus den Beobachtungsdaten über die Nutation N durch Vermittlung von Tabelle I.

In der folgenden Tabelle sind die Angaben der ersten 4 Columnen einer Zusammenstellung von Harkness in seinem Buche „The Solar Parallax and its Related Constants", 1891 entnommen. Den einzelnen Bestimmungen von N liegen jedesmal andere Beobachtungen zu Grunde. Die 5. Columne wurde mittels Tabelle I berechnet (zum Theil durch Extrapolation).

Autor	Jahr der Veröffentl.	Zahl der Beob.	N	$\eta_N = \frac{1}{\varepsilon_N}$
Brinkley	1821	1618	$9''{,}25 \pm 0''{,}05$	299 ± 3
Busch	1836	1949	$9{,}232 \pm 0{,}031$	$297{,}8 \pm 1{,}7$
Robinson	1838	6023	$9{,}239 \pm 0{,}052$	$298{,}2 \pm 2{,}9$
Lundahl	1841	> 1200	$9{,}236 \pm 0{,}040$	$298{,}1 \pm 2{,}2$
C. A. F. Peters	1841	603	$9{,}216 \pm 0{,}020$	$296{,}9 \pm 1{,}1$
Main	1855	173	$9{,}323 \pm 0{,}059$	$303{,}0 \pm 3{,}3$
E. J. Stone	1868	3250	$9{,}134 \pm 0{,}011$	$292{,}3 \pm 0{,}6$
Nyrén	1871	375	$9{,}244 \pm 0{,}012$	$298{,}5 \pm 0{,}7$
Downing	1882	1041	$9{,}335 \pm 0{,}032$	$303{,}7 \pm 1{,}8$
De Ball	1885	1867	$9{,}217 \pm 0{,}012$	$297{,}0 \pm 0{,}7$

Die Resultate von Stone und Downing fallen sehr auf-

Digitized by Google

fallend aus der Reihe der anderen heraus, zum Glück nach verschiedenen Seiten. — Als wahrscheinlichster Werth für η_N kann etwa

$$298$$

angesehen werden, und es kommen die Zahlen

$$296 \text{ und } 300$$

kaum noch in Betracht.

Stellen wir diesem Resultat das vorhin für η formulirte gegenüber, so muß zunächst erklärt werden, daß der Fall einer nicht merklichen Abweichung vom hydrostatischen Gleichgewicht sehr wohl möglich scheint. Wir könnten dann etwa

$$\eta = \eta_N = 297$$

als das Gesammtresultat aller vorliegenden Beobachtungen ansehen.

Sollte eine Abweichung zwischen η_N und η bestehen, so ist wahrscheinlich $\eta_N > \eta$. Da $\bar{\eta}' - \eta'$ und $\eta_N - \eta$ nach § 11 gleiches Vorzeichen haben, würde folgen, daß der Kern schwächer abgeplattet ist, als dem hydrostatischen Gleichgewicht entspricht. — Wäre

$$\eta = 296, \qquad \eta_N = 298,$$

was möglich scheint, so ergäbe sich näherungsweise:

$$\bar{r}' - \eta' = +8{,}5, \qquad \bar{\eta}' : \eta' = 1 + \tfrac{1}{40} : 1, \qquad H = +280m,$$

$$\frac{T_k - T}{T} = +\tfrac{1}{44}.$$

Die Abplattung des Kernes, $\bar{\varepsilon}' = 1/\bar{\eta}'$, wäre also um etwa 1/40 geringer als die der Niveaufläche gleichen Inhalts, $\varepsilon' = 1/\eta'$; der Kern überragte die Niveaufläche an den Polen um etwa 280 m und läge am Aequator um etwa 140 m tiefer. Bei unveränderlicher Gestalt des Kernes und völliger Nachgiebigkeit der äußeren Begrenzung der Erde müßte die Rotationsgeschwindigkeit um etwa 1/44 kleiner werden, um auch für die Oberfläche des Kernes hydrostatisches Gleichgewicht herzustellen. —

Durch die Contraction der Erde infolge ihrer Abkühlung wird die Rotationsgeschwindigkeit beschleunigt, durch die Reibung der Flutwelle verzögert. Je weiter die Erstarrung der Erde fortschreitet, um so mehr tritt der verzögernde Einfluß der Flutwelle

Digitized by Google

hervor; man nimmt an, daß er heute schon überwiegt, daß also T zunimmt. Unser Resultat, daß die zum hydrostatischen Gleichgewicht gehörige Rotationszeit T_h größer ist als T, sagt demgemäß aus, daß die heutige Abweichung des Kerns von der Gleichgewichtsfigur noch aus jener schon vergangenen Periode stamme, in welcher der Einfluß der Abkühlung überwog. Die bedeutende Größe von $T_h - T$ nöthigt uns sogar, in dieser Periode sehr weit zurückzugehen, denn wie eine einfache Rechnung zeigt, muß die Steinschicht damals um mehr als 1/6 dicker gewesen sein als heute, also sehr viel heißer — außen schwerlich schon erstarrt, vielleicht sogar noch gasförmig. — Noch viel weiter müßte zurückgegangen werden, um den aus Nutationsbeobachtungen folgenden Werth $\eta_N = 298$ mit dem Clarke'schen Werth $\eta = 293\frac{1}{2}$ zu vereinigen.

Aus diesen Abschätzungen folgt, daß wenn wirklich ein Unterschied zwischen η_N und η um einige Einheiten bestehen sollte, der Erdkern durch ungeheure Zeiträume hindurch deformirenden Kräften widerstanden haben müßte. So hat denn neben der Astronomie und der Geophysik auch die Physik der Materie erhebliches Interesse an den Arbeiten, welche der Bestimmung der Erdabplattung und der Nutation gewidmet sind.

§ 14. Inhalts-Uebersicht. Als Ausgangshypothese dient die Vorstellung, daß die Dichteunterschiede in der Erde in der Hauptsache durch Materialverschiedenheiten verursacht werden. Bei ihrer Anerkennung muß unter dem Mantel von Gesteinen, auf dem wir wohnen, ein Metallkern angenommen werden. (§ 1). Um die Rechnung möglichst einfach zu gestalten, wird sowohl für den Mantel wie für den Kern die Dichte durchweg constant gesetzt. In der Hoffnung, auf diese Weise den wirklichen Verhältnissen in nicht gar zu schlechter Annäherung nahe zu kommen, bestärkt der Umstand, daß sich dann für den Kern gerade diejenige Dichte ergiebt, die aus vielerlei Gründen von vorne herein erwartet werden muß: Die Dichte des comprimirten Eisens. (§ 6). Die Rechnung gelangt dahin, indem sie ausgeht von dem bekannten Werth der mittleren Dichte der Erde und der wenigstens ungefähr angebbaren Dichte des Gesteinmantels, und beachtet, daß sich jedem vorgegebenen Werth für die Dichte des Kerns eine bestimmte Größe des Kernes und eine bestimmte Abplattung der Erde zuordnet; so erlaubt die wirklich vorhandene Abplattung der Erde einen Schluß auf Dichte und Dimensionen des Kernes. — Da die Rechnung sich in Bezug auf die Dichte bewährt, dürfen wir ihr auch in Bezug auf die

Digitized by Google

Dimensionen des Kernes einiges Vertrauen schenken, und wir werden so zu der Vorstellung geführt, daß die Erde aus einem Eisenkern von etwa 10 Millionen Meter Durchmesser besteht, den ein Gesteinmantel von etwa $1^1/_2$ Millionen Meter Dicke umgiebt. (§ 6). Der Mantel beansprucht etwa 1/5 des Erdradius. Dem Volumen nach kommt er dem Kern etwa gleich, der Masse nach steht er weit zurück, denn hier ist das Verhältniß etwa 2 : 5. —

Werden in den Entwicklungen der Rechnungen neben den Gliedern, welche den ellipsoidischen Abweichungen des Geoides von der Kugel zugehören, noch die nächst höheren Glieder berücksichtigt, so ergiebt sich als ein für die Praxis nicht unwesentliches Resultat, daß die Abweichung von der ellipsoidischen Gestalt nur äußerst gering ist; selbst die maximale Differenz (an den Polen) erreicht nur etwa $2^1/_2$ m. (§ 8). Indem die Theorie eine Schätzung der Abweichung gestattet, ermöglicht sie es, das bisher unbekannte dritte Glied in der Formel für die Breitenvariation der Schwere zu berechnen. (§ 7). —

Viel Raum wird der Discussion über die Frage gewidmet, wie weit in der Erde hydrostatisches Gleichgewicht besteht (§ 10 bis § 13). Es zeigt sich, daß eine Entscheidung durch die Beobachtung möglich ist, wenn man die Abplattung der Erde mit Nutation und Präcession vergleicht. (§ 11). Die vorliegenden Beobachtungen sind mit vollständigem Gleichgewicht verträglich, doch scheint es fast, als ob der Kern ein wenig geringer abgeplattet ist, als der heutigen Rotationsgeschwindigkeit entspricht; in diesem Sinne könnten zwischen der Oberfläche des Eisenkernes und der Niveaufläche gleichen Inhalts Höhenunterschiede von einigen Hundert Meter wohl bestehen. (§ 13). Für die Oberfläche des Mantels ist eine merkliche Störung des hydrostatischen Gleichgewichtes von vorne herein sehr unwahrscheinlich. (§ 10).

Digitized by Google

Ueber die Green'sche Function eines von getrennten sphärischen Mannigfaltigkeiten begrenzten Gebietes.

Von

Wilh. Wirtinger in Innsbruck.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung am 30. Oct. 1897.

Versucht man die Bildung der Green'schen Function für ein Gebiet im Raume von n Dimensionen, welches von m sphärischen Mannigfaltigkeiten, die sich untereinander weder schneiden noch berühren, begrenzt ist, so begegnet man bei Anwendung der Methode der electrischen Bilder zwei Schwierigkeiten. Die erste besteht darin, daß die sphärische Spiegelung ein Potential nicht unmittelbar in ein Potential überführt, die zweite in der Entscheidung über die Convergenz der wiederholten Spiegelungsprocesse.

Der erste Uebelstand kann nun in einfachster Weise durch Einführung homogener polysphärischer Coordinaten und Potentialformen, wie sie von Darboux[1]) eingeführt und von Klein[2]) verallgemeinert wurden, beseitigt werden. Die Convergenzuntersuchung dagegen läßt sich für eine umfassende Reihe von Fällen mit Hilfe der von Schottky in § 2 seiner Abhandlung im 101. Bande des Crelle'schen Journals bewiesenen Sätze erledigen. Man kann nämlich diese Sätze ohne jede Schwierigkeit auf n Dimensionen übertragen.

Das Resultat ist dann folgendes:

Die Green'sche Function für den betrachteten Bereich wird bis auf einen von x und y unabhängigen Factor durch die Formel gegeben

$$G(x,y) = (a_\xi a_\eta . a_\xi a_\eta)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{(\varkappa)} \frac{(-1)^{h_\varkappa}}{|a_y a_{x_{(\varkappa)}}|^{\frac{n-2}{2}}},$$

1) Comptes Rendus LXXXIII (2.) 1876, pag. 1037 und 1099.

2) Vgl. F. Pockels, über die part. Differentialgleichung $\Delta u + \varkappa^2 u = 0$, 1891, pag. 195—204.

Digitized by Google

sobald die rechtsstehende unendliche Reihe unbedingt convergirt und eine Potential zur Summe hat.

Dabei bedeuten x_i, y_i $(i = 1 \dots n+2)$ die $n+2$ homogenen polysphärischen Coordinaten der beiden Punkte x und y von denen G abhängt, ζ den unendlich fernen Punkt im Raume von n Dimensionen, a_x^2 die linke Seite der homogenen quadratischen Relation zwischen den x_i. Das Zeichen $x_{(\varkappa)}$ dagegen hat folgende Bedeutung: Durch die wiederholte Spiegelung an den m gegebenen Sphären ist eine Gruppe von unendlich vielen homogenen linearen Transformationen $S_\varkappa$ der Form a_x^2 in sich selbst gegeben, deren Coefficienten so normirt werden können, daß die Determinante jeder solchen Transformation den Werth ± 1 hat. Der durch die Transformation $S_\varkappa$ aus x hervorgehende Punkt und seine Coordinaten werde durch $x_{(\varkappa)}$ bezeichnet, $h_\varkappa$ aber bezeichne die Anzahl der einfachen Inversionen aus denen $S_\varkappa$ zusammengesetzt ist. Die Summation ist über alle Punkte $x_{(\varkappa)}$ zu erstrecken.

Es ist leicht zu zeigen, daß der obige Ausdruck alle Bedingungen, denen die Green'sche Function unterworfen ist, formal erfüllt, wenn y und x demselben Gebiet angehören, denn er wird innerhalb des Gebietes nur unendlich von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung wenn x und y zusammenfällt. Die Summe wechselt ferner das Zeichen, wenn x an einer begrenzenden Sphäre gespiegelt wird, und verschwindet daher wenn x auf eine solche Sphäre selbst fällt. Auch ist jedes einzelne Glied der Summe multiplicirt mit dem gemeinsamen Factor ein Potential. Die Symmetrie in x und y ist ferner unmittelbar ersichtlich, da

$$a_y a_{x_{(\varkappa)}} = a_{y_{(\varkappa')}} a_x$$

ist, wenn $S_{\varkappa'}$ die umgekehrte Transformation zu $S_\varkappa$ bedeutet, so daß $(x_{(\varkappa)})_{(\varkappa')}$ identisch ist mit x.

Was nun die Convergenz der obigen Summe zu einem Potential betrifft, so läßt sich darüber auf Grund der Schottky'schen Sätze folgendes aussagen:

1) Im Falle $n > 3$ convergirt die Reihe und stellt ein Potential dar, wenn die m gegebenen sphärischen Mannigfaltigkeiten so liegen, daß man durch neue sphärische Mannigfaltigkeiten in endlicher Anzahl, welche sich weder untereinander noch mit den gegebenen schneiden oder berühren, den ursprünglichen Bereich so zerlegen kann, daß jeder Theil nur von 3 Sphären begrenzt wird.

2) Für $n = 3$ läßt sich zunächst das gleiche nur unter den engeren Bedingungen erweisen, daß die Cosinus der imaginären Winkel,

Digitized by Google

unter welchen sich die m gegebenen Kugeln schneiden sämmtlich größer sind als $(m-1)^2$, so daß die obige Formel für $m = 2$ immer gilt. Ferner kann der Beweis auch geführt werden, wenn die Summe der Radien der Kugeln kleiner ist als der kleinste Abstand jedes Kugelcentrium von der Oberfläche der andern Kugeln.

Jeder dieser Fälle kann bei gegebenen Radien erreicht werden, und es kann dabei noch vorgeschrieben werden, daß die Figur der Kugelmittelpunkte einer gegebenen ähnlich sein soll.

Für $n = 2$, also das logarithmische Potential ist die Aufgabe unter den weiteren Bedingungen, welche unter 1) aufgezählt sind, bereits von Schottky l. c. erledigt.

Innsbruck, 8./X. 1897.

Digitized by Google

Ueber die Bestimmung der Discriminante eines algebraischen Körpers.

Von

K. Hensel.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung am 30. October 1897.

I.

In einem auf der diesjährigen Naturforscherversammlung in Braunschweig gehaltenen Vortrage habe ich die Grundlagen einer neuen Theorie der algebraischen Zahlen auseinandergesetzt. Die Resultate jenes Vortrages können in den folgenden Sätzen ausgesprochen werden:

Ist $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ eine beliebige ganze ganzzahlige Function von x und p irgend eine Primzahl, so besitzt die Congruenz:

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^\nu} \tag{1}$$

für jede noch so hohe Potenz von p stets genau n Congruenzwurzeln, welche analog den algebraischen Functionen einer Variabeln, in Potenzreihen entwickelt werden können, die im Allgemeinen nach ganzzahligen Potenzen von p fortschreiten. So gehören zu jeder Primzahl p im Allgemeinen genau n Stellen des durch $f(x) = 0$ definirten algebraischen Gebildes, nämlich die n Congruenzwurzeln der aus jener Gleichung hervorgehenden Congruenz (1), und diese Stellen mögen kurz durch:

$$(A^{(1)}, p),\ (A^{(2)}, p),\ \ldots\ (A^{(n)}, p)$$

bezeichnet werden, wenn $A^{(1)} \ldots A^{(n)}$ die Anfangsglieder jener n Entwickelungen sind.

Eine Stelle (A, p) heißt regulär, wenn für sie, wie oben angenommen wurde, die Entwickelung der zugehörigen Wurzel

Digitized by Google

nach ganzzahligen Potenzen von p fortschreitet, sie heißt eine singuläre oder Verzweigungsstelle, wenn jene Entwickelung gebrochene Potenzen von p enthält, und zwar soll sie eine Verzweigungsstelle der $(d-1)^{\text{ten}}$ Ordnung genannt werden, wenn die betreffende Congruenzwurzel nach ganzzahligen Potenzen von $p^{\frac{1}{d}}$ entwickelt werden kann; (nach dieser Definition können dann die regulären Stellen auch als Verzweigungsstellen nullter Ordnung bezeichnet werden). Hiernach erhält man für eine jede Stelle (A_0, p) des algebraischen Gebildes eine Entwickelung

$$x = A_0 + A_1\pi + A_2\pi^2 + \cdots, \tag{2}$$

in welcher für alle regulären Stellen $\pi = p$ ist, während für eine Verzweigungsstelle $(d-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\pi = \omega.\sqrt[d]{p}$$

zu setzen ist, wo ω eine geeignete Einheit modulo p bedeutet.

Zu jeder Verzweigungsstelle $(d-1)^{\text{ter}}$ Ordnung (A_0, p) gehören genau d conjugirte Entwickelungen, welche aus der in (2) gegebenen dadurch hervorgehen, daß man die Zahl π durch ihre d conjugirten Werthe $\pi, \pi_1, \pi_2, \ldots \pi_{d-1}$ ersetzt; diese d Wurzeln hängen demnach in genau derselben Weise in einem Cyclus zusammen, wie die d Zweige einer algebraischen Function in der Umgebung eines Verzweigungspunktes $(d-1)^{\text{ter}}$ Ordnung: auch hier soll daher (A_0, p) nur als eine Stelle angesehen werden, in deren Umgebung jene d in einem Cyclus verbundenen Entwickelungen vorhanden sind.

Für eine jede (reguläre oder singuläre) Stelle (A_0, p) sind die Entwickelungscoefficienten $A_0, A_1, \ldots$ ganze algebraische Zahlen von der Form

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{\varkappa-1}\alpha^{\varkappa-1},$$

in welcher die Coefficienten a_i der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ angehören, und α eine der $\varkappa$ Wurzeln einer irreductiblen ganzzahligen Gleichung:

$$\varphi(\alpha) = \alpha^{\varkappa} + b_1\alpha^{\varkappa-1} + \cdots + b_{\varkappa} = 0, \tag{3}$$

bedeutet, welche auch als Congruenz modulo p betrachtet, irreductibel bleibt. Zu jeder solchen Stelle (A_0, p) einer beliebigen $(d-1)^{\text{ten}}$ Ordnung gehören dann genau $\varkappa$ verbundene Stellen derselben Ordnung, (A_0, p), (A_0', p), $\ldots$ $(A_0^{(\varkappa-1)}, p)$, deren zugehörige Entwickelungen dadurch aus der in (2) gegebenen hervorgehen, daß man in ihr alle Coefficienten $A_i(\alpha)$ durch ihre conjugirten

Digitized by Google

Werthe:

$$A_i(\alpha),\ A_i(\alpha_1),\ \ldots\ A_i(\alpha_{\varkappa-1})$$

ersetzt. Eine Stelle (A, p) besitzt den Grad $\varkappa$, wenn die Entwickelungscoefficienten $A_i(\alpha)$ algebraische Zahlen $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades sind, wenn also zu dieser Stelle $\varkappa$ verbundene Stellen

$$(A(\alpha), p),\ (A(\alpha_1), p),\ \ldots\ (A(\alpha_{\varkappa-1}), p)$$

gehören.

Ist (A_0, p) eine Verzweigungsstelle $(d-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so genügen die d conjugirten d^{ten} Wurzeln aus p: $\pi, \pi_1, \pi_2, \ldots \pi_{d-1}$ im Allgemeinen einer reinen Gleichung:

$$\psi(\pi) = \pi^d - \varepsilon p = 0, \tag{4}$$

wo ε eine durch p nicht theilbare Zahl des zu der Stelle (A_0, p) gehörigen Körpers $K(\alpha)$ ist. Ist dagegen d durch die Primzahl p theilbar, so kann jene Gleichung (4) die allgemeine Form haben:

$$\psi(\pi) = \pi^d + p\varepsilon_{d-1}\pi^{d-1} + p\varepsilon_{d-2}\pi^{d-2} + \cdots + p\varepsilon_0 = 0, \tag{4a}$$

deren Coefficienten ε_i ebenfalls zu $K(\alpha)$ gehören, und in welcher ε_0 p nicht mehr enthält. Je nachdem die Verzweigungszahlen $\pi, \pi_1, \ldots \pi_{d-1}$ einer reinen Verzweigungsgleichung (4) oder einer gemischten Verzweigungsgleichung (4a) genügt, soll die Stelle (A_0, p) eine Verzweigungsstelle erster oder zweiter Art genannt werden.

Ist x durch die Gleichung $f(x) = 0$ definirt, so können alle rationalen ganzzahligen Functionen X von x in der Umgebung einer jeden Stelle (A_0, p) in genau derselben Weise wie x selbst in Potenzreihen (2) entwickelt werden, und jede solche Entwickelung kann höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von π enthalten. Die nicht verbundenen Stellen $(A_0, p), \ldots, (B_0, q), (C_0, r), \ldots$ jenes Gebildes sind hierbei in der Weise von einander unabhängig, daß man stets eine Function X finden kann, deren Entwickelungen für eine beliebige Anzahl solcher Stellen bis zu einem beliebig hohen Gliede hin gegebene Coefficienten haben.

II.

Die hier kurz auseinandergesetzte Theorie der algebraischen Zahlen will ich nun auf eine Aufgabe anwenden, welche seit etwa 25 Jahren von immer neuen Gesichtspunkten aus behandelt, aber noch nicht vollständig gelöst worden war. Man kann nämlich leicht zeigen, daß in dem vorher betrachteten algebraischen Gebilde zu allen den und nur zu denjenigen Primzahlen p, welche in der

Digitized by Google

Discriminante D des zugehörigen Körpers enthalten sind, mindestens eine Verzweigungsstelle (A_0, p) gehören muß; und Herr Dedekind hat in seiner schönen Abhandlung „Ueber die Discriminanten endlicher Körper" einen Satz über die Zusammensetzung jener Discriminante bewiesen, welcher unter Benutzung der hier angewendeten Bezeichnungen folgendermaßen ausgesprochen werden kann:

> Gehören zu der Primzahl p genau r (verbundene oder unverbundene) Stellen des algebraischen Gebildes, so ist die Körperdiscriminante D durch p^{n-r} und durch keine höhere Potenz von p theilbar.

Hieraus folgt zunächst, daß D überhaupt nur dann p enthält, wenn mindestens eine der zu p gehörigen Stellen eine singuläre ist, da anderenfalls $r = n$ ist. Dieser Satz gilt aber, wie auch schon Herr Dedekind selbst hervorgehoben hat, nur in dem Falle, daß für keinen der zu p gehörigen conjugirten Verzweigungsstellen die Anzahl d der dort vorhandenen Entwickelungen durch p theilbar ist[1]); alsdann ist nämlich die in D enthaltene Potenz von p stets größer als p^{n-r}, aber die bisherigen Methoden für die genaue Bestimmung jener Potenz versagten in diesem Falle. Im Folgenden will ich einen allgemein gültigen Satz über die Zusammensetzung jener Discriminante D ableiten, welcher das Dedekindsche Resultat als speciellen Fall enthält.

Zu diesem Zwecke nehme ich, um den Nerv der Betrachtung deutlicher hervortreten zu lassen, zunächst an, daß die der Primzahl p entsprechenden r Verzweigungsstellen V_d, V_e, ... bzw. von der $(d-1)^{\text{ten}}$, $(e-1)^{\text{ten}}$, ... Ordnung alle vom Grade Eins, also unabhängig von einander sind, oder, was dasselbe ist, daß unter ihnen keine zwei verbundenen vorkommen. Es seien ferner:

$$x_1, x_2, \ldots x_d; \quad x_1', x_2', \ldots x_e'; \quad \ldots$$

die zu jenen Stellen gehörigen conjugirten Entwickelungen der Wurzeln von $f(x)$ in der Umgebung von V_d, V_e, ... Dann ist:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \cdots \\ x_1' = b_0 + b_1\varrho + b_2\varrho^2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

1) Vgl. aber für diesen allgemeinsten Fall die Arbeit des Herrn Hilbert Grundzüge einer Theorie der Galois'schen Zahlkörper, Gött. Nachr. v. J. 1894, No. 3, besonders die Schlußbemerkungen auf S. 236; ferner für den speciellen Fall der reinen Gleichungen G. Landsberg, Ueber das Fundamentalsystem und die Discriminante der Gattungen algebraischer Zahlen, welche aus Wurzelgrößen gebildet sind, Crelles Journal Bd. 117, S. 140–147.

Digitized by Google

wo die Coefficienten $a, b, \ldots$ Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ sind, und die Verzweigungszahlen $\pi, \varrho, \ldots$ abgesehen von Einheiten bzw. gleich $\sqrt[d]{p}, \sqrt[e]{p}, \ldots$ sind, welche den ganzzahligen Verzweigungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \psi(\pi) &= \pi^d + p\varepsilon_{d-1}\pi^{d-1} + \cdots + p\varepsilon_0 = 0 \\ \chi(\varrho) &= \varrho^e + p\zeta_{e-1}\varrho^{e-1} + \cdots + p\zeta_0 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

genügen. Man erhält endlich z. B. die zu x_1 conjugirten Entwickelungen $x_2, \ldots x_d$, wenn man in (1) π durch seine d conjugirten Werthe $\pi_1, \ldots \pi_{d-1}$ ersetzt.

Da die Verzweigungsstellen $V_d, V_e, \ldots$ von einander unabhängig sind, so kann man zunächst d rationale Functionen von x so auswählen, daß ihre Entwickelungen in der Umgebung der Stelle (x_1, p) für eine beliebig hohe Potenz p^M von p bzw. congruent

$$1, \pi, \pi^2, \ldots \pi^{d-1}$$

sind, während ihre Entwickelungen in der Umgebung jeder der $(r-e)$ übrigen Stellen $V_e, \ldots$ durch p^M theilbar sein sollen. In derselben Weise wähle man e Functionen so aus, daß sie in der Umgebung von (x_1', p) bzw. congruent

$$1, \varrho, \varrho^2, \ldots \varrho^{e-1},$$

für alle anderen Stellen aber durch p^M theilbar werden u. s. w. Die $d+e+\cdots = n$ so bestimmten Zahlen bilden dann, wie man leicht einsieht ein Fundamentalsystem in Bezug auf p für den Körper $K(x)$, also ist das Quadrat der aus den Entwickelungen jener n Zahlen in der Umgebung von $V_d, V_e, \ldots$ gebildeten Determinante, modulo p^M betrachtet, congruent der Körperdiscriminante D. Jene Determinante nimmt aber bei der hier getroffenen Wahl der n Zahlen offenbar die einfache Form an:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi & \pi^2 & \ldots & \pi^{d-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \cdot \\ 1 & \pi_1 & \pi_1^2 & \ldots & \pi_1^{d-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \cdot \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & \cdot \\ 1 & \pi_{d-1} & \pi_{d-1}^2 & \ldots & \pi_{d-1}^{d-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \varrho & \ldots & \varrho^{e-1} & \cdot \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \varrho_{e-1} & \ldots & \varrho_{e-1}^{e-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

ihr Quadrat ist also gleich dem Producte der zu den einzelnen

Digitized by Google

Verzweigungsgleichungen

$$\psi(\pi) = 0, \quad \chi(\varrho) = 0, \quad \ldots$$

gehörigen Gleichungsdiscriminanten. Man erhält also den oben angekündigten allgemeinen Satz:

> Eine Primzahl p ist in der Körperdiscriminante D genau so oft enthalten als in dem Producte der r Verzweigungsdiscriminanten, welche den zu p gehörigen Verzweigungsstellen $V_d, V_e, \ldots$ entsprechen.

Wörtlich derselbe Satz gilt auch dann, wenn z. B. der Grad von V_d größer als Eins ist, wenn also zu V_d etwa $\varkappa$ verbundene Stellen $V_d, V_d', \ldots V_d^{(\varkappa-1)}$ gehören. Zu jeder dieser $\varkappa$ Stellen gehört aber dann dieselbe Verzweigungsdiscriminante $\Delta(\pi)$; das auf sie bezügliche Product kann also durch $\Delta(\pi)^\varkappa$ ersetzt werden. Der auf denselben Prinzipien beruhende ebenso einfache Beweis dieses Satzes soll an einer anderen Stelle gegeben werden.

Aus diesem Satze folgt nun, falls $d, e, \ldots$ keine Multipla von p sind, unmittelbar das Theorem des Herrn Dedekind; alsdann ist nämlich z. B. für V_d:

$$\psi(\pi) = \pi^d - \varepsilon p, \quad \psi'(\pi) = d\pi^{d-1}$$
$$\Delta(\pi) = N.\psi'(\pi) = d^d.p^{d-1},$$

d. h. die r Verzweigungsdiscriminanten $\Delta(\pi)$, $\Delta(\varrho)$, ... sind bezw. durch $p^{d-1}, p^{e-1}, \ldots$ theilbar, ihr Product enthält also genau die Potenz

$$p^{(d-1)+(e-1)+\cdots} = p^{n-r}.$$

Ist dagegen z. B. d ein Multiplum von p, so besitzt die Verzweigungsgleichung die allgemeinere Form:

$$\psi(\pi) = \pi^d + \cdots + p\varepsilon_i\pi^i + \cdots + p\varepsilon_0$$

also ist:

$$\psi'(\pi) = d\pi^{d-1} + \cdots + pi\varepsilon_i\pi^{i-1} + \cdots,$$

und hier ist jeder Coefficient mindestens durch p, $\Delta(\pi)$ also mindestens durch p^d theilbar. Ersetzt man aber in $\psi'(\pi)$ π für den Augenblick durch $\omega\sqrt[d]{p}$, so erkennt man, daß hier jedes Glied eine verschiedene gebrochene Potenz von p enthält, so daß sich nicht etwa zwei Summanden vernichten können. Ist also etwa $pi\varepsilon_i$ derjenige Coefficient in $\psi'(\pi)$, welcher die niedrigste Potenz p^{δ_i} von p enthält, wo δ_i eine positive ganze Zahl bedeutet, und für welche i den kleinsten Werth besitzt, so ist hier:

$$\Delta(\pi) = N(pi\varepsilon_i\pi^{i-1}) = p^{d\delta_i + i - 1},$$

Digitized by Google

und jeder dieser Fälle kann wirklich vorkommen, wie die Betrachtung einfacher Beispiele lehrt. Die höchste Potenz von p, welche in einer Verzweigungsdiscriminante enthalten sein kann, ergiebt sich, wenn in $\psi'(\pi)$ das erste Glied $d\pi^{d-1}$ zugleich das niedrigste ist, und dieser Fall tritt dann ein, wenn V_d ein Verzweigungspunkt erster Art ist. Alsdann ist $\Delta(\pi) = d^d p^{d-1}$. Ist p^{e-1} die höchste in d enthaltene Potenz von p, so ist also in diesem äußersten Falle $\Delta(\pi)$ genau durch

$$p^{(s-1)d+d-1} = p^{sd-1}$$

theilbar. Es besteht daher der Satz:

> Ist die Ordnung d einer Verzweigungsstelle genau durch die $(s-1)^{te}$ Potenz von p theilbar, so ist die zugehörige Verzweigungsdiscriminante durch eine ganzzahlige Potenz von p theilbar, deren Exponent zwischen
>
> $$d-1 \quad \text{und} \quad sd-1$$
>
> (beide Grenzen eingeschlossen) liegt. Die untere Grenze wird allein für $s = 1$, die obere wird z. B. dann erreicht, wenn jene Verzweigungsstelle von der ersten Art ist.

In diesem letzten Satze liegt zugleich die Bestätigung und der Beweis einer Vermuthung, welche Herr Dedekind am Schlusse seiner bereits erwähnten Arbeit ausgesprochen hat.

Digitized by Google

Ueber die Fundamentalgleichung und die außerwesentlichen Discriminantentheiler eines algebraischen Körpers.

Von

K. Hensel.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung am 30. October 1897.

I.

In einer der Königlichen Societät kürzlich vorgelegten Arbeit habe ich eine neue Theorie der algebraischen Zahlen auseinandergesetzt und diese zur vollständigen Bestimmung der Discriminante eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers benützt, eine Aufgabe, welche bisher nur unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen über die Natur jenes Körpers gelöst worden war. Zu einer zweiten Anwendung jener Principien, welche den Gegenstand der vorliegenden Mittheilung bildet, führen die folgenden Betrachtungen:

Ist $K(x_1)$ ein beliebiger algebraischer Körper n^{ter} Ordnung, bedeutet ferner $(x_{11}, x_{12}, \dots x_{1n})$ ein Fundamentalsystem für alle ganzen Zahlen desselben, und bildet man mit den n unbestimmten Coefficienten $u_1, u_2, \dots u_n$ die lineare Fundamentalform

$$w_1 = u_1 x_{11} + u_2 x_{12} + \cdots + u_n x_{1n}$$

nebst ihren n conjugirten $w_1, w_2, \dots w_n$, wo allgemein

$$w_i = u_1 x_{i1} + u_2 x_{i2} + \cdots + u_n x_{in} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

aus dem conjugirten Fundamentalsysteme für den Körper $K(x_i)$ gebildet ist, so stellen diese für alle ganzzahligen Werthe der Unbestimmten alle und nur die ganzen Zahlen von $K(x_1)$ nebst ihren conjugirten dar; und die Fundamentalgleichung

$$F(w, u_1, \dots u_n) = (w - w_1)(w - w_2) \dots (w - w_n) = 0,$$

Digitized by Google

deren Wurzeln jene n Formen sind, ergiebt durch die gleiche Specialisirung alle Gleichungen von $K(x_1)$. Man zeigt nun sehr leicht, daß die Discriminante jener Fundamentalgleichung:

$$\Delta(u_1, u_2, \dots u_n) = \prod_{i \gtrless \varkappa} (w_i - w_\varkappa)$$

für unbestimmte $u_1, \dots u_n$ die Körperdiscriminante

$$D = |x_{i\varkappa}|^2 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$$

als Zahlenfactor enthält; viel schwerer aber war der Nachweis, daß jene Form Δ außer D keinen einzigen Zahlenfactor mehr besitzen kann. Es gelang nun Kronecker, diesen Beweis für fast alle Fälle wirklich zu führen. Ist nämlich p eine reelle Primzahl, und

$$p \sim \mathfrak{p}_1^{d_1} \mathfrak{p}_2^{d_2} \dots \mathfrak{p}_h^{d_h}$$

ihre Zerlegung in ideale Primfactoren innerhalb $K(x_1)$ so zeigte er in seiner Festschrift (§ 25) daß jene Gleichungsdiscriminante außer D höchstens noch solche Zahlenfactoren enthalten könnte, für welche mindestens einer jener Exponenten $d_1, \dots d_h$ durch p theilbar ist. Ich habe später einen verhältnißmäßig einfachen anderen Beweis für diesen Satz gegeben, welcher diese Ausnahmefälle mit umfaßt; ich will jetzt aber zeigen, wie sehr viel einfacher der vollständige Beweis mit Hülfe der in der vorigen Notiz auseinandergesetzten Principien geführt werden kann, da diese es gestatten, anstatt des vollständigen symmetrischen Productes

$$\prod_{i \gtrless \varkappa} (w_i - w_\varkappa)$$

jeden einzelnen seiner Factoren $w_1 - w_2$, $w_1 - w_3$, ... für sich zu betrachten.

Will man die Discriminante der Fundamentalgleichung auf ihre Theilbarkeit durch eine beliebige Primzahl p untersuchen, so kann man jene n conjugirten Fundamentalformen w_i durch ihre Entwickelungen in der Umgebung der zu p gehörigen Stellen des algebraischen Gebildes ersetzen. Man kann nun aber jene n Entwickelungen auch ganz direct auf dem folgenden Wege finden:

Es seien $V_a, V_e, \dots$ die von einander unabhängigen Stellen, welche zu der betrachteten Primzahl p gehören; sind dann $w, \overline{w}, \dots$ je einer der Zweige einer ganzen algebraischen Zahl bzw. in der Umgebung von $V_a, V_e, \dots$, so gelten für sie die folgenden Entwickelungen:

Digitized by Google

$$(1)\qquad \begin{cases} w = U_0+U_1\pi+U_2\pi^2+\cdots \\ \overline{w} = V_0+V_1\varrho+V_2\varrho^2+\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ist speciell V_d eine Verzweigungsstelle $(d-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so sind die d zu w conjugirten Entwickelungen die folgenden:

$$(1a)\qquad \begin{cases} w = U_0+U_1\pi+U_2\pi^2+\cdots \\ w_1 = U_0+U_1\pi_1+U_2\pi_1^2+\cdots \\ \vdots \\ w_{d-1} = U_0+U_1\pi_{d-1}+U_2\pi_{d-1}^2+\cdots, \end{cases}$$

wo $\pi, \pi_1, \ldots \pi_{d-1}$ die zu π conjugirten d^{ten} Wurzeln aus p bedeuten. Ist endlich V_d vom Grade $\varkappa$, gehören also zu V_d $\varkappa$ verbundene Verzweigungspunkte $(d-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $V_d, V_d', \ldots V_d^{(\varkappa-1)}$, so ist jeder dieser Coefficienten U_λ eine ganze algebraische Zahl $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades von der Form:

$$U_\lambda = u_{\lambda 0}+u_{\lambda 1}\alpha+\cdots+u_{\lambda,\varkappa-1}\alpha^{\varkappa-1},$$

und aus (1a) erhält man allgemein die d zu $V_d^{(\varrho)}$ gehörigen Entwickelungen:

$$(1b)\qquad \begin{cases} w^{(\varrho)} = U_0^{(\varrho)}+U_1^{(\varrho)}\pi+U_2^{(\varrho)}\pi^2+\cdots \\ \vdots \\ w_{d-1}^{(\varrho)} = U_0^{(\varrho)}+U_1^{(\varrho)}\pi_{d-1}+U_2^{(\varrho)}\pi_{d-1}^2+\cdots, \end{cases}$$

indem man dort in allen Coefficienten $U_\lambda(\alpha)$ α durch die conjugirte Zahl α_ϱ ersetzt.

Ebenso wie sich aus der ersten Entwickelung w in (1) die $\varkappa d$ zu ihr conjugirten bzw. mit ihr verbundenen in (1a) und (1b) ergaben, kann man aus der zweiten $\overline{w}$ für V_ε ihre e conjugirten und die λe mit ihr verbundenen Entwickelungen herleiten, u. s. w., und da die Stellen $V_d, V_\varepsilon, \ldots$ völlig unabhängig von einander sind, so kann man die Coefficienten $u_{\alpha\beta}$ der $U_0, U_1, \ldots$, die Coefficienten $v_{\gamma\vartheta}$ der $V_0, V_1, \ldots$ etc., als ganz beliebige Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ annehmen; immer kann man nämlich ganze algebraische Zahlen finden, deren Entwickelungen bis zu beliebig hohen Potenzen von $\pi, \varrho, \ldots$ gerade diese Zahlcoefficienten haben, und umgekehrt ist jede ganze Zahl in dieser Weise in der Umgebung von $V_d, V_\varepsilon, \ldots$ darstellbar. Man kann daher jene $\varkappa d+\lambda e+\cdots = n$ Entwickelungen $w_\lambda^{(\varrho)}, \overline{w}_\lambda^{(\varrho')}, \ldots$ für unbestimmte Coefficienten $u_{\alpha\beta}, v_{\gamma\vartheta}, \ldots$ für die n conjugirten Fundamentalformen $w_1, \ldots w_n$ wählen; thut man dies, so ergiebt sich mit größter Leichtigkeit die Potenz von p, welche in ihrem Differenzenproducte enthalten ist.

Digitized by Google

Zu diesem Zwecke betrachte ich zunächst alle diejenigen Differenzen $w-w'$, in welchen w die in (1) gegebene Entwickelung in der Umgebung von V_d und w' irgend eine der $(n-1)$ übrigen Entwickelungen bedeutet. Dann erkennt man sofort, daß jene Differenz dann und nur dann durch eine Potenz von p theilbar ist, wenn w' eine der $d-1$ zu w conjugirten Entwickelungen (1a) in der Umgebung derselben Verzweigungstelle V_d ist, also zu keiner der Stellen $V_{d'}, \ldots V_{d^{(n-1)}}, V_e, \ldots$ gehört. Gehört nämlich w' etwa zu V_e so ist

$$w-w' = (U_0-V_0)+\pi U_1-\varrho V_1+\cdots$$

durch p nicht theilbar, weil das Anfangsglied für unbestimmte u, v p nicht enthält, und dasselbe ist der Fall, wenn etwa $w' = w^{(\varphi)}$ zu einem der mit V_d verbundenen Verzweigungspunkte $V_{d^{(\varphi)}}$ gehört, da:

$$w-w^{(\varphi)} = (U_0-U_0^{(\varphi)})+\cdots$$

ist, und

$$U_0-U_0^{(\varphi)} = u_{01}(\alpha-\alpha^{(\varphi)})+\cdots$$

für unbestimmte $u_{0\alpha}$ p nicht enthält. Ist dagegen etwa $w' = w_\lambda$ ein zu w conjugirter Zweig, so enthält die Differenz

$$w-w_\lambda = (\pi-\pi_\lambda)(U_1+U_2(\pi+\pi_\lambda)+\cdots)$$

genau die Differenz $\pi-\pi_\lambda$ als Divisor. Bildet man also das Product aller Differenzen in deren Minuenden statt w die d Entwickelungen $w, w_1, \ldots w_{d-1}$ gesetzt sind, während w' jedesmal alle $n-1$ übrigen Entwickelungen außer w bedeutet, so ist dasselbe genau durch das Product:

$$\prod_{\alpha \gtrless \beta}\prod\prod(\pi_\alpha-\pi_\beta) = \Delta(\pi)$$

d. h. durch die zu V_d gehörige Verzweigungsdiscriminante theilbar. Entsprechend zeigt man, daß das vollständige Differenzenproduct genau durch das Product aller zu

$$V_d, V_{d'}, \ldots V_{d^{(n-1)}};\quad V_e, V_{e'}, \ldots V_{e^{(\lambda-1)}}, \quad \ldots$$

gehörigen Verzweigungsdiscriminanten, also genau durch das Product

$$\Delta(\pi)^\varkappa \Delta(\varrho)^\lambda \ldots$$

theilbar ist; und da dieses nach dem in der vorigen Notiz bewiesenen Satze gleich der Körperdiscriminante D ist, so ist der Satz von der Aequivalenz der Discriminante der Fundamentalgleichung und der Körperdiscriminante hierdurch für jede Primzahl p, also vollständig bewiesen, d. h. es besteht für alle Körper

Digitized by Google

die Gleichung:

$$(2) \qquad \Delta(u_{\alpha\beta}, v_{\gamma\delta}, \ldots) = D.E(u_{\alpha\beta}, v_{\gamma\delta}, \ldots),$$

wo $E(u_{\alpha\beta}, v_{\gamma\delta}, \ldots)$ eine ganze ganzzahlige Form der Unbestimmten $u_{\alpha\beta}, v_{\gamma\delta}, \ldots$ ohne jeden Zahlentheiler bedeutet.

II.

Das soeben gefundene Resultat soll jetzt noch zur Lösung der folgenden Aufgabe benützt werden: Legt man in der letzten Gleichung des vorigen Abschnittes den Unbestimmten $u_{\alpha\beta}, v_{\gamma\delta}, \ldots$ unabhängig von einander alle Zahlenwerthe der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ bei, so erhält man für $\Delta(u_{\alpha\beta}, v_{\gamma\delta}, \ldots)$ der Reihe nach die Gleichungsdiscriminanten aller ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $K(x_1)$, und jene Gleichung lehrt, daß sie alle jede Primzahl p mindestens ebenso oft als die Körperdiscriminante D enthalten. Es liegt nun sehr nahe anzunehmen, daß man stets auch Zahlen jenes Körpers finden kann, deren Discriminante eine gegebene Primzahl p genau ebenso oft enthalten, als D, denn zu diesem Zwecke brauchte man ja nur den Unbestimmten $u_{\alpha\beta}, v_{\gamma\delta}, \ldots$ solche ganzzahlige Werthe beizulegen, daß die primitive Form

$$E(u_{\alpha\beta}, v_{\gamma\delta}, \ldots)$$

auf der rechten Seite von (2) durch p nicht theilbar ist.

Herr Dedekind hat nun zuerst auf den merkwürdigen Umstand aufmerksam gemacht, daß dies nicht immer der Fall zu sein braucht[1]), daß vielmehr unter gewissen Bedingungen alle Gleichungsdiscriminanten eine bestimmte Primzahl öfter als die Körperdiscriminante D enthalten können. Ich habe dann in meiner Doctordissertation und später in einer im 113. Bande des Crelleschen Journales veröffentlichten Arbeit mit Hülfe der Theorie der Ideale die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben, daß eine Primzahl p ein solcher „gemeinsamer außerwesentlicher Theiler" aller Gleichungsdiscriminanten eines gegebenen Körpers ist. Ich will jetzt unter Benutzung der oben entwickelten neuen Auffassung der Theorie der algebraischen Zahlen einen sehr viel einfacheren Beweis jenes Satzes angeben.

Soll nämlich die aus den n conjugirten Entwickelungen $w_\varrho^{(\lambda)}, \overline{w}_\varrho^{(\lambda')}, \ldots$ gebildete Discriminante keine höhere als die in

$$D = \Delta(\pi)^\varkappa . \Delta(\varrho)^\lambda \ldots$$

1) Vgl. Göttingische gelehrte Anzeigen vom 20. Sept. 1871 und „Ueber den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Congruenzen" Abh. d. Ges. d. Wiss, zu Göttingen, Bd. 23, § 5.

Digitized by Google

enthaltene Potenz von p enthalten, so müssen für die Coefficienten $u_{\alpha\beta}$, $v_{\gamma\delta}$, ... jener Entwickelungen nur solche Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ gesetzt werden, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Die Anfangsglieder $U_0, U_0', \ldots U_0^{(\varkappa-1)}$; $V_0, V_0', \ldots V_0^{(\lambda-1)}$; ... aller Entwickelungen für die von einander verschiedenen zu p gehörigen Stellen müssen modulo p von einander verschieden sein, denn dann und nur dann ist keine der Differenzen $w-w'$ durch eine Potenz von p theilbar, wenn w und w' verschiedenen Verzweigungsstellen angehören.

2) Die auf diese folgenden Glieder $U_1, U_1', \ldots$; $V_1, V_1', \ldots$; ... müssen alle von Null verschieden sein, denn dann und nur dann ist jede Differenz, z. B. $w_i - w_x$ genau durch die entsprechende $(\pi_i - \pi_x)$ theilbar wenn beide Entwickelungen zu derselben Verzweigungstelle (hier zu V_d) gehören.

Der zweiten Bedingung kann immer z. B. dadurch genügt werden, daß man alle jene Coefficienten $U_1 = V_1 = \cdots = 1$ annimmt. Die erste Bedingung erfordert zunächst, daß die Gleichungen der Grade $\varkappa, \lambda, \ldots$ denen die Anfangsglieder $U_0, V_0, \ldots$ genügen, modulo p betrachtet irreductibel sind, denn dann und nur dann sind ja z. B. die $\varkappa$ zu U_0 conjugirten Zahlen $U_0, U_0', \ldots U_0^{(\varkappa-1)}$ modulo p verschieden. Auch diesen Bedingungen kann stets genügt werden; in der That ist ja bekanntlich die Anzahl $\bar{g}(\varkappa)$ aller algebraischen Zahlen:

$$U_0 = u_0 + u_1\alpha + \cdots + u_{\varkappa-1}\alpha^{\varkappa-1} \qquad (u_i = 0, 1, \ldots p-1),$$

welche einer modulo p irreductiblen Congruenz des $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades genügen, durch den Ausdruck gegeben:

$$\bar{g}(\varkappa) = \frac{1}{\varkappa}\left(p^{\varkappa} - \sum p^{\frac{\varkappa}{q}} + \sum p^{\frac{\varkappa}{qq'}} - \cdots\right),$$

in welchem sich die Summationen rechts auf alle Primtheiler $q, q', \ldots$ von $\varkappa$ beziehen, und da jene ganze Zahl für jeden Werth von $\varkappa$ positiv ist, so können die Zahlen $U_0, V_0, \ldots$ in der That so gewählt werden, daß jede einzelne von ihnen z. B. U_0 von allen ihren conjugirten $U_0', \ldots U_0^{(\varkappa-1)}$ verschieden ist.

Dagegen ist es nicht immer möglich, der weiteren Bedingung zu genügen, daß auch die unabhängigen Anfangsglieder $U_0, V_0, \ldots$ sämmtlich von einander verschieden sind. Um dies zu zeigen, fassen wir die zu p gehörigen unabhängigen Stellen gleichen Grades zusammen; es sei also allgemein $\lambda_\varkappa$ die Anzahl aller jener Stellen vom Grade $\varkappa$. Sind dann:

Digitized by Google

$$U_0^{(1)}, U_0^{(2)}, \ldots U_0^{(\lambda_\varkappa)}$$

die Anfangsglieder der zugehörigen Entwickelungen mit unbestimmten Coefficienten, so ist allgemein:

$$U_0^{(\alpha)} = u_0^{(\alpha)} + u_1^{(\alpha)} \alpha + \cdots + u_{\varkappa-1}^{(\alpha)} \alpha^{\varkappa-1},$$

und jene Coefficienten sind nun so zu wählen, daß die $\lambda_\varkappa$ Zahlen $U_0^{(\alpha)}$ sämmtlich von einander verschieden, und sämmtlich modulo p vom Grade $\varkappa$ sind. Da aber die Anzahl aller Zahlen des Grades $\varkappa$ gleich der oben bestimmten Zahl $\bar{g}(\varkappa)$ ist, so kann dieser letzten Bedingung und damit der ganzen Aufgabe dann und nur dann genügt werden, wenn $\lambda_\varkappa \leqq \bar{g}(\varkappa)$ ist, und man erhält so auf dieser Grundlage einen völlig elementaren Beweis des Satzes, durch welchen die Frage der außerwesentlichen Discriminantentheiler vollständig gelöst wird:

Eine Primzahl p ist dann und nur dann gemeinsamer außerwesentlicher Theiler aller Gleichungsdiscriminanten eines beliebigen Körpers $K(x_1)$, wenn von den Bedingungen:

$$\lambda_\varkappa > \frac{1}{\varkappa}\left(p^\varkappa - \sum_q p^{\frac{\varkappa}{q}} + \sum_{q,q'} p^{\frac{\varkappa}{qq'}} - \cdots\right)$$

mindestens eine erfüllt ist. Hier bedeutet allgemein $\lambda_\varkappa$ die Anzahl aller zu p gehörigen unabhängigen Stellen des $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades.

Digitized by Google

Weiteres zur kinetischen Theorie des Verdampfungsprocesses.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 13. November 1897.

In zwei früheren Arbeiten[1]) habe ich mich bemüht, die Clausius'sche Vorstellung über den Proceß der Verdampfung durch die Rechnung zu verfolgen. Nach dieser Vorstellung können nur Moleküle mit einer Geschwindigkeit, deren Komponente normal zur Grenzfläche Flüssigkeit — Dampf einen gewissen Grenzwerth c überschreitet, die Flüssigkeit verlassen; dadurch, daß sie austreten, gehen der Flüssigkeit die schnellsten Theile verloren, und ihre Temperatur muß sinken. Ist ein Gleichgewichtszustand zwischen der Flüssigkeit und dem entwickelten Dampf vorhanden, so muß der andauernd zwischen beiden Theilen stattfindende kinetische Austausch die beiderseitig vorhandenen Massen und Energien ungeändert erhalten.

Bei dieser Entwickelung hatte ich zunächst der Einfachheit halber von der Berücksichtigung der Stöße zwischen den Molekülen abgesehen; damit wurden diese selbst aber nicht vollständig ausgeschlossen, es waren immerhin solche Stöße zugelassen, welche den mittleren Vorgang nicht verändern.

Denkt man sich, wie vielfach geschehen, die Moleküle als harte Kugeln und demgemäß ihre Stöße in unmerklicher Zeit verlaufend, ihre Bewegungen also aus geradlinigen, mit constanten Geschwindigkeiten zurückgelegten Theilen bestehend, so läßt sich

1) W. Voigt, Nachr. v. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1896, No. 4, 1897, No. 1.

Digitized by Google

zeigen, daß die Anzahl der gegen die Grenze zwischen Flüssigkeit und Dampf fahrenden Theilchen durch diese Stöße nicht geändert wird. Die Vernachlässigung der Stoßwirkung kommt demgemäß nur auf die Hypothese hinaus, daß in der Uebergangsschicht zwischen Dampf und Flüssigkeit die Stöße in der Art stattfinden, daß jedem von der einen Seite einfahrenden Theilchen ein nach der andern Seite ausfahrendes zugeordnet werden könne, das sich ebenso bewegt, wie das einfahrende thun würde, wenn es ohne Stöße die Schicht passirt hätte, — eine Hypothese, die nichts Bedenkliches zu haben scheint, wenn man die Radien der Molekülkugeln als klein neben der Wirkungssphäre der capillaren Kräfte in der Grenze Flüssigkeit — Dampf betrachtet.

Die auf dieser Grundlage entwickelten Formeln zeigten mannigfaltige Beziehungen zu gewissen aus dem Gesetz von van der Waals gefolgerten Gleichungen, ohne jedoch mit denselben vollkommen übereinzustimmen.

Ich habe seit der Veröffentlichung der früheren Resultate, insbesondere angeregt durch mir von Herrn Reinganum mitgetheilte Zahlwerthe, welche unbefriedigende Uebereinstimmung mit den Formeln zeigen, eine Erweiterung der Grundlagen meiner Rechnungen versucht, um die nach diesen beiden Richtungen hervorgetretenen Differenzen zu vermindern, ev. zu beseitigen, und theile im Nachstehenden die Ergebnisse dieser Versuche mit.

Dieselben gelten in erster Linie der Auswerthung des Einflusses, welchen die in der Grenzschicht zwischen Flüssigkeit und Dampf stattfindenden Zusammenstöße auf den Vorgang ausüben, und zeigen, daß die oben ausgesprochene Hypothese im allgemeinen nicht zulässig ist.

In zweiter Linie gelten sie der Berechnung einer Correction an dem Ausdruck für die specifische Verdampfungswärme. Zu deren Ableitung war stillschweigend angenommen, daß bei dem Hindurchfahren durch die Grenzschicht die Moleküle dieselben Kräfte erfahren, gleichviel ob Dampf und Flüssigkeit im Gleichgewicht stehen, oder ob das eine auf Kosten des anderen zunimmt. Dies ist aber nicht streng richtig; während der fortschreitenden Verdampfung befindet sich die Grenzfläche Dampf — Flüssigkeit nicht in Ruhe, sondern sie verschiebt sich; die hindurchfahrenden Moleküle erleiden somit Kräfte, die nach einem andern Gesetz mit dem Ort variiren, als wenn die Grenzfläche stillsteht, und dieser Unterschied, der auf den ersten Blick unbedeutend genug erscheint, stellt sich bei strenger Untersuchung als recht einflußreich heraus. —

Digitized by Google

Als die vorliegende Arbeit im Wesentlichen abgeschlossen war, erhielt ich Kenntniß von Herrn Milner's theoretischen Betrachtungen über die Verdampfungswärme [1]), welche längere Zeit nach meiner ersten Arbeit publicirt sind, jene aber nicht berücksichtigen. Dieselben bewegen sich in einem dem von mir verfolgten ganz nahe verwandten Gedankenkreise, unterscheiden sich aber in wesentlichen Einzelpunkten von meinen Entwickelungen.

Erstens nimmt Herr Milner die Gleichheit der mittleren kinetischen Energie von Dampf und Flüssigkeit ohne Beweis an, während ich gezeigt habe, wie dieselbe aus den Grundannahmen der kinetischen Theorie folgt.

Zweitens berücksichtigt Herr Milner die Größe der Moleküle zwar bereits, aber in einer andern und, wie mir scheint, weniger strengen Weise, als es im Folgenden geschieht; seine Resultate weichen nach dieser Richtung erheblich von den meinigen ab.

Drittens zieht er nicht in Rechnung, daß beim Vorgang der fortschreitenden Verdampfung die Grenze zwischen Flüssigkeit und Dampf sich verschiebt, und demgemäß daselbst andere Vorgänge stattfinden, als im Falle des Gleichgewichtes zwischen Dampf und Flüssigkeit. Die auf diesen Umstand bezügliche Korrektion, die ich im Folgenden entwickele, würde also jedenfalls auch an seinen Resultaten anzubringen sein.

Herr Milner sucht seine Endformel dadurch zu stützen, daß er sie auch ohne specielle kinetische Betrachtungen aus dem van der Waals'schen Gesetz ableitet. Indessen scheint mir diese Ableitung nicht richtig zu sein. Die allgemeine Formel für die Wärmemenge, welche bei einer durch die Incremente dT und dv gegebenen Zustandsänderung der Masseneinheit zugeführt werden muß, lautet bekanntlich in sofort verständlicher Bezeichnung

$$dq = c_v dT + \frac{T}{\mathfrak{A}} \frac{dp}{dT} dv.$$

Benutzt man hierin das van der Waals'sche Gesetz

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = BT,$$

so resultirt

$$dq = c_v dT + \frac{BT dv}{\mathfrak{A}(v-b)}.$$

1) S. R. Milner, Phil.-Mag. Ser. 5, Vol. 43, S. 291.

Digitized by Google

Nun ist bekanntlich die Wärmemenge, die zur isothermischen Verdampfung der Masseneinheit auf dem Wege durch homogene Zustände aufzuwenden ist, gleich der auf dem gewöhnlichen Wege über inhomogene Zustände erforderten; und hieraus folgt direct für die gesammte — nicht blos die innere — specifische Verdampfungswärme der Ausdruck

$$Q = \frac{BT}{\mathfrak{A}} \int_{v_i}^{v_a} \frac{dv}{v-b},$$

in dem v_i sich auf den flüssigen, v_a auf den dampfförmigen Zustand bezieht. Bei constantem b ergiebt sich

$$Q = \frac{BT}{\mathfrak{A}} \ln\left(\frac{v_a-b}{v_i-b}\right),$$

was von Herrn Milner's Resultat hierfür in mehrfacher Hinsicht abweicht, während die von mir erhaltene Endformel für Q mit dem ersten (allgemeinen), und daher natürlich auch mit dem zweiten (speciellen) Ausdruck im Einklang ist. —

I. Alle Stoßwirkungen zwischen Molekülen lassen sich bekanntlich am einfachsten behandeln, wenn man letztere als starre Kugeln ansieht; wir wollen im Nachstehenden auf gleiche Weise verfahren. Zu weiterer Vereinfachung mag die Dicke der Grenzschicht Flüssigkeit — Dampf, innerhalb deren merkliche capillare Kräfte stattfinden, zunächst als unendlich klein, selbst gegen die Radien der Moleküle, angesehen werden; es findet dann die Geschwindigkeitsänderung beim Passiren der Grenzschicht momentan statt.

Zusammenstöße zwischen zwei Molekülen können nun auf zwei Weisen stattfinden. Entweder sind während des Stoßes beide Moleküle in demselben Raume (i) (Flüssigkeit), resp. (a) (Dampf), oder das eine befindet sich in (i), das andere in (a). Dabei wird, wie gewöhnlich, der Ort eines Moleküles nach der Stelle beurtheilt, an der sich sein Schwerpunkt — hier also der Kugelmittelpunkt — befindet.

Die Stöße erster Art sind eben diejenigen, oben allein in Betracht gezogenen, von denen sich, wie schon erwähnt, zeigen läßt, daß die Anzahl der gegen die Grenze fliegenden Moleküle durch sie nicht geändert wird. Uns interessiren demgemäß nur die Stöße zweiter Art, d. h. diejenigen, die zwischen einem in (i) und einem in (a) befindlichen Molekül — oder, wie wir kurz sagen wollen, in der Grenzfläche selbst — stattfinden.

Digitized by Google

Welche Wirkung dieselben ergeben, ist leicht zu übersehen; denn da die Moleküle in (*i*) und in (*a*) als von gleicher Masse angenommen sind, so müssen diese Moleküle im Mittel einfach ihre Bewegungen austauschen, und es läßt sich demgemäß zu jedem auf der einen Seite gegen die Grenze fahrenden Theilchen, welches einen Zusammenstoß in der Grenze erleidet, ein auf der andern Seite ausfahrendes finden, das seine Bewegung ungeändert fortsetzt. Diese Moleküle verhalten sich also ebenso, als wenn sie, ohne der capillaren Kraft zu unterliegen, die Grenzfläche passirten und sind demgemäß bei Berechnung der Wirkung jener Kräfte auf den Vorgang einfach in Abzug zu bringen. Die frühere Annahme, daß die Stöße in der Grenzschicht so verliefen, daß jedem einfahrenden Molekül ein austretendes zugeordnet werden könnte, das seine Bewegung unter Rücksicht auf die capillaren Wirkungen fortsetzte, ist somit jedenfalls vorerst in dem hier betrachteten Falle einer unendlich dünnen Grenzschicht als unzulässig erwiesen.

Wir haben nun die Anzahl der Moleküle auszuwerthen, die innerhalb einer gegebenen Zeit Stöße in der Grenzfläche erleiden.

Hierzu führen wir wiederum den Begriff der Stoßkugel ein, d. h. einer Kugel, um den Schwerpunkt eines Moleküls construirt, in die der Schwerpunkt eines anderen Moleküls nicht eindringen kann; ihr Radius sei R. Construiren wir die Stoßkugeln um die Moleküle in (*i*), so haben wir die Moleküle in (*a*) durch einfache Punkte zu repräsentiren, und ein Stoß in der Grenze findet dann statt, wenn ein Molekülpunkt a die Kalotte einer die Grenze durchsetzenden Stoßkugel i trifft.

Da die Bewegungen parallel der Grenze nach allen Seiten in gleicher Weise stattfinden, auch, wie sich zeigen wird, in (*i*) und (*a*) gleiche mittlere Geschwindigkeiten besitzen, so können wir von denselben ganz absehen und die Rechnung so durchführen, als ob die Moleküle sich sämmtlich normal zur Grenze bewegten. Der Bruchtheil dn_a/n_a von n_a innerhalb (*a*) nach der Grenze hinfahrenden Theilchen, der unter einem Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ gegen über die Grenze ragende Stoßkugeln trifft, läßt sich dann folgendermaßen bestimmen. Wir construiren auf einer Stoßkugel i eine Zone zwischen den Poldistanzen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ und projiciren dieselbe auf die Grenzfläche. Bezeichnet df die Größe dieser Projection, und ist ν_i die Anzahl der Stoßkugeln i über der Flächeneinheit der Zwischengrenze, auf denen diese Zone im Raume (*a*) liegt, so gilt offenbar

Digitized by Google

$$dn_a/n_a = \nu_i df.$$

Nun ist aber $df = 2\pi R^2 \sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta$ und $\nu_i = N_i R\cos\vartheta$, unter N_i die Anzahl Moleküle in der Volumeneinheit von (i) verstanden; demgemäß erhält man

$$dn_a = 2\pi R^2 n_a N_i \cos^2\vartheta \sin\vartheta d\vartheta.$$

Summirt man dies über alle ϑ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, so erhält man für die ganze Anzahl n_a' von Molekülen, welche Stöße in der Grenze erfahren,

$$n_a' = \frac{2\pi}{3} R^2 n_a N_i = b' n_a N_i,$$

worin b' eine Abkürzung ist. Genau ebenso würde bei Untersuchung der Stöße, welche die in (i) gegen die Grenze fahrenden Theilchen erleiden, folgen

$$n_i' = \frac{2\pi}{3} R^2 n_i N_a = b' n_i N_a.$$

Nun möge, wie in der letzten Arbeit, $\beta_i(w)dw$ resp. $\beta_a(w)dw$ den Bruchtheil aller Moleküle bezeichnen, die innerhalb (i), resp. (a), eine Geschwindigkeit normal zur Grenzfläche zwischen w und $w + dw$ besitzen. Es ist dann $dn_i = N_i w \beta_i(w) dw$, resp. $dn_a = N_a w \beta_a(w) dw$, die Anzahl der von diesen in der Zeiteinheit gegen die Grenzfläche fahrenden. Hiervon erleidet die Zahl $b' N_a dn_i$, resp. $b' N_i dn_a$, Stöße in der Grenze und scheidet, da bei ihnen nach dem oben Gesagten die capillaren Kräfte keine Wirkung üben, einfach von der Betrachtung aus. Für letztere bleiben allein übrig, als durch die Grenze gehend, Moleküle in der Anzahl

$$N_i(1 - b' N_a) w \beta_i(w) dw \quad \text{und} \quad N_a(1 - b' N_i) w \beta_a(w) dw;$$

dies zeigt, daß die früheren Ueberlegungen und Resultate Gültigkeit behalten, wenn man nur die factischen Anzahlen N_i und N_a von Molekülen in den Volumeneinheiten von (i) und (a) ersetzt durch die reducirten $N_i(1 - b' N_a)$ und $N_a(1 - b' N_i)$. Demgemäß lautet denn das fundamentale System von Gleichgewichtsbedingungen zwischen Dampf und Flüssigkeit nicht mehr $G_i = G_a$, $N_i e^{-\gamma_i^2} = N_a$, $\gamma_i = c/G_i$ — unter G_i und G_a die wahrscheinlichste Geschwindigkeit in Flüssigkeit und Dampf, unter c, wie im Eingang, die Uebergangsgeschwindigkeit verstanden —, sondern

$$G_i = G_a, \quad N_i(1 - b' N_a) e^{-\gamma_i^2} = N_a(1 - b' N_i), \quad \gamma_i = c/G_i. \qquad 1)$$

Die zweite Formel läßt sich leicht umgestalten. Denn da N die

Digitized by Google

Anzahl der Moleküle in der Volumeneinheit bezeichnet, so ist Nv — wo v das Volumen der Masseneinheit bezeichnet —, die Anzahl der in v befindlichen, und zwar ist ersichtlich $N_i v_i = N_a v_a$. Setzt man noch $b' N_i v_i = b' N_a v_a = b$, und vertauscht man wegen $G_i = G_a = G$ auch γ_i mit γ, so resultirt

$$N_i\left(1-\frac{b}{v_a}\right)e^{-\gamma^2} = N_a\left(1-\frac{b}{v_i}\right),$$

oder noch einfacher

$$(v_a-b)\,e^{-\gamma^2} = (v_i-b). \qquad 2)$$

Hieraus folgt dann

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{G^2} = \ln\left(\frac{v_a-b}{v_i-b}\right)$$

oder

$$c^2 = G^2 \ln\left(\frac{v_a-b}{v_i-b}\right). \qquad 3)$$

Die in diese Formeln eingeführte Constante b wird mit der in der van der Waals'schen Formel auftretenden dann identisch, wenn die Molekülkugeln in Dampf und Flüssigkeit gleiche Größe haben. Denn dann ist der zwischen zwei gleichartigen Molekülen geltende Stoßradius — der in der van der Waals'schen Gleichung die Constante b bestimmt — mit dem zwischen zwei verschiedenartigen Molekülen geltenden — der oben eingeführt wurde — identisch. Im entgegengesetzten Falle ist diese Uebereinstimmung nicht vorhanden. —

Auf den im Vorstehenden erledigten Fall eines unstetigen Ueberganges von Flüssigkeit in Dampf läßt sich derjenige eines stetigen Ueberganges zurückführen, wenn man letzteren als eine Folge von unendlich vielen und unendlich kleinen Sprüngen betrachtet.

Der Zuwachs $\psi = \frac{1}{2} m c^2$ der lebendigen Kraft eines Moleküles beim Uebertritt aus dem Dampfraum (a) in den Flüssigkeitsraum (i) ergiebt sich aus (3). Die gleiche Ueberlegung läßt sich aber auf das Passiren einer beliebigen andern Unstetigkeitsfläche anwenden, und wenn letztere zwei Zustände der Substanz scheidet, die durch die Indices h und $h+1$ charakterisirt sein mögen, so können wir gemäß (3) schreiben

$$\psi_{h,h+1} = \tfrac{1}{2} m c^2_{h,h+1} = \tfrac{1}{2} m G^2 \ln\left(\frac{v_h-b_{h,h+1}}{v_{h+1}-b_{h,h+1}}\right).$$

Hierin bezeichnet $c_{h,h+1}$ den Geschwindigkeitszuwachs, der in der

Digitized by Google

Grenzfläche $h, h+1$ stattfindet; $b_{h,h+1}$ ist der für eben jene Grenze charakteristische Parameter.

Ist v_{h+1} nur unendlich wenig kleiner als v_h, so wird auch $\psi_{h,h+1}$ unendlich klein sein, und die obige Formel wird lauten

$$d\psi = -\tfrac{1}{2} mG^2 \frac{dv}{v-b},$$

wo nun die Indices fortgelassen sind. Die ganze Zunahme der lebendigen Kraft beim Uebergang aus dem Dampf- in den Flüssigkeitsraum wird dann, da G zwar für alle Schichten constant ist, b aber variiren kann,

$$\psi = +\tfrac{1}{2} mG^2 \int_{v_i}^{v_a} \frac{dv}{v-b}.$$

Nun ist ψ wieder durch eine Geschwindigkeit c ausdrückbar, die ein Molekül normal zur Grenze mindestens besitzen muß, um aus dem Flüssigkeits- in den Dampfraum übergehen zu können; und wir können daher an Stelle von (3) die allgemeinere Formel setzen

$$c^2 = G^2 \int_{v_i}^{v_a} \frac{dv}{v-b}, \qquad 4)$$

welche für constantes b mit ihr identisch wird.

II. Für die Berechnung der specifischen Verdampfungswärme denken wir uns in gewohnter Weise die Flüssigkeit und den mit ihr im Gleichgewicht darüber befindlichen Dampf in einen verticalen Cylinder eingeschlossen, der oben durch einen verschiebbaren Stempel begrenzt wird. Geht die Menge dM Flüssigkeit bei constanter Temperatur und somit constantem Druck in Dampf über, so sinkt die Zwischengrenze um die Länge $dM/F\varrho_i$, unter F den Querschnitt des Cylinders, unter ϱ_i die Dichte der Flüssigkeit verstanden; der Stempel steigt um $dM/F\varrho_a - dM/F\varrho_i$, wobei ϱ_a die Dichte des Dampfes bedeutet.

Sieht man von der (im allgemeinen kleinen) Bewegung der Zwischengrenze ab, so setzt sich die zur Verdampfung von dM aufzuwendende, mechanisch gemessene Wärmemenge $\mathfrak{A}dq$ aus zwei Theilen zusammen; der erste vom Betrage $\frac{1}{2}c^2 dM$ stellt die Wärme dar, welche die Abkühlung der Flüssigkeit in Folge des Verlustes der schnellsten Moleküle aufhebt, der zweite vom Betrage $pdM(1/\varrho_a - 1/\varrho_i)$ compensirt die Abkühlung, welche der Dampf bei der Verschiebung des Stempels gegen den Druck p, d. h. bei der Leistung der äußern Arbeit erfährt.

Digitized by Google

Statt nun die Correction für sich zu berechnen, welche die Bewegung der Zwischengrenze nöthig macht, wollen wir mit einem Male die ganze Wärmemenge bestimmen, die in Folge der Bewegung der äußeren und der Zwischengrenze nöthig wird, und die somit als Gesammt-Correction zu $\frac{1}{2}c^2dM$ hinzuzufügen ist.

Um die Verhältnisse möglichst übersichtlich zu gestalten, wollen wir annehmen, daß die Verdampfung gleichförmig fortschreitet, und dann das ganze System mit der Geschwindigkeit $dM/F\varrho_1 dt$ — wobei dM/dt die Verdampfungsgeschwindigkeit darstellt — vertical verschieben, sodaß dadurch die Zwischengrenze factisch zur Ruhe kommt. Diese Bewegung erfordert keinen Aufwand von Arbeit und bringt einen Zustand hervor, wo der Betrag $\frac{1}{2}c^2dM$ wirklich alles das compensirt, was an der Zwischengrenze stattfindet, sodaß wir nunmehr nur noch die Vorgänge an der unteren und an der oberen Begrenzung des Systemes zu untersuchen haben. Dabei ist es vortheilhaft, um jedenfalls Flüssigkeit und Dampf bis zu jenen Grenzen homogen denken zu können, eine dünne Flüssigkeitsschicht mit zu dem Boden, eine dünne Dampfschicht mit zu dem Deckel des Cylinders zu rechnen.

Die untere Grenze bewegt sich mit der Geschwindigkeit $dM/F\varrho_1 dt$ nach oben, und die gegen sie prallenden Theilchen werden beschleunigt reflectirt; die obere Grenze schreitet mit der Geschwindigkeit $dM/F\varrho_2 dt$ nach oben fort, und die gegen sie prallenden Theilchen kehren verlangsamt zurück. Wir werden sehen, daß die lebendige Kraft der Flüssigkeitstheilchen um ebensoviel wächst, als die der Dampftheilchen abnimmt, daß sonach die an der oberen und die an der unteren Grenze stattfindenden Vorgänge sich gegenseitig compensiren, und daß deshalb das Constanthalten der Temperatur einen weiteren Aufwand von Wärme nicht erfordert.

Bezeichnet in einem Molekülsystem, dessen Wechselwirkungen, wie hier vorausgesetzt, nur an der Oberfläche merkliche Resultirende liefern, P den ganzen inneren Druck, d. h. die auf die Fläche Eins bezogene Wirkung gegen die eine Seite eines inneren Flächenstückes, so ist die Zunahme der lebendigen Kraft des Systemes während dt durch Verschiebung der Fläche F der Begrenzung (der wir wieder eine dünne Schicht der Substanz zurechnen), mit der Geschwindigkeit W nach Innen gleich $-PFWdt$. Hieraus folgt für unser System Flüssigkeit — Dampf während der Zeit dt eine Zunahme der lebendigen Kraft im Betrage

Digitized by Google

$$\left(\frac{P_i}{\varrho_i} - \frac{P_a}{\varrho_a}\right) dM.$$

Nun enthalten P_i resp. P_a neben einander den äußeren Druck p, unter dem das System steht, den capillaren Druck K_i, resp. K_a, in Flüssigkeit und Dampf, und endlich einen Antheil π_i, resp. π_a, ähnlicher Natur, der aber nicht auf der Fern- sondern der Nahwirkung zwischen zwei Molekülen — d. h. auf den Stößen — beruht; es ist nämlich

$$P_i = p + K_i - \pi_i, \quad P_a = p + K_a - \pi_a.$$

Bezeichnet man dann noch mit B die Constante des Boyle-Gay Lussac'schen Gesetzes für den Dampf, so läßt sich die van der Waals'sche Gleichung schreiben:

$$\frac{P_i}{\varrho_i} = BT = \frac{P_a}{\varrho_a};$$

hieraus folgt aber, daß die Zunahme der molekularen lebendigen Kraft in Folge der Bewegung der oberen und der unteren Begrenzung des Systemes verschwindet, und daß die ganze zur Verdampfung der Masse dM aufzuwendende, mechanisch gemessene Wärme durch $\frac{1}{2} c^2 dM$ gegeben wird.

Für die gesammte specifische Verdampfungswärme Q im calorischen Maaße folgt somit, falls $\mathfrak{A}$ das mechanische Wärmeäquivalent bezeichnet,

$$Q = \frac{c^2}{2\mathfrak{A}} = \frac{G^2}{2\mathfrak{A}} \int_{v_i}^{v_a} \frac{dv}{v-b}$$

oder wegen $\frac{1}{2} G^2 = BT$

$$Q = \frac{BT}{\mathfrak{A}} \int_{v_i}^{v_a} \frac{dv}{v-b}, \qquad 5)$$

was mit dem in der Einleitung aus dem van der Waals'schen Gesetz Gefolgerten übereinstimmt.

Die gesammte Correction, welche die vorstehenden Ueberlegungen zu dem früher mitgetheilten Werth von Q fügen, beträgt sonach

$$\frac{BT}{\mathfrak{A}} \int_{v_i}^{v_a} \left(\frac{1}{v-b} - \frac{1}{v}\right) dv - \frac{p}{\mathfrak{A}} (v_a - v_i);$$

sie besteht aus zwei Gliedern entgegengesetzten Vorzeichens und fällt demgemäß in vielen Fällen nur unbedeutend ins Gewicht; in anderen ist sie dagegen recht beträchtlich. —

Digitized by Google

Für die Vergleichung der Formel (5) mit der Beobachtung wird man Q, da umfassende directe Bestimmungen dieser Größe fehlen, mit Hülfe der Clausius'schen Formel

$$Q = \frac{T}{\mathfrak{A}} \frac{dp}{dT} (v_a - v_i) \qquad 6)$$

aus beobachteten Werthen des Sättigungsdruckes p und der specifischen Volumina v_a und v_i der coexistirenden flüssigen und dampfförmigen Phase berechnen. Man wird somit von der Gleichung

$$\frac{dp}{dT} \frac{v_a - v_i}{B} = \int_{v_i}^{v_a} \frac{dv}{v-b} \qquad 7)$$

auszugehen haben.

Unter den zur Berechnung heranzuziehenden Beobachtungen nehmen die von Herrn Young veröffentlichten Reihen vor allen anderen das Interesse in Anspruch; denn sie liefern in seltener Vollständigkeit sowohl directe Zahlwerthe für p, v_a und v_i bei verschiedenen Temperaturen, als auch Bestimmungen der kritischen Daten $\bar{p}$, $\bar{v}$, $\bar{T}$; außerdem finden sich in diesen Publicationen noch die Werthe der Constanten in der Biot'schen Interpolationsformel

$$\log p = a_1 + b_1 \beta^t + c_1 \gamma^t,$$

worin t die von einem beliebigen Punkt gerechnete Temperatur bezeichnet. Da sich weiter die Parameter des van der Waals'schen Gesetzes aus den kritischen Daten nach den Formeln

$$a = 3\bar{p}\bar{v}^2, \quad b = \tfrac{1}{3}\bar{v}, \quad B = \frac{8\bar{p}\bar{v}}{3\bar{T}}$$

berechnen lassen, und da gilt:

$$dp/dT = p \cdot d\ln p/dT = 0{,}4343 \cdot p \cdot d\log p/dt,$$

so ist die Verwerthung der Young'schen Zahlenreihen verhältnißmäßig einfach.

Es bedarf indessen keiner langen Rechnung, um zu sehen, daß dieselben mit constant gesetzten Parametern a, b, B durchaus unvereinbar sind. In der hier aus (7) folgenden Gleichung

$$\frac{dp}{dT} \frac{v_a - v_i}{B} = \ln\left(\frac{v_a - b}{v_i - b}\right) \qquad 8)$$

findet sich z. B. für normales Pentan, für Isopentan und für Hexan[1]) die linke Seite rund doppelt so groß, als die rechte.

1) S. Young, Transact. of the Chem. Soc. 1895, S. 1071; 1897, S. 446; Proc. of the Phys. Soc. 1894–95, S. 602.

Digitized by Google

Man möchte hierin vielleicht zunächst die Bestätigung einer Ueberlegung sehen, mit Hülfe deren ich in einer früheren Arbeit die Veränderung der inneren Energie der Moleküle beim Durchfahren durch die Grenze Flüssigkeit — Dampf in Rechnung zu setzen versuchte, und die in der letzten Formel der rechten Seite einen Zahlen-Factor von die Einheit jedenfalls übersteigendem Werth ergab. Indessen erkennt man leicht, daß bei den obigen Substanzen die Abweichungen noch andere Gründe haben müssen. Die Young'schen Beobachtungen schließen sich nämlich auch dem van der Waals'schen Gesetz selbst bei constanten a, b, B sehr unvollkommen an, und man wird deshalb dazu gedrängt, zunächst die Erweiterung dieses Gesetzes aufzusuchen, welche mit den beobachteten Werthpaaren p, v, T vereinbar ist, ehe man zur Prüfung der Formeln für Q übergeht. Ist eine solche gefunden, so wird es nöthig sein, dieselbe kinetisch zu deuten und speciell auch zu untersuchen, ob sie etwa eine Vervollständigung der auseinandergesetzten Theorie des Verdampfungsprocesses nöthig macht.

Göttingen, October 1897.

Digitized by Google

Ueber die Entwicklungscoefficienten der lemniscatischen Functionen.

Von

A. Hurwitz in Zürich,
correspondirendem Mitgliede der Gesellschaft.

Vorgelegt in der Sitzung am 27. November 1897.

In der Theorie der Gaussischen complexen ganzen Zahlen spielen bekanntlich die lemniscatischen Functionen (d. h. diejenigen elliptischen Functionen, für welche das Periodenverhältniß gleich der imaginären Einheit i ist) dieselbe Rolle, wie die trigonometrischen Functionen in der Theorie der reellen ganzen Zahlen. Ich vermuthete daher, daß die Entwicklungscoefficienten einer geeignet gewählten lemniscatischen Function ähnliche zahlentheoretische Eigenschaften besitzen möchten, wie die Bernoulli'schen Zahlen, welche die Entwicklungscoefficienten der Cotangente bilden. Diese Vermuthung fand bei genauerer Untersuchung ihre vollkommenste Bestätigung, und ich möchte mir erlauben, dieses in den folgenden Zeilen des Näheren darzulegen.

Wenn man zur Abkürzung

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{1}$$

setzt, so befriedigt die Weierstraß'sche Function $\wp(u)$, deren Primitivperioden ω und $i\omega$ sind, die Differentialgleichung

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - 4\wp(u). \tag{2}$$

Ich setze nun die Entwicklung dieser Function $\wp(u)$ nach aufsteigenden Potenzen von u in der folgenden Form an:

Digitized by Google

$$(3)\quad \wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{2^4 E_1}{4}\cdot\frac{u^2}{2!} + \frac{2^6 E_2}{8}\cdot\frac{u^6}{6!} + \cdots + \frac{2^{4n}\cdot E_n}{4n}\frac{u^{4n-2}}{(4n-2)!} + \cdots$$

Dann sind es die durch diesen Ansatz definirten Zahlen

$$(4)\qquad E_1,\ E_2,\ E_3,\ \ldots,\ E_n,\ \ldots\ldots,$$

welche das Analogon der Bernoulli'schen Zahlen bilden.

Die Zahlen E_n sind reelle positive rationale Zahlen, welche sich der Reihe nach auf Grund der Gleichung

$$\wp''(u) = 6\wp^2(u) - 2$$

berechnen lassen. Setzt man nämlich in diese Gleichung die Entwicklung (3) für $\wp(u)$ ein, so ergiebt sich zunächst $E_1 = \frac{1}{10}$ und sodann die, für jedes ganzzahlige $n > 1$ geltende, Recursionsformel

$$(5)\quad E_n = \frac{3}{(2n-3)(16n^2-1)}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)(4n-4k-1)(4n)_{4k}E_k E_{n-k},$$

wo $(4n)_{4k}$ den $4k$ten Binomialcoefficienten zur Basis $4n$ bezeichnet.

Wie vermöge der Bernoulli'schen Zahlen B_n sich die Summen der reciproken Potenzen der reellen ganzen Zahlen ausdrücken lassen, so lassen sich die Summen der reciproken Potenzen der complexen ganzen Zahlen vermöge der Zahlen E_n darstellen. Aus der Partialbruchzerlegung der Function $\wp(u)$ ergiebt sich nämlich unmittelbar:

$$(6)\qquad \Sigma'\frac{1}{(r+is)^{4n}} = \frac{(2\omega)^{4n}}{(4n)!}E_n,$$

wobei die Summe über alle complexen ganzen Zahlen $r+is$ mit Ausschluß der Null auszudehnen ist. Die Analogie dieser Gleichung (6) mit der bekannten Gleichung:

$$\Sigma'\frac{1}{r^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}B_n,$$

in welcher die Summe über alle reellen (positiven und negativen) ganzen Zahlen r mit Ausschluß der Null auszudehnen ist, tritt besonders deutlich hervor, wenn man beachtet, daß

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ ist.}$$

Ich komme nun zu dem Hauptergebniß meiner Untersuchung, nämlich zu demjenigen Satze über die Zahlen E_n, welcher dem v. Staudt-Clausen'schen Satze über die Bernoulli'schen Zahlen entspricht. Um den in Rede stehenden Satz möglichst einfach aus-

Digitized by Google

sprechen zu können, will ich mich der folgenden Bezeichnungen bedienen:

Der Buchstabe p bedeute eine Primzahl von der Form $4k+1$, und wenn

$$p = a^2+b^2$$

die Zerlegung einer solchen Primzahl in die Summe zweier Quadrate vorstellt, so soll a^2 immer das ungerade Quadrat sein. Die Zahl a selbst soll mit einem solchen Vorzeichen genommen werden, daß die Congruenz

$$a \equiv b+1 \pmod 4$$

erfüllt ist. Hiernach wird z. B. für

$$p = 5 = 1^2+2^2,\ p = 13 = 3^2+2^2,\ p = 17 = 1^2+4^2,\ p = 29 = 5^2+2^2,$$

der Reihe nach

$$a = -1, \qquad a = 3, \qquad a = 1, \qquad a = -5$$

sein. Ferner will ich voraussetzen, die Zahlen E_n seien in Form von Brüchen dargestellt, deren Zähler und Nenner positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind, wodurch dann die Bezeichnung „Nenner der Zahl E_n" einen unzweideutigen Sinn erhält.

Dies festgesetzt, besteht nun der folgende Satz:

„Der Nenner der Zahl E_n enthält nur einfache Primfactoren, und zwar außer der Primzahl 2 alle und nur diejenigen Primzahlen p von der Form $4k+1$, für welche $p-1$ ein Divisor von $4n$ ist. Ueberdies gilt die Gleichung

$$E_n = G_n+\tfrac{1}{2}+\sum \frac{(2a)^{\frac{4n}{p-1}}}{p},$$

wo die Summation über die genannten Primzahlen p auszudehnen ist, während G_n eine ganze Zahl bezeichnet."

Für die Zahlen G_n gilt der Satz, daß sie, abgesehen von $G_1 = 0$, sämmtlich ungerade Zahlen sind.

Als Beispiele mögen die nachstehenden Gleichungen dienen:

$$E_1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{2}-\frac{2}{5},$$

$$E_2 = \frac{3}{10} = -1+\frac{1}{2}+\frac{4}{5},$$

$$E_3 = \frac{3^4.7}{130} = 5+\frac{1}{2}-\frac{8}{5}+\frac{6}{13},$$

Digitized by Google

$$E_4 = \frac{3^4 . 7^2 . 11}{170} = 253 + \frac{1}{2} + \frac{16}{5} + \frac{2}{17},$$

$$E_5 = \frac{3^6 . 7^2 . 11}{10} = 39299 + \frac{1}{2} - \frac{32}{5}.$$

Die Auffindung des soeben formulirten Satzes und seines Beweises bot darum einige Schwierigkeit dar, weil eine ähnliche Beziehung, wie sie zwischen den Bernoulli'schen Zahlen und den Summen der Potenzen aufeinanderfolgender ganzen Zahlen besteht, für die Zahlen E_n nicht stattfindet, oder es mir doch wenigstens nicht möglich gewesen ist, eine solche Beziehung zu entdecken. Auf dem Zusammenhange der Bernoulli'schen Zahlen mit den erwähnten Potenzsummen beruhen aber sämmtliche Beweise des v. Staudt-Clausen'schen Satzes; es war daher nothwendig zur Auffindung und zum Beweise des entsprechenden Satzes für die Zahlen E_n neue Hülfsmittel zu beschaffen. Diese habe ich in der Theorie der complexen Multiplication der lemniscatischen Functionen gefunden, wie ich in einer ausführlicheren Arbeit über die Zahlen E_n anderen Ortes zu zeigen gedenke. Dabei werden sich beiläufig auch einige bemerkenswerthe Eigenschaften der Entwicklungscoefficienten der Function $\frac{1}{\wp(u)}$ ergeben.

Aehnliche Sätze, wie für die Entwicklungscoefficienten der lemniscatischen Functionen, gelten auch für die Entwicklungscoefficienten derjenigen elliptischen Functionen, deren Periodenverhältniß eine imaginäre dritte Einheitswurzel ist. Ob aber diese Sätze allgemein auf die elliptischen Functionen, welche complexe Multiplication zulassen, übertragen werden können, und ob vielleicht sogar für jeden algebraischen Zahlkörper Zahlen existiren, welche für diesen eine ähnliche Bedeutung haben, wie die Bernoullischen Zahlen für den Körper der rationalen Zahlen, das sind Fragen, deren Beantwortung weitergehende Untersuchungen erfordert.

Zürich, den 6. November 1897.

Digitized by Google

Ueber Modulsysteme zweiter Stufe und Zahlenringe.

Von

Georg Landsberg in Heidelberg.

Vorgelegt in der Sitzung am 27. November durch D. Hilbert.

Betrachtet man ein System $A_1, A_2, \ldots A_n$ von n ganzen ganzzahligen Functionen einer Veränderlichen, welche keinen gemeinsamen Theiler im gewöhnlichen Sinne des Wortes besitzen, so läßt sich durch diese jede weitere solche Function linear und homogen darstellen, wenn man für die Coefficienten der Darstellung ganze Functionen mit rationalen Zahlcoefficienten zuläßt. Fordert man aber für die Coefficienten der Darstellung ebenfalls ganze ganzzahlige Functionen, so bildet die Gesammtheit der durch das Modulsystem

$$\mathfrak{M} = (A_1, A_2, \ldots A_n)$$

theilbaren Functionen im allgemeinen nur einen Theilbereich des Systems aller ganzen ganzzahligen Functionen. Bei solcher Festsetzung heißt das Modulsystem $\mathfrak{M}$ nach Kronecker ein Modulsystem zweiter Stufe; die Gesammtheit $\mathfrak{a}$ der durch $\mathfrak{M}$ theilbaren Functionen kann man nach Dedekind ein Ideal des Körpers aller rationalen Functionen von x mit ganzzahligen Coefficienten nennen. Sind nämlich P und Q zwei Elemente von $\mathfrak{a}$, so ist auch $P \pm Q$ ein Element von $\mathfrak{a}$ — das System $\mathfrak{a}$ ist also ein Modul, und wenn G irgend eine ganze Größe des Körpers, d. h. eine ganze ganzzahlige Function ist, so gehört mit einer Function P auch das Product GP dem Systeme $\mathfrak{a}$ an — der Modul $\mathfrak{a}$ hat also die charakteristische Eigenschaft des Ideals. Jedes derartige Ideal

Digitized by Google

enthält auch ganze Zahlen, denn bestimmt man n ganze Functionen $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$ mit rationalen Zahlcoefficienten, die der Gleichung

$$\Pi_1 A_1 + \Pi_2 A_2 + \cdots + \Pi_n A_n = 1$$

genügen, so ist der Generalnenner m der Functionen Π durch $\mathfrak{M}$ theilbar; eine solche Zahl m kann daher dem Modulsysteme $\mathfrak{M}$ beigefügt werden, was im folgenden stets geschehen soll.

Von den Modulsystemen zweiter Stufe sind in früherer Zeit nur diejenigen erschöpfend behandelt worden, bei welchen die kleinste ganze Zahl des zugehörigen Ideals eine Primzahl oder wenigstens ein Product verschiedener Primzahlen ist. Aber auch die allgemeinsten Modulsysteme zweiter Stufe, deren Eigenthümlichkeiten sich sehr erheblich von denen der eben genannten speciellen Systeme unterscheiden, verdienen und erfordern eine eingehende Untersuchung, auch deswegen, weil die Kenntniß ihrer Eigenschaften für zahlreiche Probleme der Theorie der algebraischen Zahlen unerläßlich ist[1]). Ueber diesen Gegenstand hat vor kurzem Herr Hensel[2]) eine Arbeit veröffentlicht, in welcher er eine Normalform für die Modulsysteme herleitet, derart, daß aequivalente Modulsysteme auf die gleiche Normalform gebracht werden können. Zu dem gleichen und einigen weiteren Resultaten bin ich ebenfalls auf einem anderen Wege gelangt, und da ich mich bei meiner Untersuchung, dem elementaren Charakter des Gegenstandes entsprechend, zur Reduction der Modulsysteme nur wirklich ausführbarer Operationen bedient habe, während Herr Hensel gewisse Elemente des Ideales benutzt, deren Existenz außer Frage steht, aber über deren Auffindung nichts gesagt wird, so dürften die Betrachtungen des ersten Theiles (§ 1 und 2) vorliegender Arbeit auch jetzt noch von einigem Interesse sein.

Im zweiten Theile der Arbeit wende ich die Resultate des ersten auf einen Gegenstand der Theorie der algebraischen Zahlkörper an. Betrachtet man die Ideale eines in dem Körper gelegenen regulären Zahlenringes[3]), so stehen dieselben in unmittel-

1) Die Nothwendigkeit dieser Untersuchung hebt Gauss in der nachgelassenen Analysis Residuorum, kurz bevor die Abhandlung abbricht, eindringlich hervor (Werke Bd. II, S. 237, § 372).

2) Ueber die Zurückführung der Divisorensysteme auf eine reducirte Form. Crelles J. Bd. 118, S. 234—250.

3) Ich gebrauche im wesentlichen die Bezeichnungen, welche Herr Hilbert in seinen „Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper“ (Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung Bd. 4, Berlin 1897) aufgenommen hat.

Digitized by Google

barer Beziehung mit gewissen Modulsystemen zweiter Stufe. Die Modulsysteme, die dem Führer des Ringes und der Basis des Körpers entsprechen, stehen alsdann in einem einfachen Zusammenhange, dessen Auseinandersetzung den Inhalt der §§ 3 und 4 ausmacht.

Dem Führer des Ringes entspricht in der Theorie der algebraischen Functionen das System der Doppelpunkte der Grundcurve; überträgt man die angewendeten Methoden auf dieses Gebiet, so gelangt man unter neuen Gesichtspunkten zur Untersuchung der Curvensingularitäten, was später genauere Ausführung finden soll.

I.

Im folgenden verstehe ich unter „Functionen" schlechtweg stets ganze ganzzahlige Functionen und ich nenne dieselben mit Herrn Dedekind (Crelles J. Bd. 54, S. 1) primär, wenn der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich Eins ist. Die Untersuchung beruht nun auf folgendem Hilfssatz:

Ist

$$\mathfrak{M} = (A_1, A_2, \ldots A_n, m)$$

ein Modulsystem zweiter Stufe, so giebt es in dem Ideale $\mathfrak{a}$ der durch $\mathfrak{M}$ theilbaren Functionen stets eine primäre Function, deren Grad höchstens gleich der größten der Gradzahlen der Functionen A ist.

Beweis. 1) Es sei m eine Primzahlpotenz, gleich p^e. Dann giebt es unter den Functionen A sicherlich eine A_ν, die nicht durch p theilbar ist. Diese Function kann man in zwei Summander zerspalten, derart, daß der erste B alle Glieder enthält, deren Coefficienten zu p relativ prim sind, während der zweite aus den durch p theilbaren Gliedern besteht; ist dann p^r die höchste Potenz von p, welche in dem zweiten Summanden aufgeht, so hat man

$$A_\nu = B + p^r C,$$

wo B und C Functionen der Grade β und γ sind. Nun ist der Satz evident, falls entweder $r \geqq e$, oder $\beta > \gamma$ ist; denn ist b der Coefficient von x^β in B, so kann man b' so bestimmen, daß $bb' \equiv 1 \pmod{p^e}$, und dann ist $b'A_\nu$ modulo p^e einer primären Function des Grades β congruent. Wenn aber $r < e$ und $\beta < \gamma$ ist, so kann man die Function C nach dem Modul p^e durch B dividiren, weil der höchste Coefficient b von B zu p relativ prim ist; erhält man so den Quotienten Q und den Rest R, so daß

$$C \equiv QB + R \pmod{p^e}$$

Digitized by Google

ist, so ist auch die Function

$$A_\nu - p^r Q A_\nu \equiv B + p^r R - p^{2r} CQ \pmod{p^e}$$

eine Function des Ideales. Da nun der Grad von R kleiner als β ist, so ist man auf den früheren Fall zurückgekommen, falls $2r \geqq e$ ist; ist aber $2r < e$, so setzt man das Verfahren fort, indem man QC durch die Function $B + p^r R$ nach dem Modul p^e dividirt. So gelangt man nach einer endlichen Anzahl von Operationen zu einer primären Function, die in dem Ideale gelegen und deren Grad β kleiner ist als der Grad γ der Function A_ν.

2) Wenn m verschiedene Primzahlen enthält:

$$m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r},$$

so bildet man die r Zahlen

$$m_\varrho = \frac{m}{p_\varrho^{e_\varrho}} \qquad (\varrho = 1, 2, \dots r)$$

und berechnet r ganze Zahlen $h_1, h_2, \dots h_r$, die der Gleichung

$$m_1 h_1 + m_2 h_2 + \dots + m_r h_r = 1$$

genügen. Sodann bildet man die r Modulsysteme

$$\mathfrak{M}_\varrho = (A_1, A_2, \dots A_n, p_\varrho^{e_\varrho}) \qquad (\varrho = 1, 2, \dots r)$$

und ermittelt nach der vorigen Methode eine primäre Function G_ϱ, welche durch $\mathfrak{M}_\varrho$ theilbar und deren Grad γ_ϱ höchstens gleich der größten der Gradzahlen der Functionen A ist. Dann ist $m_\varrho G_\varrho$ durch $\mathfrak{M}$ theilbar, also auch jede Function der Form

$$F = H_1 \cdot m_1 G_1 + H_2 \cdot m_2 G_2 + \dots + H_r \cdot m_r G_r,$$

wenn die H irgend welche Functionen sind. Ist nun γ die größte der Gradzahlen γ_ϱ und nimmt man für H_ϱ eine Function des Grades $\gamma - \gamma_\varrho$, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz gleich h_ϱ ist, so ist F eine primäre Function, deren Grad γ die größte der Gradzahlen der Functionen A nicht übersteigt; w. z. b. w.

Ist nun das Modulsystem $\mathfrak{M}$ vorgelegt, so kann man ihm, ohne das zugehörige Functionenideal zu verändern, eine primäre Function F der vorher angegebenen Beschaffenheit hinzufügen und sodann jede der Functionen A_ν durch ihren Rest R_ν modulo F ersetzen, denn diese Reste haben, weil F primär ist, ganze Zahlcoefficienten; es besteht also die Aequivalenz

$$(A_1, A_2, \dots A_n, m) \sim (F, R_1, R_2, \dots R_n, m).$$

Digitized by Google

Jetzt sind zwei Fälle möglich: entweder das Modulsystem

$$\mathfrak{M}' = (R^{(1)}, R_2, \ldots R_n, m)$$

hat einen gemeinsamen Zahlentheiler oder dies ist noch nicht der Fall. Im letzteren Falle kann man wieder nach der vorigen Methode eine durch $\mathfrak{M}'$ theilbare primäre Function F' bilden, deren Grad kleiner als der Grad γ von F ist, und kann sodann F' an die Stelle von F treten lassen, F durch seinen Rest modulo F' ersetzen. Dieses Verfahren kann man solange fortsetzen, bis die nicht primären Functionen des Modulsystemes einen gemeinsamen Zahlentheiler erhalten haben, und dies muß nach einer endlichen Anzahl von Operationen eintreten, weil die Grade der Functionen F, F', F'', . . . eine abnehmende Reihe bilden. Wenn aber durch die Folge der Reductionen das restirende Modulsystem $\mathfrak{M}'$ einen Zahlentheiler e erhalten hat, so kann man diesen aus den Elementen des Modulsystemes herausheben und sodann das System $\frac{\mathfrak{M}'}{e}$ aufs neue in der angegebenen Weise reduciren.

In dieser Weise fortfahrend, kann man schließlich das Modulsystem $\mathfrak{M}$ durch ein aequivalentes

$$(\mathfrak{F}) \quad (F_1, e_1F_2, e_2F_3, \ldots . e_{r-1}F_r, e_r)$$

von folgenden Eigenschaften ersetzen:

1) Die Functionen F sind primär;
2) ihre Grade bilden eine abnehmende Reihe;
3) jede der Zahlen e ist ein eigentlicher Theiler der nächstfolgenden.

Die so gewonnene Form $(\mathfrak{F})$ des Modulsystemes ist aber, wenn die Anzahl $(r+1)$ der Elemente größer als zwei ist, im allgemeinen noch weiter reducirbar, nämlich nach folgenden Gesichtspunkten. Hat zunächst $(\mathfrak{F})$ nur zwei Elemente, so daß

$$\mathfrak{M} \sim (F_1, e_1)$$

ist, so gilt der leicht zu beweisende Satz:

> Eine Function X ist dann und nur dann durch das Modulsystem theilbar, wenn der Rest, den X bei der Division durch F_1 ergiebt, durch e_1 theilbar ist,

und erst durch diesen Satz kann man von einer beliebigen vorgelegten Function X entscheiden, ob sie durch $\mathfrak{M}$ theilbar ist oder nicht. Hat aber $(\mathfrak{F})$ drei Elemente, so daß

$$\mathfrak{M} \sim (F_1, e_1F_2, e_2)$$

Digitized by Google

ist, so kann man über die Theilbarkeit einer Function X durch $\mathfrak{M}$ erst dann in ebenso einfacher Weise entscheiden, wenn man die Voraussetzung hinzufügt, daß

$$(\mathfrak{C}) \quad e_1 F_1 \equiv 0 \ (\text{modd. } e_1 F_2,\ e_2)$$

ist. Unter dieser Voraussetzung gilt nämlich der Satz:

Eine Function X ist dann und nur dann durch $\mathfrak{M}$ theilbar, wenn der Rest, den X bei der Division durch F_1 ergiebt, durch das Modulsystem $(e_1 F_2,\ e_2)$ theilbar ist.

In der That, wenn X durch $\mathfrak{M}$ theilbar, also

$$X = F_1 \cdot A + e_1 F_2 \cdot B + e_2 \cdot C$$

ist, so ist der Satz evident, falls der Grad der Function $e_1 F_2 B + e_2 C$ kleiner als der Grad von F_1 ist. Im anderen Falle dividire man diese Function durch F_1; erhält man so

$$e_1 F_2 B + e_2 C = e_1 Q F_1 + e_1 R,$$

so ist

$$X = F_1 (A + e_1 Q) + e_1 R,$$

und nun ist nach der letzten Gleichung $e_1 R$ der Rest von X modulo F_1, nach der vorletzten aber und der Congruenz $(\mathfrak{C})$ ist $e_1 R$ durch das Modulsystem $(e_1 F_2,\ e_2)$ theilbar.

Indem man diese Ueberlegungen durch den Schluß von r auf $r+1$ verallgemeinert, gelangt man ohne Mühe zu folgendem Satze, der nach gleicher Methode bewiesen wird:

Genügt ein Modulsystem der Form

$$(\mathfrak{F}) \quad (F_1,\ e_1 F_2,\ e_2 F_3,\ \ldots\ e_{r-1} F_r,\ e)$$

außer den drei früher genannten Bedingungen noch den $(r-1)$ Congruenzen:

$$(\mathfrak{C}_\varrho) \quad e_\varrho F_\varrho \equiv 0 \ (\text{modd. } e_\varrho F_{\varrho+1}, e_{\varrho+1} F_{\varrho+2}, \ldots e_{r-1} F_r, e_r) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r-1),$$

so ist eine vorgelegte Function X dann und nur dann durch das Modulsystem theilbar, wenn der Rest, den X bei der Division durch F_1 ergiebt, durch das Modulsystem

$$e_1 \mathfrak{F}' = (e_1 F_2,\ e_2 F_3,\ \ldots\ e_{r-1} F_r,\ e_r)$$

theilbar ist, wo nun über die Theilbarkeit dieses Restes nach gleicher Methode entschieden werden kann.

Wir sagen nun von einem Modulsystem der Form $(\mathfrak{F})$, es habe die Normalform, wenn es überdies noch den $(r-1)$ Congruenzen $(\mathfrak{C}_\varrho)$ genügt; dann wird man von jeder beliebigen Function X

Digitized by Google

über ihre Zugehörigkeit zum Ideale in einfachster Weise entscheiden können, falls noch folgender Satz gilt:

Jedes Modulsystem der Form $(\mathfrak{F})$ ist einem Modulsystem in der Normalform aequivalent.

Daß aber dieser Satz in der That richtig ist, beweist man folgendermaßen. Wir theilen die Modulsysteme der Form $(\mathfrak{F})$ in Classen ein nach dem Grade γ_1 der Function F_1. Dann ist der Satz evident, falls $\gamma_1 = 1$ ist; wir nehmen ihn also für $\gamma_1 = 1, 2, \ldots n-1$ als giltig an und beweisen ihn für $\gamma_1 = n$. Dann dürfen wir auch von dem Modulsystem

$$\mathfrak{F}' = \left(F_2, \frac{e_2}{e_1}F_3, \ldots \frac{e_{r-1}}{e_1}F_r, \frac{e_r}{e_1}\right)$$

voraussetzen, daß es bereits die Normalform habe, weil die Grade der in ihm auftretenden Functionen $< n$ sind.

Dividiren wir nun F_1 durch F_2, so daß

$$(\mathfrak{A}) \quad F_1 = QF_2 + R,$$

so hat das Modulsystem $(\mathfrak{F})$ die Normalform, sobald R durch $\mathfrak{F}'$ theilbar ist. Ist das aber nicht der Fall, so fügen wir die Function R dem Modulsystem $\mathfrak{F}'$ bei und bringen das erweiterte System

$$(R, \mathfrak{F}') = \left(R, F_2, \frac{e_2}{e_1}F_3, \ldots \frac{e_{r-1}}{e_1}F_r, \frac{e_r}{e_1}\right)$$

auf die Normalform, was möglich ist, da die Grade aller in ihm auftretenden Functionen $< n$ sind. Erhält man so

$$(R, \mathfrak{F}') \sim (G_1, g_1G_2, g_2G_3, \ldots g_{r-1}G_r, g_r) = \mathfrak{G}$$

so ist zufolge der Gleichung $(\mathfrak{A})$

$$\mathfrak{F} \sim (F_1, e_1R, e_1F_2, e_2F_3, \ldots e_{r-1}F_r, e_r),$$

also auch aequivalent dem Modulsysteme

$$(F_1, e_1G_1, e_1g_1G_2, e_1g_2G_3, \ldots e_1g_{r-1}G_r, e_1g_r) = (F_1, e_1\mathfrak{G}),$$

und dieses letzte System hat die Normalform, denn nach $(\mathfrak{A})$ ist

$$e_1F_1 \equiv 0 \ (\text{modd. } e_1F_2, e_1R)$$

also auch, weil F_2 und R durch $\mathfrak{G}$ theilbar sind,

$$e_1F_1 \equiv 0 \ (\text{mod. } e_1\mathfrak{G}), \text{ w. z. b. w.}$$

Diese letzte Reduction sei noch in dem einfachsten Falle, wenn $n = 2$ ist, durch ein Beispiel erläutert. Das Modulsystem

$$(x^2 + ax + b, \ e_1x, \ e_2)$$

Digitized by Google

hat nicht die Normalform, wenn b nicht durch $\frac{e_2}{e_1}$ theilbar ist. Ist nun der größte gemeinsame Theiler von b und $\frac{e_2}{e_1}$ gleich d, so findet man nach der angegebenen Methode die Normalformen:

1) wenn $d = 1$: $(x^2+ax+b,\ e_1x,\ e_2) \sim (x^2+ax+b,\ e_1)$
2) wenn $d > 1$: $(x^2+ax+b,\ e_1x,\ e_2) \sim (x^2+ax+b,\ e_1x,\ e_1d)$.

Das Resultat der ganzen vorangehenden Untersuchung ist der Satz:

Jedes Modulsystem zweiter Stufe ist ersetzbar durch ein Modulsystem in der Normalform:

$$\mathfrak{F} = (F_1,\ e_1F_2,\ e_2F_3,\ \dots\ e_{r-2}F_{r-1},\ e_{r-1}F_r,\ e_r),$$

dessen Elemente die folgenden vier charakteristischen Eigenschaften haben:

1) Die Functionen $F_1, \dots F_r$ sind primär;
2) die Grade $\gamma_1 \dots \gamma_r$ dieser Functionen bilden eine absteigende Reihe;
3) jede der Zahlen e_ϱ ist ein eigentlicher Theiler der nächstfolgenden;
4) wenn $r>1$, so gelten die $r-1$ Congruenzen $(\varrho = 1, 2, \dots r-1)$:

$$e_\varrho F_\varrho \equiv 0 \ (\text{modd. } e_\varrho F_{\varrho+1},\ e_{\varrho+1}F_{\varrho+2},\ \dots\ e_{r-1}F_r,\ e_r).$$

Bei der Herstellung dieser Normalform ist noch zu beachten, daß dieselbe insofern noch etwas schärfer präcisirt werden kann, als man annehmen darf, daß in den Gleichungen

$$F_\varrho = Q_\varrho F_{\varrho+1} + \frac{e_{\varrho+1}}{e_\varrho} Q_{\varrho+1} F_{\varrho+2} + \dots + \frac{e_{r-1}}{e_\varrho} Q_{r-1} F_r + \frac{e_r}{e_\varrho} Q_r$$

die Coefficienten der Functionen $Q_\varrho,\ Q_{\varrho+1}, \dots Q_r$ sämmtlich positiv und kleiner als $\frac{e_\varrho}{e_{\varrho-1}}$ sind; denn wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so reducire man jeden Coefficienten dieser Functionen auf seinen kleinsten positiven Rest mod. $\frac{e_\varrho}{e_{\varrho-1}}$. Erhält man so

$$Q_\varrho = Q'_\varrho - \frac{e_\varrho}{e_{\varrho-1}} Q''_\varrho,\ Q_{\varrho+1} = Q'_{\varrho+1} - \frac{e_\varrho}{e_{\varrho-1}} Q''_{\varrho+1},\ \dots\ Q_r = Q'_r - \frac{e_\varrho}{e_{\varrho-1}} Q''_r,$$

so kann man in dem Modulsysteme $(\mathfrak{F})$ die Function F_ϱ ersetzen durch die Function

Digitized by Google

$$\bar{F}_\varrho = Q'_\varrho F_{\varrho+1} + \frac{e_{\varrho+1}}{e_\varrho} Q'_{\varrho+1} F_{\varrho+2} + \cdots + \frac{e_{r-1}}{e_\varrho} Q'_{r-1} F_r + \frac{e_r}{e_\varrho} Q'_r$$

$$= F_\varrho + \frac{e_\varrho}{e_{\varrho-1}} Q''_\varrho F_{\varrho+1} + \frac{e_{\varrho+1}}{e_{\varrho-1}} Q''_{\varrho+1} F_{\varrho+2} + \cdots + \frac{e_{r-1}}{e_{\varrho-1}} Q''_{r-1} F_r + \frac{e_r}{e_{\varrho-1}} Q''_r,$$

welche zufolge der ersten Gleichung jener Forderung genügt, zufolge der zweiten an die Stelle der Function F_ϱ treten darf.

Aus der Normalform ($\mathfrak{F}$) des Modulsystemes ergiebt sich jetzt unmittelbar der Satz:

Alle Functionen des Ideals $\mathfrak{a}$, deren Grad kleiner als γ_ϱ ist, sind theilbar durch e_ϱ, und diese Zahl ist auch der größte gemeinschaftliche Theiler aller dieser Functionen.

Hiernach erkennt man leicht, welche Bedeutung den Functionen F_ϱ und den Zahlen e_ϱ im Ideale $\mathfrak{a}$ zukommt. Es ist F_1 eine solche primäre Function des Ideals, deren Grad (γ_1) möglichst klein ist; alle Functionen, deren Grad kleiner als γ_1 ist, haben den Zahlentheiler e_1 und wenn eine Function des Ideals durch e_1 theilbar ist, so ist sie zufolge der Congruenz

$$e_1 F_1 \equiv 0 \ (\text{modd.}\, e_1 F_2, e_2 F_3, \ldots e_{r-1} F_r, e_r)$$

durch das Modulsystem

$$(e_1 F_2, e_2 F_3, \ldots e_{r-1} F_r, e_r)$$

theilbar. Die Gesammtheit dieser durch e_1 theilbaren Functionen bildet also wiederum ein Ideal $\mathfrak{a}_1$, dessen Elemente sämmtlich im Ideale $\mathfrak{a}$ gelegen sind und welches also nach Dedekind'scher Terminologie durch das Ideal $\mathfrak{a}$ theilbar ist; in diesem Ideale $\mathfrak{a}_1$ ist $e_1 F_2$ eine solche Function, deren Grad möglichst klein ist und welche nach Fortlassung des Factors e_1 primär ist u. s. f. Die genannten Elemente des Ideales besitzen also invariantiven Charakter, und zwei Modulsysteme sind hiernach dann und nur dann aequivalent, wenn sie auf die gleiche Normalform gebracht werden können.

Eine weitere unmittelbare Folgerung aus der Reduction des Modulsystemes auf die Normalform giebt folgender Satz:

Jedes Modulsystem zweiter Stufe hat ein *endliches* Restsystem; bringt man nämlich ein vorgelegtes Modulsystem $\mathfrak{M}$ auf die Normalform $\mathfrak{F}$, so beträgt die Anzahl der nach dem Modulsysteme incongruenten Functionen:

Digitized by Google

$$(\mathfrak{G})\ N(\mathfrak{M}) = e_1^{\gamma_1-\gamma_2} e_2^{\gamma_2-\gamma_3} \dots e_{r-1}^{\gamma_{r-1}-\gamma_r} e_r^{\gamma_r} = e_1^{\gamma_1} \left(\frac{e_2}{e_1}\right)^{\gamma_2} \left(\frac{e_3}{e_2}\right)^{\gamma_3} \dots \left(\frac{e_r}{e_{r-1}}\right)^{\gamma_r}.$$

Diese Zahl heiße die Norm des Modulsystemes $\mathfrak{M}$.

Denn man bekommt alle und lauter incongruente Functionen, wenn man in der Linearform

$$F_1\Phi_1 + F_2\Phi_2 + \dots + F_r\Phi_{r-1} + \Phi_r$$

für Φ_ϱ alle möglichen Functionen des Grades $\gamma_\varrho - \gamma_{\varrho+1} - 1$ setzt, deren Coefficienten positiv und kleiner als e_ϱ sind.

Die Norm eines Modulsystemes ist also nur von den Invarianten $e_1, \dots e_r, \gamma_1, \dots \gamma_r$ abhängig. Es ist nun von Wichtigkeit, daß dem letzten Satze eine Art Umkehrung zur Seite tritt; berücksichtigt man nämlich die an den Hauptsatz auf S. 284 angeschlossene Bemerkung, so erkennt man die Richtigkeit des Satzes:

Sind von einem Modulsysteme nur die Invarianten $r, e_1, e_2, \dots e_r, \gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_r$ gegeben, so giebt es eine endliche Anzahl, nämlich ebenfalls

$$e_1^{\gamma_1} \left(\frac{e_2}{e_1}\right)^{\gamma_2} \left(\frac{e_3}{e_2}\right)^{\gamma_3} \dots \left(\frac{e_r}{e_{r-1}}\right)^{\gamma_r}$$

inaequivalenter Modulsysteme, denen diese Invarianten zukommen.

Durch Verbindung beider Sätze folgt noch der Zusatz:

Es giebt nur eine endliche Anzahl inaequivalenter Modulsysteme von gegebener Norm.

Denn ist $N(\mathfrak{M})$ gegeben, so giebt es nur eine endliche Anzahl von Invariantensystemen (e_ϱ) und (γ_ϱ), welche der Gleichung $(\mathfrak{G})$ genügen.

II.

Ein Modulsystem $\mathfrak{M}$ heißt durch ein anderes $\mathfrak{N}$ theilbar, wenn jedes Element von $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{N}$ theilbar ist; die zugehörigen Functionenideale $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ stehen alsdann in der Beziehung zu einander, daß jede Function des Ideales $\mathfrak{m}$ auch in $\mathfrak{n}$ gelegen ist. Von der Theilbarkeit der Modulsysteme ist wohl die Multiplication der Modulsysteme zu unterscheiden: unter dem Product zweier Modulsysteme

$$\mathfrak{N} = (N_1, N_2, \dots N_\nu) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P} = (P_1, P_2, \dots P_\pi)$$

versteht man das Modulsystem

$$\mathfrak{M} = (N_h P_i), \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \dots \nu \\ i = 1, 2, \dots \pi \end{pmatrix}$$

Digitized by Google

welches durch die Producte je eines Elementes von $\mathfrak{N}$ und je eines Elementes von $\mathfrak{P}$ gebildet wird; die Modulsysteme $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ heißen alsdann die Factoren oder die Componenten des Modulsystemes $\mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}\mathfrak{P}$, so ist offenbar $\mathfrak{M}$ sowohl durch $\mathfrak{N}$ als durch $\mathfrak{P}$ theilbar; aber eine Umkehrung dieses Satzes ist im allgemeinen unzulässig: wenn $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{N}$ theilbar ist, so braucht keineswegs immer ein Modulsystem $\mathfrak{P}$ zu existiren, so daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}\mathfrak{P}$ ist. Es treten also hier andere Verhältnisse auf, als in der Theorie der ganzen Zahlen oder auch in der Theorie der bisher untersuchten Ideale, und es ist das Ziel dieses Paragraphen, einige Beziehungen darzulegen, welche bei den allgemeinsten Modulsystemen zweiter Stufe zwischen Theilbarkeit und Multiplication stattfinden.

Zunächst hat man den Satz:

Ist $\mathfrak{M}$ theilbar durch $\mathfrak{N}$, so ist $N(\mathfrak{M})$ theilbar durch $N(\mathfrak{N})$.[1])

Denn ist $\nu = N(\mathfrak{N})$ und bilden die Functionen

$$R_1, R_2, \ldots R_\nu$$

ein volles Restsystem mod. $\mathfrak{N}$, so stellen sie auch ein volles Restsystem mod. $\mathfrak{M}$ dar, falls $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ ist. Ist aber $\mathfrak{N}$ ein eigentlicher Theiler von $\mathfrak{M}$, so sei S eine Function, welche durch $\mathfrak{N}$, aber nicht durch $\mathfrak{M}$ theilbar ist, so sind die Functionen

$$S+R_1, S+R_2, \ldots S+R_\nu$$

alle einander und den Functionen der ersten Reihe mod. $\mathfrak{M}$ incongruent, und durch Fortsetzung dieses wohlbekannten Exhaustionsverfahrens ergiebt sich die Behauptung.

Verbindet man diesen Satz mit dem Schlußsatz des vorigen Abschnittes, so erhält man die Folgerung:

Jedes Modulsystem $\mathfrak{M}$ hat nur eine endliche Anzahl (inaequivalenter) Theiler.

Haben wir zwei Modulsysteme $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$, so ist das Modulsystem $(\mathfrak{N}, \mathfrak{P})$, welches durch Zusammenstellung der Elemente von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ entsteht, ein gemeinschaftlicher Theiler der beiden Modulsysteme und zwar der größte gemeinschaftliche Theiler, weil jeder weitere gemeinschaftliche Theiler in ihm aufgeht. Ist

---

1) Mit Hilfe eines Theoremes des Herrn Frobenius (Crelles J. Bd. 88, S. 114, I) kann man den allgemeineren Satz aufstellen:

Ist $\mathfrak{M}$ theilbar durch $\mathfrak{N}$ und bezeichnet man mit m_ν und n_ν den größten gemeinschaftlichen Theiler aller Functionen νter Ordnung, welche durch $\mathfrak{M}$, resp. durch $\mathfrak{N}$ theilbar sind, so ist m theilbar durch n_ν.

Digitized by Google

in dem Ideale, welches zu dem Modulsysteme $(\mathfrak{N}, \mathfrak{P})$ gehört, die 1 und also jede Function gelegen, so heißen die Modulsysteme $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ zu einander relativ prim, und alsdann gilt der Satz:

Ist das Modulsystem $\mathfrak{M}$ durch die beiden relativ primen Modulsysteme $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ theilbar, so ist es auch durch das Product $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ theilbar.

Denn ist

$$\mathfrak{M} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{N}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}},$$

so folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}\mathfrak{M} &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{N}\mathfrak{P}} \\ \mathfrak{N}\mathfrak{M} &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{N}\mathfrak{P}}, \text{ also auch} \\ (\mathfrak{P}, \mathfrak{N}) \cdot \mathfrak{M} &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{N}\mathfrak{P}}, \end{aligned}$$

und da $(\mathfrak{P}, \mathfrak{N}) \sim 1$ ist, so ergiebt sich die Behauptung.

Hieran kann man sogleich eine erste Decomposition der Modulsysteme anschließen. Es sei nämlich $\mathfrak{M}$ ein Modulsystem in der Normalform:

$$\mathfrak{M} = (F_1, e_1 F_2, e_2 F_3, \ldots e_{r-1} F_r, e_r),$$

und es mögen die in e_r enthaltenen Primzahlen in zwei Gruppen geschieden werden. Zerlegen wir dann die Zahlen

$$e_1 = e_1' e_1'', \quad e_2 = e_2' e_2'', \quad \ldots \quad e_r = e_r' e_r''$$

in der Art, daß $e_1', e_2', \ldots e_r'$ die Primzahlen der ersten, $e_1'', \ldots e_r''$ die der zweiten Gruppe enthält und bilden die Modulsysteme

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}' &= (F_1, e_1' F_2, e_2' F_3, \ldots e_{r-1}' F_r, e_r') \\ \mathfrak{M}'' &= (F_1, e_1'' F_2, e_2'' F_3, \ldots e_{r-1}'' F_r, e_r''), \end{aligned}$$

so zeigt man leicht, daß $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ relativ prim und daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \mathfrak{M}''$ ist. Hiernach kann man die Modulsysteme in solche relativ prime Componenten zerlegen, in deren Normalform die auftretenden Zahlfactoren e_ϱ sämmtlich Potenzen einer und derselben Primzahl p sind. Eine ganz analoge Zerlegung findet aber rücksichtlich der Functionen F statt. Es seien nämlich in dem Modulsysteme $\mathfrak{M}$ die Functionen F so beschaffen, daß

$$F_1 \equiv F_1' F_1'', \quad F_2 \equiv F_2' F_2'', \quad \ldots \quad F_r \equiv F_r' F_r'' \pmod{e_r}$$

und

$$(F_\varrho', F_\varrho'', e_r) \sim 1$$

für $\varrho = 1, 2, \ldots r$ ist, so beweist man in ähnlicher Weise ohne erhebliche Schwierigkeit, daß $\mathfrak{M}$ als Product der zu einander relativ primen Modulsysteme

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}' &= (F_1', e_1 F_2', e_2 F_3', \ldots e_{r-1} F_r', e_r) \\ \text{und} \quad \mathfrak{M}'' &= (F_1'', e_1 F_2'', e_2 F_3'', \ldots e_{r-1} F'', e_r) \end{aligned}$$

Digitized by Google

dargestellt werden kann. Da man nun jede Function F modulo einer beliebig hohen Potenz der Primzahl p in solche relativ prime Factoren zerspalten kann, welche mod. p der Potenz einer Primfunction congruent sind, so leuchtet ein, daß jedes Modulsystem in gewisse relativ prime Componenten von folgender Beschaffenheit zerlegt werden kann: es sind die Zahlen e Potenzen einer und derselben Primzahl p und es sind die Functionen F modulo p Potenzen einer und derselben Primfunction P congruent. Zwei verschiedene solche Elementarbestandtheile, welche zu verschiedenen Primzahlen p oder zu verschiedenen Primfunctionen P gehören, verhalten sich in jeder Beziehung so einfach, wie relative Primzahlen der gewöhnlichen Zahlentheorie, und darum ist es erlaubt, wie dies Herr Hensel in seiner Abhandlung gethan hat, von vornherein nur diese besonderen Modulsysteme zu betrachten. Von allen diesen zuletzt betrachteten Modulsystemen haben aber nur die von der Form (P, p) Primeigenschaft, d. h. nur bei diesen folgt aus der Existenz einer Congruenz der Form $AB \equiv 0 \pmod{\mathfrak{M}}$, daß eine der beiden Functionen A oder B durch $\mathfrak{M}$ theilbar ist, während bei allen übrigen der Fall eintreten kann, daß weder A noch B, wohl aber das Product AB durch $\mathfrak{M}$ theilbar ist, und unter diesen Modulsystemen, denen die Primeigenschaft fehlt, sind auch solche vorhanden, die nicht weiter in Factoren zerlegt werden können [1]).

Wir nehmen jetzt das gegebene Modulsystem $\mathfrak{M}$ in die vorher beschriebenen Elementarcomponenten zerlegt an:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \dots \mathfrak{M}_\sigma. \tag{1}$$

Jeder dieser Elementarcomponenten $\mathfrak{M}_\sigma$ ist völlig durch die Eigenschaft zu charakterisiren, daß nur ein einziges Primmodulsystem

$$\mathfrak{P}_\sigma = (P_\sigma, p_\sigma)$$

in ihm aufgeht. Hiernach gehört jeder Elementarcomponente $\mathfrak{M}_\sigma$ ein bestimmtes Primmodulsystem $\mathfrak{P}_\sigma$ zu, und zwei Modulsysteme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind dann und nur dann zu einander relativ prim, wenn die in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aufgehenden Primmodulsysteme sämmtlich von einander verschieden sind.

Betrachten wir nun zwei relativ prime Modulsysteme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so entspricht jeder Functionenclasse mod. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ eine bestimmte Combination einer Functionenclasse mod. $\mathfrak{A}$ und einer Functionenclasse mod. $\mathfrak{B}$, und man überzeugt sich leicht davon, daß auch

1) Vgl. die Bemerkungen am Ende des § 21 der Kronecker'schen Festschrift (Crelles J. Bd. 92).

Digitized by Google

umgekehrt jeder solchen Combination eine Functionenclasse mod. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ entspricht. Daher gilt der Satz: Wenn $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ relativ prim ist, so ist $N(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = N(\mathfrak{A})N(\mathfrak{B})$; aber es ist wohl zu beachten, daß in unserer Theorie, anders als in der Theorie der Ideale algebraischer Zahlkörper, dieser Satz durchaus an die Voraussetzung gebunden ist, daß $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \sim 1$ ist. Wenn z. B.

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = (P, p), \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = (P^2, pP, p^2)$$

und der Grad der primären Function P gleich n ist, so ist nach dem früheren

$$N(\mathfrak{A}) = N(\mathfrak{B}) = p^n, \quad N(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = p^{2n}.$$

Ist die Voraussetzung, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu einander relativ prim sind, nicht erfüllt, so kann man nur den Satz aufstellen, daß $N(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ durch das Product $N(\mathfrak{A})N(\mathfrak{B})$ theilbar ist. In der That, es entspricht jeder Functionenclasse mod. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ eine bestimmte Combination einer Functionenclasse mod. $\mathfrak{A}$ und einer Functionenclasse mod. $\mathfrak{B}$; sind ferner $A_1, A_2, \ldots A_\varrho$ die sämmtlichen Functionen des vollständigen Restsystemes mod. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, welche sowohl durch $\mathfrak{A}$ als auch durch $\mathfrak{B}$ theilbar sind, so folgt für zwei Functionen X und X', welche in dieselbe Classe mod. $\mathfrak{A}$ und in dieselbe Classe mod. $\mathfrak{B}$ gehören, daß $X' - X$ nach dem Modul $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ einer der ϱ Functionen A congruent ist. Jeder Combination einer Functionenclasse mod. $\mathfrak{A}$ und einer Functionenclasse mod. $\mathfrak{B}$ entsprechen also ϱ verschiedene Functionenclassen mod. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und folglich ist $N(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \varrho N(\mathfrak{A}) N(\mathfrak{B})$.

Wir fragen schließlich nach der Anzahl der in einem vollen Restsysteme modulo $\mathfrak{M}$ enthaltenen Functionen R, welche zu $\mathfrak{M}$ relativ prim sind, d. h. für welche $(R, \mathfrak{M}) \sim 1$ ist. Hierüber giebt Auskunft der Satz:

Es seien $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_s$ die sämmtlichen in einem gegebenen Modulsysteme $\mathfrak{M}$ aufgehenden Primmodulsysteme; dann beträgt die Anzahl derjenigen Functionen des vollständigen Restsystemes mod. $\mathfrak{M}$, welche zu $\mathfrak{M}$ relativ prim sind:

$$\Psi(\mathfrak{M}) = N(\mathfrak{M}) \cdot \prod_{\sigma=1}^{\sigma=s} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{P}_\sigma)}\right); \tag{2}$$

wenn also $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ relativ prim ist, so ist

$$\Psi(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \Psi(\mathfrak{A})\, \Psi(\mathfrak{B}). \tag{3}$$

Digitized by Google

In der That, es sei zunächst $s = 1$ und $N(\mathfrak{M}) = \mu$, $N(\mathfrak{P}) = \pi$, $\frac{\mu}{\pi} = \nu$. Es sei ferner

$$A_0 = 0,\ A_1,\ \ldots A_{\pi-1}$$

ein volles Restsystem mod. $\mathfrak{P}$,

$$B_0 = 0,\ B_1,\ \ldots B_{\nu-1}$$

ein volles System derjenigen Functionen, welche durch $\mathfrak{P}$ theilbar, aber mod. $\mathfrak{M}$ einander incongruent sind, dann bilden, wie am Anfange dieses Abschnittes gezeigt wurde, die $\pi\nu$ Functionen.

$$A_g + B_h \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, \ldots \pi - 1 \\ h = 0, 1, \ldots \nu - 1 \end{pmatrix}$$

ein volles Restsystem mod. $\mathfrak{M}$, und unter diesen sind diejenigen zu $\mathfrak{P}$, also auch zu $\mathfrak{M}$ relativ prim, für welche $g \not\equiv 0$ ist. Also giebt es für $s = 1$ im ganzen

$$(\pi - 1)\nu = N(\mathfrak{M})\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{P})}\right)$$

zu $\mathfrak{M}$ relativ prime Functionen im Restsystem; wenn aber $s > 1$, so beweist man zuerst die Gleichung (3) ohne Schwierigkeit, woraus dann die allgemeine Gleichung (2) folgt.

Die hier angeführten Sätze enthalten nur die ersten Grundlagen für eine Theorie der Decomposition der allgemeinen Modulsysteme zweiter Stufe. Der Weiterführung der Theorie stellen sich, wie es scheint, nicht unerhebliche Schwierigkeiten entgegen. Diese Schwierigkeiten würden geringer sein, wenn folgender naheliegender Satz richtig wäre:

Wenn die ganze ganzzahlige Function M einer Gleichung

$$X^n + A_1 X^{n-1} + A_2 X^{n-2} + \cdots + A_{n-1} X + A_n = 0$$

genügt, deren Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_n$ der Reihe nach durch die Modulsysteme $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \ldots \mathfrak{A}^n$ theilbar sind, so ist M durch $\mathfrak{A}$ theilbar. Aber dieser Satz ist falsch; z. B. sei $\mathfrak{A} = (P^2, p^2)$ und $M = pP$, so ist M nicht durch $\mathfrak{A}$ theilbar, und doch ist $M^2 = p^2P^2$ durch $\mathfrak{A}^2 = (P^4, p^2P^2, p^4)$ theilbar. Daher kann auch ein Product zweier Modulsysteme $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ durch das Product $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ theilbar sein, ohne daß $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{B}$ theilbar ist. Z. B. wenn

$$\mathfrak{A} = (P^2, pP, p^2),\quad \mathfrak{B} = (P^2, p^2),\quad \mathfrak{C} = (P^2, pP, p^2) \text{ ist,}$$

so ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} = (P^4, pP^3, p^2P^2, p^3P, p^4),$$

und doch ist das Modulsystem $\mathfrak{C}$ nicht durch $\mathfrak{B}$ theilbar, weil pP nicht durch $\mathfrak{B}$ theilbar ist.

Digitized by Google

III.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein Zahlkörper $m$ten Grades und

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{m-1} \tag{1}$$

eine Basis des Systemes der in $\mathfrak{K}$ enthaltenen ganzen algebraischen Zahlen; bezeichnen wir also — wie überall im folgenden — die Conjugirten einer in $\mathfrak{K}$ gelegenen Größe η mit $\eta, \eta', \eta'', \ldots \eta^{(m-1)}$, so ist das Quadrat der Determinante

$$| \omega_0^{(h)}, \omega_1^{(h)}, \omega_2^{(h)}, \ldots \omega_{m-1}^{(h)} | \quad (h = 0, 1, 2, \ldots m-1) \tag{2}$$

die Discriminante d des Körpers. Nun bilden wir zu dem quadratischen Systeme (2) das reciproke:

$$\begin{array}{l} \xi_0 \quad \xi_0' \quad \ldots \xi_0^{(m-1)} \\ \xi_1 \quad \xi_1' \quad \ldots \xi_1^{(m-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{m-1} \xi_{m-1}' \ldots \xi_{m-1}^{(m-1)}, \end{array} \tag{3}$$

so beweist man leicht, daß die in einer Zeile des Systemes stehenden Größen die Conjugirten einer und derselben Zahl ξ_h des Körpers $\mathfrak{K}$ sind. Die m (gebrochenen) algebraischen Zahlen

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{m-1} \tag{4}$$

hängen mit den Zahlen der Reihe (1) durch die Gleichungen zusammen:

$$\sum_{g=0}^{m-1} \omega_g^{(h)} \xi_g^{(i)} = \delta_{hi} \qquad (h, i = 0, 1, \ldots m-1) \tag{5}$$

$$S(\omega_h \xi_i) = \delta_{hi} \qquad (h, i = 0, 1, \ldots m-1), \tag{6}$$

in welchen δ_{hi} für 1 oder 0 steht, je nachdem h und i gleich oder ungleich sind, und mit $S(\alpha)$ die Summe der Conjugirten der Zahl α bezeichnet ist; von den beiden Gleichungssystemen (5) und (6) ist eines ausreichend, um die Zahlen $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{m-1}$ aus den Zahlen $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{m-1}$ (oder umgekehrt) abzuleiten.

Das System der Zahlen $\xi_0, \ldots \xi_{m-1}$ hat die wichtige Eigenschaft, daß das Product einer beliebigen ganzen Zahl ω des Körpers mit einer Zahl ξ_h eine Vielfach-Summe dieser Zahlen (d. h. eine lineare homogene Function von $\xi_0, \ldots \xi_{m-1}$ mit ganzen rationalen Zahlcoefficienten) ist. In der That, ist ω eine ganze Zahl des Körpers, so ist

$$\omega \omega_i = \sum_k r_{ik} \omega_k \qquad (i, k = 0, 1, \ldots m-1), \tag{7}$$

worin die r_{ik} ganze rationale Zahlen bedeuten, und hieraus folgt

Digitized by Google

mit Hilfe der Gleichungen (5) und (6), daß

$$\omega\,\xi_i = \sum_k r_{ik}\,\xi_k \qquad (i, k = 0, 1, \ldots m-1) \tag{8}$$

ist, womit die Behauptung erwiesen ist. Bildet man hiernach dasjenige System $\mathfrak{g}$ von Zahlen des Körpers, welches aus allen Vielfachsummen von $\xi_0 \ldots \xi_{m-1}$ besteht, so ist dasselbe erstens ein Modul im Dedekind'schen Sinne des Wortes, und es hat zweitens die Eigenschaft, die auch den Idealen zukommt, daß nämlich das Product einer Zahl des Systemes $\mathfrak{g}$ mit einer beliebigen ganzen Zahl des Körpers wiederum in dem Systeme $\mathfrak{g}$ gelegen ist. Das gleiche gilt offenbar auch für das System $\mathfrak{g}\omega$, sobald ω eine beliebige Zahl des Körpers ist, und wenn man diese Zahl so wählt, daß alle Zahlen des Systemes $\mathfrak{g}\omega$ ganze Zahlen werden, so folgt aus dem früheren, daß $\mathfrak{g}\omega$ ein Ideal ist. Also der Satz:

I. Zu jeder Basis des Körpers $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{m-1}$ gehört ein durch die Gleichungen (5) oder (6) bestimmtes complementäres System $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{m-1}$. Ist ω eine beliebige ganze Zahl des Körpers, für welche die Producte

$$\omega\,\xi_0,\ \omega\,\xi_1,\ \ldots\ \omega\,\xi_{m-1}$$

ganze Zahlen werden, so bilden diese die Basis eines Ideales des Körpers.

Es entsteht nun die Frage, wie eine ganze Zahl ω beschaffen sein muß, damit $\omega\xi_0, \omega\xi_1, \ldots \omega\xi_{m-1}$ ganze Zahlen des Körpers werden. Um diese Frage zu beantworten, bilden wir die Fundamentalform

$$w = u_0\omega_0 + u_1\omega_1 + \cdots + u_{m-1}\omega_{m-1}, \tag{9}$$

welche, wenn $u_0, u_1, \ldots u_{m-1}$ alle möglichen ganzzahligen und rationalen Werthe erhalten, alle ganzen Zahlen des Körpers durchläuft, und die Fundamentalgleichung $m$ten Grades:

$$\mathfrak{F}(x, u_0, u_1, \ldots u_{m-1}) = \prod_{h=0}^{m-1}(x - w^{(h)}) = 0, \tag{10}$$

welcher die Fundamentalform genügt. Sind nun

$$G_0(w),\ G_1(w),\ \ldots\ G_{m-1}(w)$$

primäre Functionen der Fundamentalform, deren Grad durch ihren Index angegeben sein soll (z. B. $G_h(w) = w^h$), so ist

$$G_h(w) = U_{h0}\omega_0 + U_{h1}\omega_1 + \cdots + U_{h,m-1}\omega_{m-1} \quad (h = 0, 1, 2, \ldots m-1), \tag{11}$$

worin die Coefficienten U_{hk} ganze ganzzahlige Functionen der Un-

Digitized by Google

bestimmten $u_0, u_1, \ldots u_{m-1}$ bedeuten; diese Functionen haben, wie Herr Hensel zuerst vollständig erwiesen hat[1]), die wichtige Eigenschaft, daß ihre Determinante

$$K(u_0, u_1, \ldots u_{m-1}) = |U_{hi}| \quad (h, i = 0, 1, \ldots m-1) \tag{12}$$

eine primitive Form ist, d. h. daß ihre Coefficienten keinen gemeinsamen Theiler besitzen. Bilden wir zu den Größen $G_h(w)$ die Conjugirten, so lehren die Gleichungen (11), daß das System

$$\begin{cases} G_0(w), & G_0(w'), & \ldots G_0(w^{(m-1)}) \\ G_1(w), & G_1(w'), & \ldots G_1(w^{(m-1)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{m-1}(w), & G_{m-1}(w'), & \ldots G_{m-1}(w^{(m-1)}) \end{cases} \tag{13}$$

durch Zusammensetzung der beiden Systeme

$$\begin{cases} U_{00} & U_{01} & \ldots U_{0,m-1} \\ U_{10} & U_{11} & \ldots U_{1,m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{m-1,0} & U_{m-1,1} & \ldots U_{m-1,m-1} \end{cases} \tag{14}$$

und

$$\begin{cases} \omega_0 & \omega_0' & \ldots \omega_0^{(m-1)} \\ \omega_1 & \omega_1' & \ldots \omega_1^{(m-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_{m-1} & \omega_{m-1}' & \ldots \omega_{m-1}^{(m-1)} \end{cases} \tag{15}$$

entsteht. Indem wir aus dieser Compositionsgleichung eine neue durch Uebergang zu den reciproken Systemen bilden, erlangen wir sogleich die Antwort auf die gestellte Frage; doch sind hierzu einige vorbereitende Erörterungen notwendig, die auch für die weiteren Untersuchungen von Bedeutung sind.

Wollen wir nämlich zu dem Systeme (13) das reciproke bilden, so stellen wir die Function $\frac{\mathfrak{F}(x)}{x-w}$, welche eine ganze Function von x und w ist, als lineare homogene Function der Größen $G_0(x), \ldots G_{m-1}(x)$ dar; erhält man so:

$$\frac{\mathfrak{F}(x)}{x-w} = \mathfrak{F}_0(w) \cdot G_{m-1}(x) + \mathfrak{F}_1(w) G_{m-2}(x) + \cdots + \mathfrak{F}_{m-1}(w) G_0(x), \tag{16}$$

so sind, wie leicht ersichtlich, die Coefficienten $\mathfrak{F}_0(w)$, $\mathfrak{F}_1(w)$, $\ldots \mathfrak{F}_{m-1}(w)$ primäre ganze Functionen der Fundamentalform w, deren Grad durch ihren Index angegeben wird. Mit Hilfe dieser Entwickelung ergiebt sich das reciproke System zu dem Systeme (13) in der nachfolgenden Gestalt:

---

1) Untersuchung der Fundamentalgleichung einer Gattung für eine reelle Primzahl als Modul und Bestimmung der Theiler ihrer Discriminante (Crelles Journal Bd. 113).

Digitized by Google

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{llll} \frac{\mathfrak{F}_{m-1}(w)}{\mathfrak{F}'(w)}, & \frac{\mathfrak{F}_{m-2}(w)}{\mathfrak{F}'(w)}, & \ldots. & \frac{\mathfrak{F}_0(w)}{\mathfrak{F}'(w)} \\ \frac{\mathfrak{F}_{m-1}(w')}{\mathfrak{F}'(w')}, & \frac{\mathfrak{F}_{m-2}(w')}{\mathfrak{F}'(w')}, & \ldots. & \frac{\mathfrak{F}_0(w')}{\mathfrak{F}'(w')} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \frac{\mathfrak{F}_{m-1}(w^{(m-1)})}{\mathfrak{F}'(w^{(m-1)})}, & \frac{\mathfrak{F}_{m-2}(w^{(m-1)})}{\mathfrak{F}'(w^{(m-1)})}, & \ldots. & \frac{\mathfrak{F}_0(w^{(m-1)})}{\mathfrak{F}'(w^{(m-1)})}. \end{array}\right.$$

In der That folgt aus den Gleichungen (16), daß

$$\mathfrak{F}_0(w^{(h)})\,G_{m-1}(w^{(i)}) + \mathfrak{F}_1(w^{(h)})\,G_{m-2}(w^{(i)}) + \cdots + \mathfrak{F}_{m-1}(w^{(h)})\,G_0(w^{(i)}) = \mathfrak{F}'(w^{(h)})\cdot\delta_{hi} \qquad (h, i = 0, 1, \ldots m-1)$$

ist, und diese Relationen beweisen die vorher aufgestellte Behauptung.

Bezeichnet man nun das System (17) für den Augenblick kurz mit $(\mathfrak{R})$, so ergiebt sich durch Umkehrung der vorigen Compositionsgleichung die neue

$$(18)\qquad (\mathfrak{R})\cdot(U_{hi}) = (\xi_0^{(h)}, \xi_1^{(h)}, \ldots. \xi_{m-1}^{(h)}) \quad (h, i = 0, 1, \ldots m-1),$$

eine Gleichung, welche in das folgende System von Relationen aufgelöst werden kann:

$$(19)\left\{\begin{array}{lllll} \mathfrak{F}'(w)\cdot\xi_0 & = U_{00}\,\mathfrak{F}_{m-1}(w) + U_{10}\,\mathfrak{F}_{m-2}(w) + \cdots + U_{m-1,0}\,\mathfrak{F}_0(w) \\ \mathfrak{F}'(w)\cdot\xi_1 & = U_{01}\,\mathfrak{F}_{m-1}(w) + U_{11}\,\mathfrak{F}_{m-2}(w) + \cdots + U_{m-1,1}\,\mathfrak{F}_0(w) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \mathfrak{F}'(w)\cdot\xi_{m-1} & = U_{0,m-1}\mathfrak{F}_{m-1}(w) + U_{1,m-1}\mathfrak{F}_{m-2}(w) + \cdots + U_{m-1,m-1}\mathfrak{F}_0(w). \end{array}\right.$$

Diese für die Folge sehr wichtigen Gleichungen gestatten nun eine Reihe von Schlüssen. Die Größe $\mathfrak{F}'(w)$ ist eine Form der Unbestimmten $u_0, u_1, \ldots u_{m-1}$, deren Coefficienten ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}$ sind; der größte gemeinsame Theiler dieser Coefficienten ist ein Ideal $\mathfrak{d}$, welches von Herrn Dedekind als Grundideal, von Herrn Hilbert als Differente des Körpers $\mathfrak{K}$ bezeichnet wird. Die Gleichungen (19) zeigen nun, daß die m Moduln

$$\mathfrak{d}\,\xi_0,\ \mathfrak{d}\,\xi_1,\ \ldots.\ \mathfrak{d}\,\xi_{m-1}$$

lauter ganze Zahlen enthalten, oder, was auf ganz dasselbe hinauskommt, daß die mit den $2m$ Unbestimmten $u_0, u_1, \ldots u_{m-1}, v_0, v_1, \ldots v_{m-1}$ gebildete Zahlform

$$(20)\qquad \Phi = \mathfrak{F}'(w)\cdot(v_0\xi_0 + v_1\xi_1 + \cdots + v_{m-1}\xi_{m-1})$$

ganze algebraische Zahlcoefficienten besitzt. Es ist aber weiter sofort ersichtlich, daß die Form Φ eine Einheitsform ist, d. h. daß

Digitized by Google

ihre Coefficienten keinen gemeinsamen Theiler haben. Denn hätten sie sämmtlich ein Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers zum Theiler, wäre also

$$\mathfrak{F}'(w)\cdot\xi_0 \equiv 0,\ \mathfrak{F}'(w)\cdot\xi_1 \equiv 0,\ \ldots \mathfrak{F}'(w)\cdot\xi_{m-1} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

so würde aus den Gleichungen (19), da ihre Determinante $K(u_0, u_1, \ldots u_{m-1})$ eine primitive Form und also nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, folgen, daß

$$\mathfrak{F}_{m-1}(w) \equiv \mathfrak{F}_{m-2}(w) \equiv \cdots \equiv \mathfrak{F}_0(w) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist, und das ist unmöglich, weil $\mathfrak{F}_0(w) = 1$ ist. Wählt man also irgend eine ganze Zahl ω des Körpers, für welche $\omega\xi_0, \omega\xi_1, \ldots \omega\xi_{m-1}$ ganze Zahlen werden, also $\omega\mathfrak{g}$ ein Ideal ist, so ist $\omega\Phi \sim \omega$ oder

$$\mathfrak{d}\cdot\omega\mathfrak{g} = \omega, \tag{21}$$

und die ganze Zahl ω muß somit durch die Differente $\mathfrak{d}$ des Körpers theilbar sein. Wenn umgekehrt diese Bedingung erfüllt ist, so ist

$$\omega\Phi = \mathfrak{F}'(w)\cdot(v_0\omega\xi_0 + v_1\omega\xi_1 + \cdots + v_{m-1}\omega\xi_{m-1})$$

durch $\mathfrak{d}$ theilbar, und folglich müssen $\omega\xi_0, \ldots \omega\xi_{m-1}$ ganze Zahlen des Körpers sein. Also der Satz:

II. Damit die Zahlen

$$\omega\xi_0,\ \omega\xi_1,\ \ldots \omega\xi_{m-1}$$

ganze Zahlen und der Modul $[\omega\xi_0, \omega\xi_1, \ldots \omega\xi_{m-1}] = \omega\mathfrak{g}$ ein Ideal werde, ist nothwendig und hinreichend, daß die Zahl ω durch die Differente $\mathfrak{d}$ des Körpers theilbar sei.

Da die Norm des Ideales $\mathfrak{d}$ gleich der Körperdiscriminante d ist, so gehört die Zahl d mit zu den Zahlen ω, für die $\omega\mathfrak{g}$ ein Ideal wird.

Weitere Folgerungen ergeben sich aus dem Gleichungssystem (19), sobald man für die Unbestimmten $u_0, u_1, \ldots u_{m-1}$ irgend welche ganzen und rationalen Zahlwerthe $a_0, a_1, \ldots a_{m-1}$ einträgt. Die Fundamentalform w geht alsdann in eine ganze Zahl

$$\Theta = a_0\omega_0 + a_1\omega_1 + \cdots + a_{m-1}\omega_{m-1} \tag{22}$$

des Körpers über, die Fundamentalgleichung in die charakteristische Gleichung der Zahl Θ:

$$\mathfrak{F}(x, a_0, a_1, \ldots a_{m-1}) = F(x) = \prod_{h=0}^{m-1}(x - \Theta^{(h)}) = 0; \tag{23}$$

endlich wird die Form $\mathfrak{F}'(w)$, wenn man $u_h = a_h$, also $w = \Theta$

Digitized by Google

setzt, gleich der Differente δ der Zahl Θ:

$$(24) \qquad \begin{aligned} \delta &= \mathfrak{F}'(\Theta, a_0, a_1, \ldots a_{m-1}) = \\ &= F'(\Theta) = (\Theta-\Theta')(\Theta-\Theta'')\ldots(\Theta-\Theta^{(m-1)}). \end{aligned}$$

Die Gesammtheit der ganzen ganzzahligen Functionen von Θ bildet einen in $\mathfrak{R}$ gelegenen Zahlenring, und zwar einen sogenannten regulären Zahlenring, sobald die Differente δ von Null verschieden, also die Function $F(x)$ irreductibel ist. Da die Differente δ der Zahl Θ offenbar durch die Körperdifferente $\mathfrak{d}$ theilbar ist, so bilden die Zahlen

$$\delta\xi_0, \ \delta\xi_1, \ \ldots . \delta\xi_{m-1}$$

die Basiszahlen eines Ideales

$$(25) \qquad \mathfrak{f} = \delta\mathfrak{g} = \delta[\xi_0^m, \ \xi_1, \ \ldots \xi_{m-1}^1],$$

und die Gleichungen (19) zeigen, wenn man in ihnen $u_\lambda = a_\lambda$ setzt, daß die Basiszahlen und also alle Zahlen des Ideales ganze ganzzahlige Functionen von Θ, also Zahlen des Ringes sind. Wählt man also irgend eine durch $\mathfrak{f}$ theilbare Zahl α des Körpers, so hat das zugehörige Hauptideal (α) die Eigenschaft, daß alle seine Zahlen im Ringe gelegen sind. Man kann aber auch umgekehrt beweisen, daß jedes Hauptideal (α), dessen Zahlen sämmtlich Zahlen des Ringes sind, durch das Ideal $\mathfrak{f}$ theilbar sein muß. In der That, wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, so ist

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha\omega_0 &= r_{00} + r_{01}\Theta + \cdots + r_{0,m-1}\Theta^{m-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha\omega_{m-1} &= r_{m-1,0} + r_{m-1,1}\Theta + \cdots + r_{m-1,m-1}\Theta^{m-1}, \end{aligned} \right.$$

worin die r_{ik} ganze und rationale Zahlen sind. Hieraus folgt mit Hilfe der bekannten Euler'schen Formeln

$$(27) \qquad r_{h,m-1} = S\left(\frac{\alpha\omega_\lambda}{F'(\Theta)}\right) \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots m-1),$$

und aus diesen Gleichungen ergiebt sich mit Hilfe der Relationen (5), daß

$$(28) \qquad r_{0,m-1}\xi_0 + r_{1,m-1}\xi_1 + \cdots + r_{m-1,m-1}\xi_{m-1} = \frac{\alpha}{F'(\Theta)}$$

ist, es ist also α in der That eine Zahl des Ideales $\mathfrak{f}$.

Das Ideal $\mathfrak{f}$ ist hiernach der größte gemeinschaftliche Theiler aller derjenigen Hauptideale des Körpers, deren Zahlen sämmtlich im Ringe gelegen sind; dieses völlig bestimmte Ideal heißt nach Herrn Dedekind der Führer des Ringes. Der Führer des

Digitized by Google

zur Zahl Θ gehörigen Zahlringes ist also einfach das Ideal $\delta\mathfrak{g}$, wo δ die Differente von Θ bedeutet, und da δ durch $\mathfrak{d}$ theilbar ist, so folgt aus der Gleichung (21), wenn man $\omega = \delta$ setzt:

$$\delta = \mathfrak{d}\mathfrak{f}. \tag{29}$$

Wir haben also den Satz:

III. Wenn ein regulärer Zahlenring durch die ganze Zahl Θ constituirt wird, und δ die Differente von Θ bedeutet, so ist der Führer des Ringes $\mathfrak{f}$ gleich

$$\delta\mathfrak{g} = [\delta\xi_0, \delta\xi_1, \ldots \delta\xi_{m-1}],$$

und es ist $\delta = \mathfrak{d}\mathfrak{f}$, wobei $\mathfrak{d}$ die Differente des Körpers ist.

Wenn man für die Unbestimmten u_λ die Zahlwerthe a_λ einträgt, so mögen die Coefficienten $U_{\lambda\mu}$ in den Gleichungen (11) übergehen in die rationalen ganzen Zahlen $A_{\lambda\mu}$ und es werde ihre Determinante

$$K(a_0, a_1, \ldots a_{m-1}) = |A_{\lambda\mu}| = k; \tag{30}$$

dann heißt nach einer Bezeichnung Dedekinds die von Null verschiedene ganze rationale Zahl k der Index der Zahl Θ oder auch der Index des zur Zahl Θ gehörigen Ringes. Dieselben Gleichungen zeigen, daß die Norm der Differente δ

$$N(\delta) = k^2 d$$

ist, und da $N(\mathfrak{d}) = d$ ist, so folgt aus der Gleichung (29), daß die Norm des Führers

$$N(\mathfrak{f}) = k^2 \quad \text{ist.} \tag{31}$$

Die Sätze dieses Paragraphen sind zuerst aufgestellt worden von Herrn Dedekind in seiner Schrift „Ueber die Discriminante endlicher Körper“ (Göttinger Abhandlungen, Bd. 29, 1882), sie sind aber daselbst mit ganz anderen Mitteln hewiesen. Indem wir aber nun die Resultate der letzten Untersuchung in Verbindung bringen mit der Theorie der allgemeinen Modulsysteme zweiter Stufe, gelangen wir zu einigen weiteren Erkenntnissen, welche die Constitution des Führers des Ringes (Θ) und seine Beziehung zur Basis des übergeordneten Zahlkörpers betreffen.

IV.

Es seien

$$\alpha_1 = A_1(\Theta), \ \alpha_2 = A_2(\Theta), \ \ldots \alpha_n = A_n(\Theta)$$

irgend welche Zahlen des Ringes (Θ), so versteht man unter dem

Digitized by Google

Ringideal

$$\mathfrak{a}' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$$

die Gesammtheit der Zahlen der Form

$$\xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \cdots + \xi_n\alpha_n,$$

wobei $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ebenfalls dem Ringe angehören sollen. Zum Unterschiede von den Körperidealen mögen die Ringideale mit gestrichenen kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet sein.

Ist $F(\Theta) = 0$ wieder die irreductibele Gleichung $m$ten Grades, welcher die Zahl Θ genügt, so folgt unmittelbar aus der Definition, daß die Zahl $\xi = X(\Theta)$ des Ringes dann und nur durch das Ideal $\mathfrak{a}'$ theilbar ist, wenn die Function $X(x)$ theilbar ist durch das Modulsystem

$$\mathfrak{A} = (F(x), A_1(x), A_2(x), \ldots A_n(x)),$$

dessen Elemente offenbar keinen Theiler erster Stufe aufweisen. Alle Umformungen, die wir in den ersten beiden Abschnitten mit den Modulsystemen vorgenommen haben, dürfen wir hiernach auf $\mathfrak{A}$ anwenden und dieses Modulsystem also auch in einer Normalform voraussetzen. Also gilt der Satz:

IV. Jedes Ringideal $\mathfrak{a}'$ ist aequivalent einem bestimmten Modulsystem zweiter Stufe in der Normalform:

$$\mathfrak{B} = (\Phi_1(x), e_1\Phi_2(x), e_2\Phi_3(x), \ldots e_{r-1}\Phi_r(x), e_r);$$

d. h. die Zahl $X(\Theta)$ ist dann und nur dann theilbar durch $\mathfrak{a}'$, wenn die Function $X(x)$ theilbar ist durch $\mathfrak{B}$.

Die Ringideale lassen sich nun von vornherein in zwei Classen scheiden, je nachdem nämlich in dem vorgelegten Modulsysteme $\mathfrak{A}$ die Functionen $A_1, A_2, \ldots A_n$ einen gemeinsamen Zahlentheiler haben oder nicht. Ist das letztere der Fall, so folgt aus dem Hilfssatze des ersten Paragraphen, da die Grade der Functionen $A_1, A_2, \ldots A_n$ kleiner als m und ihre Anzahl n größer als 1 vorausgesetzt werden darf, daß die primäre Function niedrigsten Grades, welche durch $\mathfrak{A}$ theilbar ist, ebenfalls von niedrigerem als dem $m$ten Grade ist; alsdann ist also in der Normalform $\mathfrak{B}$ des Modulsystemes der Grad von Φ_1 kleiner als m, und es ist die charakteristische Function $F(x)$ durch $\mathfrak{B}$ theilbar, was eine Bedingung für das Modulsystem abgiebt. Wenn andererseits $A_1, A_2, \ldots A_n$ alle einen Zahlentheiler f haben, so sei nach der Reduction auf die Normalform

$$\left(F(x), \frac{A_1(x)}{f}, \frac{A_2(x)}{f}, \ldots \frac{A_n(x)}{f}\right) \sim (\Psi_1, f_1\Psi_2, f_2\Psi_3, \ldots f_r) = \mathfrak{H},$$

Digitized by Google

dann ist offenbar

$$(F(x),\ A_1(x),\ \ldots A_n(x)) \sim (F_r,\ f\Psi_1,\ ff_1\Psi_2,\ \ldots ff_r),$$

und dieses letzte System hat die Normalform, weil $F \equiv 0 \pmod{\mathfrak{H}}$ ist. Wenn also $A_1, \ldots A_n$ einen Zahlentheiler haben, so darf die primäre Function Φ_1 des auf die Normalform gebrachten Modulsystemes gleich F angenommen werden und hat also den Grad m. In beiden Fällen ist mit der Normalform $\mathfrak{B}$ des Modulsystemes auch eine Basis des Ideales $\mathfrak{a}'$ gegeben; haben nämlich $A_1, \ldots A_n$ keinen Zahlentheiler und sind hiernach die Grade $m_1, m_2, \ldots m_r$ der Functionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_r$ sämmtlich kleiner als m, so bilden die m Zahlen

$$\Theta^{\sigma_0}\Phi_1(\Theta),\ e_1\Theta^{\sigma_1}\Phi_2(\Theta),\ e_2\Theta^{\sigma_2}\Phi_3(\Theta),\ \ldots\ e_{r-1}\Theta^{\sigma_{r-1}}\Phi_{r-1}(\Theta),\ e_r\Theta^{\sigma_r}$$

eine Basis, wenn σ_0 die Werthe 0 bis $m-m_1-1$, σ_1 die Werthe 0 bis m_1-m_2-1, $\ldots \sigma_{r-1}$ die Werthe 0 bis $m_{r-1}-m_r-1$, schließlich σ_r die Werthe 0 bis m_r-1 durchläuft, und analog ist die Bildung im zweiten Falle. Hierbei können natürlich die Potenzen Θ^{σ_k} auch durch irgend welche primäre Functionen von Θ ersetzt werden. Die m so erhaltenen Basiszahlen des Ideals $\mathfrak{a}'$ haben die besondere Eigenschaft, daß sie in Bezug auf Θ die Grade 0, 1, $\ldots m-1$ besitzen, und umgekehrt erkennt man leicht, daß die Basis eines Ringideales, wenn sie von m Zahlen gebildet ist, die in Bezug auf Θ die Grade 0, 1, $\ldots m-1$ haben, in der soeben dargelegten einfachen Beziehung zu einem Modulsystem in der Normalform stehen muß.

Kehren wir nun zu den Untersuchungen des vorigen Abschnittes zurück, so sind die Zahlen

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \ldots \omega_{m-1}, \tag{1}$$

welche die Basis des Körpers bilden, ganze Functionen von Θ mit rationalen Zahlcoefficienten, und nun besteht der Ausgangspunkt der ferneren Untersuchungen darin, daß bei passender Auswahl der Körperbasis die Zahlen $\omega_0 \ldots \omega_{m-1}$ ebenfalls in einfachster Beziehung zu einem bestimmten Modulsystem zweiter Stufe stehen. Es sei nämlich f_r die kleinste ganze rationale Zahl, welche durch den Führer $\mathfrak{f}$ des Ringes (Θ) theilbar ist, so ist das Körperideal (f_r) zugleich ein Ringideal und ist infolgedessen einem Modulsystem in der Normalform aequivalent, das in der Gestalt

$$\mathfrak{G} = (\Psi_1,\ f_1\Psi_2,\ f_2\Psi_3,\ \ldots f_{r-1}\Psi_r,\ f_r) \tag{32}$$

angenommen sein möge. Es ist nun zunächst ersichtlich, daß von den beiden vorher unterschiedenen Fällen bei dem Modulsysteme

Digitized by Google

$\mathfrak{G}$ allemal der erste eintreten muß, also die Gradzahlen m_λ der Functionen Ψ_λ alle kleiner als m sind. Würde nämlich die zweite Möglichkeit statthaben, also $m_1 = m$ und $\Psi_1 = F$ sein, so würden die m-Zahlen

$$f_1\Theta^{\sigma_1}\Psi_2(\Theta),\ f_2\Theta^{\sigma_2}\Psi_3(\Theta),\ \ldots\ldots f_{r-1}\Theta^{\sigma_{r-1}}\Psi_r(\Theta),\ f_r\Theta^{\sigma_r},$$

wenn σ_λ die Zahlen 0 bis $m_\lambda - m_{\lambda+1} - 1$ durchläuft, eine Basis des Körperideals (f_r) bilden. Dividirt man diese Zahlen durch f_1, so hätte man eine Basis des Körperideals $\left(\frac{f_r}{f_1}\right)$, und dieses würde ebenfalls ganz und gar im Ringe gelegen sein und es wäre also f_r nicht die kleinste ganze rationale Zahl, welche durch f theilbar ist. Hiernach ist also

$$F \equiv 0 \pmod{\mathfrak{G}} \tag{33}$$

und die Basis des Körperideals (f_r) hat, wenn man die Functionen nach der Größe der Gradzahlen in aufsteigender Folge ordnet, folgende Gestalt:

$$[f_r\Theta^{\sigma_r},\ f_{r-1}\Theta^{\sigma_{r-1}}\Psi_r(\Theta)\ldots\ldots f_1\Theta^{\sigma_1}\Psi_2(\Theta),\ \Theta^{\sigma_0}\Psi_1(\Theta)] \tag{34}$$
$$(\sigma_\lambda = 0, 1, \ldots m_\lambda - m_{\lambda+1} - 1)\,(m_0 = m).$$

Diese Zahlen braucht man bloß sämmtlich durch f_r zu dividiren um eine Basis des Körpers $\mathfrak{K}$ zu erhalten.

Neben das Modulsystem $\mathfrak{G}$ stellt sich nun ein zweites, mit ihm in Zusammenhang stehendes Modulsystem $\mathfrak{F}$, nämlich dasjenige, welches dem Führer $\mathfrak{f}$ des Ringes aequivalent ist. Offenbar ist es erlaubt, die Functionen $G_h (h = 0, 1, \ldots m-1)$ in den Gleichungen (11) des vorigen Paragraphen, welche ganz beliebige primäre Functionen des Grades h waren, der Reihe nach gleich den in (34) erscheinenden Functionen

$$x^{\sigma_r},\ x^{\sigma_{r-1}}\Psi_r(x),\ \ldots\ldots x^{\sigma_0}\Psi_1(x) \quad (\sigma_\lambda = 0, 1, \ldots m_\lambda - m_{\lambda+1} - 1)$$

anzunehmen und auch die Basis $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{m-1}$ in der speciellen durch (34) gegebenen Gestalt vorauszusetzen. Thut man dies, so gehen in den Gleichungen (11) die Functionen $(U_{\lambda i})$, wenn man von der Fundamentalform $w = \Sigma u_\lambda \omega_\lambda$ zu $\Theta = \Sigma a_\lambda \omega_\lambda$ übergeht, also $u_\lambda = a_\lambda$ setzt, in ein Zahlsystem über, welches außerhalb der Diagonale lauter Nullen und in der Diagonale der Reihe nach die folgenden m Elemente enthält:

$$(1)^{m_r}\cdot\left(\frac{f_r}{f_{r-1}}\right)^{m_{r-1}-m_r}\cdot\left(\frac{f_r}{f_{r-1}}\right)^{m_{r-2}-m_{r-1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{f_r}{f_1}\right)^{m_1-m_2}\cdot(f_r)^{m-m_1}; \tag{35}$$

hierbei zeigen die Exponenten an, wie oft die in der Klammer

Digitized by Google

stehende ganze Zahl in der Diagonale erscheint. Das Product dieser m Zahlen, welche in der durch (35) gegebenen Reihenfolge mit $k_0, k_1, \ldots k_{m-1}$ bezeichnet sein mögen, ist gleich dem Index k des Ringes (Θ) und es ist also

$$k = \frac{f_r^m}{N(\mathfrak{G})}. \tag{36}$$

Nun wissen wir aus den früheren Betrachtungen, daß die Basis des Führers $\mathfrak{f}$ gebildet wird durch die m-Zahlen:

$$F'(\Theta)\xi_0,\ F'(\Theta)\xi_1,\ \ldots\ldots F'(\Theta)\xi_{m-1},$$

und die Gleichungen (19) zeigen, wenn man in ihnen $u_\lambda = a_\lambda$ setzt, daß diese m-Zahlen der Reihe nach den folgenden gleich sind:

$$k_0\overline{\mathfrak{F}}_{m-1}(\Theta),\ k_1\overline{\mathfrak{F}}_{m-2}(\Theta),\ k_2\overline{\mathfrak{F}}_{m-3}(\Theta),\ \ldots\ldots k_{m-1}\overline{\mathfrak{F}}_0(\Theta),$$

wobei durch die Horizontalstriche angedeutet sein soll, daß für die Unbestimmten u_λ in den Coefficienten der Functionen $\mathfrak{F}(\Theta)$ die Zahlwerthe a_λ substituirt sind. Da nun $\overline{\mathfrak{F}}_i(x)$ eine primäre Function des Grades i ist, so muß diese Basis des Führers $\mathfrak{f}$ in dem vorher erwähnten Zusammenhang mit einem bestimmten Modulsystem in der Normalform stehen, welches wir in der folgenden Form anzunehmen haben

$$\mathfrak{F} = \left(X_1(x),\ \frac{f_r}{f_{r-1}}X_2(x),\ \frac{f_r}{f_{r-2}}X_3(x),\ \ldots\ldots\frac{f_r}{f_1}X_r(x),\ f_r\right); \tag{37}$$

hierbei sind $X_1, X_2, X_3, \ldots X_r$ primäre Functionen, deren Gradzahlen der Reihe nach gleich $m-m_r, m-m_{r-1}, m-m_{r-2}, \ldots\ldots m-m_1$ sind, es ist nämlich

$$X_\lambda(x) = \overline{\mathrm{F}}_{m-m_{r+1-\lambda}}(x).$$

Die Modulsysteme $(\mathfrak{F})$ und $(\mathfrak{G})$, welche den Idealen $\mathfrak{f}$ und (f_r) aequivalent sind, stehen somit in einem ganz bestimmten Zusammenhange mit einander, es ist ferner

$$N(\mathfrak{F}) = k, \tag{38}$$

und es ist $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{F}$ theilbar, weil das Ideal (f_r) durch $\mathfrak{f}$ theilbar ist, und zu diesen Beziehungen tritt nun noch eine weitere, die jetzt abgeleitet werden soll.

Betrachten wir nämlich das Ideal $(f_r\mathfrak{f})$, so kann das ihm aequivalente Modulsystem in zwiefacher Gestalt dargestellt werden. Erstens nämlich bekommen wir unmittelbar das folgende Modulsystem

$$(F(x), f_r\mathfrak{F}) = \left(F,\ f_rX_1,\ \frac{f_r^2}{f_{r-1}}X_2,\ \ldots\ldots f_r^2\right),$$

Digitized by Google

welches offenbar die Normalform hat, da F durch $\mathfrak{G}$, also auch durch $\mathfrak{F}$ theilbar ist. Andererseits bekommen wir lauter durch $f_r\mathfrak{f}$ theibare Zahlen, wenn wir in der Linearform

$$\xi_1 \cdot X_1(\Theta) + \xi_2 \cdot \frac{f_r}{f_{r-1}} X_2(\Theta) + \cdots + \xi_r \cdot \frac{f_r}{f_1} X_r(\Theta) + \xi_{r+1} \cdot f_r$$

für $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{r+1}$ irgend welche durch f_r theilbare Zahlen des Körpers annehmen. Die entsprechenden Functionen von x müssen durch das Modulsystem $\mathfrak{G}$ theilbar sein, und folglich ist das Product der Modulsysteme $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ theilbar durch $(F, f_r\mathfrak{F})$. Andererseits ist das letztere Modulsystem theilbar durch das Product $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$, und es gilt also die Aequivalenz:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{G} \sim (F(x), f_r\mathfrak{F}). \tag{39}$$

Alle diese Ergebnisse fassen wir in folgenden Satz zusammen:

V. Wenn f_r die kleinste ganze rationale Zahl ist, welche durch den Führer $\mathfrak{f}$ des Ringes (Θ) theilbar ist und das Ideal (f_r) aequivalent ist dem Modulsystem in der Normalform

$$\mathfrak{G} = (\Psi_1, f_1\Psi_2, f_2\Psi_3, \ldots f_{r-1}\Psi_r, f_r),$$

in welchem Ψ_ϱ eine primäre Function des Grades m_ϱ bedeutet, so ist der Führer $\mathfrak{f}$ des Ringes aequivalent einem Modulsystem der Form

$$\mathfrak{F} = \left(X_1, \frac{f_r}{f_{r-1}} X_2, \frac{f_r}{f_{r-2}} X_3 \ldots \frac{f_r}{f_1} X_r, f_r\right),$$

in welchem X_ϱ eine primäre Function des Grades $m - m_{r+1-\varrho}$ bedeutet.

Es ist ferner die charakteristische Function $\mathfrak{F}$ der Zahl Θ durch $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{F}$ theilbar und es besteht die Aequivalenz:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{G} \sim (F, f_r\mathfrak{F}),$$

in welcher das zweite Modulsystem die Normalform hat.

Digitized by Google

Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium zu Göttingen (VI).

Von

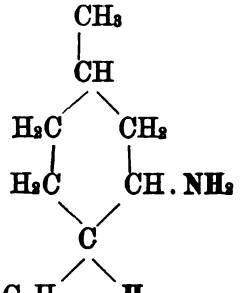
O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 27. November 1897.

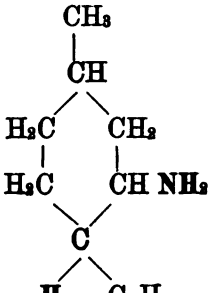
1) Ueber cis- und trans-Isomerie in der Menthol-Reihe.

Während bei der Reduction von *l*-Menthonoxim (Schmp. 59°) ein einheitliches *l*-Menthylamin ($[\alpha]_D = -38,^{\circ}07$) entsteht, wird bei der Behandlung von Menthon mit Ammoniumformiat ein Gemenge von *l*- und *d*-Menthylamin ($[\alpha]_D = +14,^{\circ}71$) gebildet. Aus Versuchen, die Hr. D. T. Werner auf meine Veranlassung ausgeführt hat, läßt sich nun schließen, daß die Isomerie der beiden Basen auf einer s. g. cis-trans-Isomerie beruht.

Setzt man nämlich beide Verbindungen mit salpetriger Säure um, so entsteht aus dem *l*-Menthylamin ziemlich glatt das gewöhnliche feste *l*-Menthol. Das *d*-Menthylamin aber liefert fast ausschließlich Menthen. Daraus folgt, daß das dem *d*-Menthylamin zugehörige *d*-Menthol ungleich mehr zur Wasser-Abspaltung neigt als das gewöhnliche *l*-Menthol, daß also das Hydroxyl des letzteren dem tertiär gebundenen Wasserstoffatom an dem benachbarten Kohlenstoffatom räumlich ferner steht als es bei dem *d*-Menthol der Fall ist. Man kann das durch folgende Formelbilder verdeutlichen:



cis-
(*d*-)Menthylamin



trans-
(*l*-)Menthylamin.

Digitized by Google

Ersetzt man in den Formeln NH_2 durch OH, so hat man die entsprechenden Menthole und sieht, daß das cis-Menthol durch Wasserabspaltung leichter in Menthen übergehen kann als das trans-Menthol.

Bezüglich der beiden Menthylamine sind weiter folgende Thatsachen ermittelt.

Durch erschöpfende Einwirkung von Jodmethyl kann man die Basen in Ammoniumjodide umwandeln. Das *l*-Ammoniumjodid, $C_{10}H_{19}N(CH_3)_3J.$, schmilzt bei 190°, die *d*-Verbindung bei 160° —161°. DurchUmsetzung mit feuchtem Silberoxyd entstehen aus den Jodiden krystallinische, in Wasser sehr lösliche und zerfließliche Ammoniumbasen. Werden die entwässerten Basen unter Atmosphärendruck destillirt, so zerfallen sie unter Bildung von Menthen nach der Gleichung:

$$C_{10}H_{19}N(CH_3)_3OH = C_{10}H_{18} + H_2O + N(CH_3)_3.$$

Für das Menthen aus *l*-Menthylamin wurde gefunden:

$$d = 0.811,\ n_D = 1{,}45\,209 \text{ bei } 18°,\ [\alpha]_D = +89.°307.$$

Dies Menthen unterschied sich von dem aus der Ammoniumbase des *d*-Menthylamin und aus dem durch Umsetzung des *d*-Menthylamin mit Natriumnitrit gewonnenen Kohlenwasserstoff dadurch, daß es bisher nicht gelang ein festes Nitrosochlorid daraus zu erhalten.

Vom *l*-Menthylamin sind durch Einführung von Methyl-, Aethyl-, *n*-Propyl und *i*-Butyl-Radicalen die zugehörigen secundären Amine und aus diesen die Nitroso-Verbindungen dargestellt worden. Dabei stellte es sich heraus, daß die Nitroso-Amine mit ungeradem Kohlenstoffgehalt flüssig und die mit geradem Kohlenstoffgehalt feste Körper waren, wie folgende Tabelle zeigt.

Aus *l*-Menthylamin	Schmelzp.	Siedep. bei 20mm
$C_{10}H_{19}N\begin{matrix}CH_3\\NO\end{matrix}$	flüssig	145—146°
$C_{10}H_{19}N\begin{matrix}C_2H_5\\NO\end{matrix}$	52—53°	153—156°
$C_{10}H_{19}N\begin{matrix}C_3H_7(n)\\NO\end{matrix}$	flüssig	159—161°

Digitized by Google

$C_{10}H_{19}N\begin{matrix}C_4H_9(i)\\NO\end{matrix}$	52—53°	160—161°

Sehr auffallende Verschiedenheiten wurden bezüglich der Beständigkeit der Acyl-Derivate des *d*-Menthylamin beobachtet. Während nämlich das Formyl-*d*-Menthylamin, $C_{10}H_{19}NHCOH$, sich durch Kochen mit conc. Salzsäure sehr leicht in die Componenten spalten läßt, widersteht die Acetyl-Verbindung, $C_{10}H_{19}NHCOCH_3$, der Einwirkung kochender Salzsäure derselben Concentration und wurde erst durch mehrstündiges Erhitzen mit Salzsäure auf 170° zerlegt.

Zur besseren Characterisirung und Unterscheidung des *d*- und *l*-Menthylamin sind die bis dahin nicht bekannten Carbamide und Phenylcarbamide dargestellt, welche folgende Schmelzpuncte aufweisen:

	$C_{10}H_{19}NH.CONH_2$	$C_{10}H_{19}NHCONHC_6H_5$
aus *l*-Amin	134—136°	140—141°
„ *d*- „	155—156°	177—178°

Für die freien Basen wurde gefunden:

	Siedep.	*d*	n_D
l-Menthylamin	209—210°	0.86	1.46 058
d- „	207—208°	0.857	1.45 940.

2) Ueber Ketone $C_{10}H_{16}O$ aus Terpinennitrit.

Nachdem es gelungen war durch Reduction des Phellandrennitrits zu wohl characterisirten Verbindungen zu gelangen, habe ich in Gemeinschaft mit Herrn H. Lauffer entsprechende Versuche mit Terpinennitrit angestellt. Reducirt man dieses in alkoholischer Lösung mit Natrium, so lassen sich basische und nicht basische Producte isoliren. Unter den letzteren findet sich Cymol und außerdem ein Carvon-ähnlich riechendes, ungesättigtes Keton, $C_{10}H_{16}O$ das bei gewöhnlichem Druck zwischen 213—220° siedete und ein bei 83—84° schmelzendes Oxim lieferte. Bei der Reduction des letzteren entstand eine Base $C_{10}H_{17}NH_2$, Siedep. 209—210°, $d = 0.8725$, $n_D = 1.4717$

	berechnet für $C_{10}H_{17}NH_2$ *F*	Gefunden
M	49.13	49.18

Der Carbamid der Base, $C_{10}H_{17}NHCONH_2$, schmilzt bei 171°, die schlecht krystallisirende Acetyl-Verbindung bei 68°.

Digitized by Google

Bei der Umsetzung der Base mit Natriumnitrit entstand ein Alkohol, der bei der Oxydation wieder ein Keton $C_{10}H_{16}O$ gab, dessen Oxim aber bei 96—98° schmolz. Das Keton aus der Base ist also nicht identisch mit dem aus dem Terpinennitrit direct erhältlichen und konnte ebenso wenig wie jenes bisher mit einem der bekannten Ketone $C_{10}H_{16}O$ identificirt werden.

3) Ueber Reductionsproducte des Carvons und Eucarvons.

Ueber die Entstehung schön krystallisirter Producte bei der Reduction von Carvon und Carvonhydrochlorid mit Zink und Natronlauge ist schon früher berichtet worden. (Nach d. G. d. W. 1894 S. 165, 1895 S. 182). Diese Substanzen sind jetzt von Hrn. Löhr eingehender untersucht worden.

Aus *d*-Carvon entsteht bei der directen Reduction lediglich ein krystallisirtes Diketon der Formel $C_{20}H_{30}O_2$. Die Verbindung soll von jetzt an als α-Dicarvelon bezeichnet werden. Man kann das Diketon aber weiter in zwei Isomere verwandeln. Addirt man nämlich an das α-Dicarvelon Bromwasserstoff und spaltet dann durch alkoholisches Alkali wieder BrH ab, so entsteht eine neue Verbindung: das β-Dicarvelon. Endlich gehen sowohl α- als auch β-Dicarvelon bei der Behandlung mit conc. Schwefelsäure in dieselbe dritte isomere Modification über, die vorläufig als γ-Dicarvelon bezeichnet wird.

Diese Verbindungen sind sämmtlich optisch activ. Sie wurden einerseits aus reinem *d*-Carvon, andererseits aus reinem *l*-Carvon gewonnen und dann sind durch Combination der activen Verbindungen aus den Carvonen verschiedenen Vorzeichens die racemisch inactiven Substanzen dargestellt worden.

Die folgende Tabelle giebt Auskunft über die an den neun isomeren Dicarvelonen beobachteten Eigenschaften.

		Aus		
		d-Carvon	*l*-Carvon	*i*-Carvon
α-Dicarvelon	Schmelzpunkt	148°	148°	120°
	$[\alpha]_D$	−73,92°	+73,28°	0
β-Dicarvelon	Schmelzpunkt	206—207°	206—207°	168°
	$[\alpha]_D$	+79,18°	−82,66°	0
γ-Dicarvelon	Schmelzpunkt	126°	126°	112°
	$[\alpha]_D$	−213,4°	+236,8°	0

Digitized by Google

Die inactiven Verbindungen schmelzen also sämmtlich niedriger als die activen. Ferner macht sich bei der Isomerisirung ein mehrfacher Wechsel der Drehungsrichtung gegen die der Ausgangssubstanz bemerklich.

Zur Charakteristik der Verbindungen muß ferner Folgendes bemerkt werden.

Versetzt man eine Lösung des α, β, und γ-Dicarvelons in Eisessig mit Phenylhydrazin, so scheidet die α-Verbindung schon in der Kälte momentan ein fast unlösliches Hydrazon aus, aus der β-Verbindung bildet sich unter ganz gleichen Bedingungen der Concentration und Temperatur das Hydrazon erst nach einiger Zeit ($^1/_2 - 1$ Stunde), in der Lösung der γ-Verbindung entsteht überhaupt kein Niederschlag. Die α- und β-Verbindungen stellen also unzweifelhaft Ketone vor und zwar lehrt die Analyse der betreffenden Phenylhydrazone, daß Diketone vorliegen. Ob die γ-Verbindung auch ein Keton ist, oder ob bei ihrer Bildung vielleicht Isomerisation zu einem Alkohol statt gefunden hat, muß noch dahingestellt bleiben.

Es war nun zu untersuchen ob eine der beschriebenen Verbindungen mit den Körpern identificirt werden könne, welche so leicht bei der Reduction des Carvonhydrochlorids oder des daraus durch Halogenwasserstoffabspaltung entstehenden Eucarvons sich bilden. Da das Eucarvon optisch inactiv ist, so ist ein Vergleich der Di-Eucarvelone nur mit dem *i*-Bicarvelonen nöthig.

Reducirt man Carvonhydrochlorid (oder Eucarvon selbst, was, wie früher schon mitgetheilt ist, zu denselben Resultaten führt), so bilden sich schön krystallisirte Producte in viel reichlicherer Menge als bei Anwendung von Carvon. Im Gegensatz zu den bei letzterem gemachten Erfahrungen sind die Eucarvon-Derivate aber gar nicht einheitlich, sondern bestehen aus einem nur sehr schwer durch fractionirte Krystallisation zu trennenden Gemenge.

Nach vielfachem Umkrystallisiren wurden zunächst Körper von folgenden Schmelzpunkten isolirt:

1) 172° 2) 142° 3) 128° 4) 110—112°.

Die am höchsten schmelzende Verbindung ist die schwerlöslichste und entsteht in reichlicher Menge. Mit dem inactiven β-Dicarvelon, dem sie im Schmelzpunkt nahe kommt, konnte sie aber nicht identificirt werden. Möglicher Weise ist jedoch die schwer genügend zu reinigende bei 110 — 112° schmelzende Verbindung aus Eucarvon identisch mit γ-Dicarvelon.

Die Frage ist nun weiter, wie man sich die Entstehung der

Digitized by Google

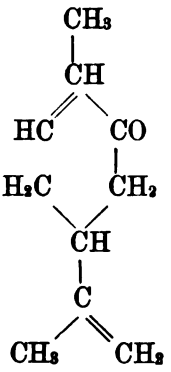
Dicarvelone bei der Reduction des Carvons vorzustellen hat. Daß bei der Reduction von Ketonen unter Verdoppelung des Moleküls Alkohole, die Pinakone, entstehen können, weiß man lange. Die Bildung von Diketonen unter diesen Bedingungen war früher aber noch nicht beobachtet. Neuerdings haben nun auch C. Harries und Fr. Hübner gefunden (Ann. d. Ch. 296, 295) daß α-β ungesättigte Ketone bei der Reduction gern Diketone mit doppeltem Kohlenstoffgehalt liefern.

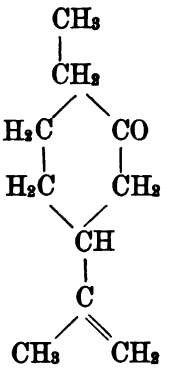
Benzylidenaceton $C_6H_5CH : CH\,CO\,CH_3$ giebt z. B. die Verbindung

$$\begin{array}{l} C_6H_4\,CH\,.\,CH_2\,CO\,CH_3 \\ \quad\quad | \\ C_6H_5\,CH\,.\,CH_2\,CO\,CH_3. \end{array}$$

Aehnlicher Verlauf der Reaction ist beim Mesityloxyd und Phoron anzunehmen.

Auch Carvon ist nun als α-β- ungesättigtes Keton zu betrachten. Nur steht die zum Carbonyl in α-β-Stellung befindliche Aethylenbindung in einem Kohlenstoffringe. Legt man nun bei der Betrachtung die neuerdings bevorzugten (wenn auch keineswegs genügend sicher gestellten) Formeln für Carvon und Bihydrocarvon

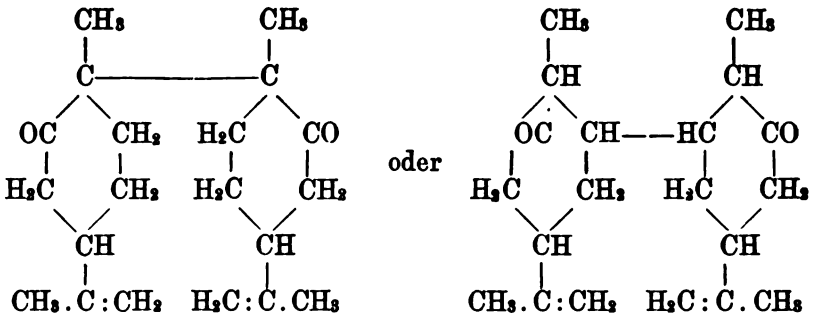

Carvon


Bihydrocarvon

zu Grunde, nach welchen beide Ketone eine Aethylenbindung in der Seitenkette enthalten, und welche die Annahme involviren, daß diese in der Seitenkette befindliche Doppelbindung durch Wasserstoff-Addition direct nicht aufgelöst werden kann (weil bei der Reduction eine Ueberführung in Tetrahydrocarvon sich unmöglich erweist), so können für α-Dicarvelon überhaupt nur die folgenden beiden Formeln in Betracht kommen:

Digitized by Google

I. II.



und zwar wäre die zweite Formel die wahrscheinlichere, wenn die Analogie mit den eben erwähnten Vorgängen eine vollständige ist. Die Entstehung der mit β- und γ- bezeichneten Isomeren aus dem α-Dicarvelon würde sich bei Annahme der Formel II für α-Dicarvelon ganz einfach so erklären, daß unter dem Einfluß der Bromwasserstoffsäure und der Schwefelsäure in oft beobachteter Weise eine Verschiebung der in der Seitenkette befindlichen Aethylenbindung zu einer semicyclischen oder zu einer im Ring befindlichen Doppelbindung Platz greift. Schwer zu erklären bleibt es bei diesen Annahmen immerhin, warum die Reductionsproducte aus Hydrochlorcarvon und aus Eucarvon so complicirte Verhältnisse aufweisen. Es zeigt sich wiederum, daß die Beziehungen zwischen Carvon und Eucarvon nicht ganz einfacher Art sein können.

Daß das Eucarvon die Atomgruppirung $CH_2 . CO .$ enthalten muß, ist von mir durch Darstellung des in durchsichtigen Prismen krystallisirenden Condensationsproducts mit Benzaldehyd, $C_{10} H_{12} O : CH C_6 H_5$, Schmelzp. 112—113°, bewiesen worden. (Ber. chem. Ges. 1896, 1600). Neben diesem Körper entsteht bei dem Vorgang aber regelmäßig in ziemlicher Menge eine sehr schwer lösliche andere Verbindung, die in weißen Blättchen krystallisirt und erst bei 193—194° schmilzt. Die Analyse dieser Verbindung erschließt die Zusammensetzung $C_{24} H_{24} O_2$

Berechnet	C : 83.72 %	H : 6.97 %.
Gefunden	„ 83.71 „	„ 7.00 „

Danach ist die Substanz aus 1 Mol. Eucarvon und 2 Mol. Benzaldehyd unter Austritt von 1 Mol. Wasser entstanden. Es liegt daher am nächsten anzunehmen, daß sich bei der Condensation zunächst aus 2 Mol. Benzaldehyd Benzoïn gebildet hat und daß dieses in Condensation getreten ist, nach dem Schema:

Digitized by Google

$$C_{10}H_{14}O + C_6H_5CO.CH(OH)C_6H_5$$
$$= H_2O + C_{10}H_{12}O : C(C_6H_5).CH(OH)C_6H_5.$$

Soviel diese Erklärung auch für sich hat, so darf doch nicht unerwähnt bleiben, daß eine Condensation von fertig gebildetem Benzoïn mit Eucarvon unter denselben Bedingungen, unter denen sich die bei 192° schmelzende Substanz aus Eucarvon und Benzaldehyd bildet, sich bisher nicht hat verwirklichen lassen.

Im Anschluß an diese Arbeiten habe ich Hrn. Löhr veranlaßt, die physikalischen Eigenschaften einiger Derivate des activen und inactiven Bihydrocarvylamin und des Bihydroeucarvylamin festzustellen, da es sehr wünschenswerth ist, die bisjetzt bekannten Verbindungen $C_{10}H_{16}O$, welche sich durch ihre Oxime hindurch in Basen der Formel $C_{10}H_{17}NH_2$ verwandeln lassen, genau identificiren zu können.

Nachstehende Tabelle giebt eine Uebersicht der Schmelzpunkte entsprechender Isomerer aus der *d*-, *l*-, *i*-Bihydrocarvylamin- und der Bihydro-Eucarvylamin-Reihe

	aus Dihydrocarvylamin			aus Dihydro-
	d	*l*	*i*	eucarvylamin.
$C_{10}H_{17}NH.CONH_2$	184-186°	184-186°	178—180°	122-126°
$C_{10}H_{17}NHCONHC_6H_5$	192-193°	192-193°	142°	142°
$C_{10}H_{17}NHCSNHC_6H_5$	125-126°	125-126°	120° (nicht glatt)	144-145°

4) Ueber einen neuen isomeren Campher aus Pinen.

In Gemeinschaft mit Hrn. Smythe habe ich das Studium des Nitrosopinen wieder aufgenommen und wir haben dabei eine Reihe neuer und mittheilenswerther Beobachtungen gemacht.

Wird Nitrosopinen, $C_{10}H_{15}NO$, mit Zink und Eisessig reducirt, so entsteht, wie ich früher schon fand, eine Base, das Pinylamin, $C_{10}H_{15}NH_2$, diese kann durch Einwirkung von Natriumnitrit und darauf folgender Oxydation in ein isomeres Carvon, $C_{10}H_{14}O$, verwandelt werden, das ich von jetzt an Pinocarvon nennen will. Das Pinocarvon giebt leicht ein Semicarbazon, das sich aber schlecht durch Krystallisation reinigen läßt und bei 204° schmilzt.

Schon gelegentlich der ersten Untersuchung war unter den Producten, welche bei der Reduction des Nitrosopinen entstehen, das Auftreten eines Ketons $C_{10}H_{16}O$ (Oxim Smp. 87°—88°) beobachtet worden (Ann. d. Chem. 268, 210), das aber nicht näher un-

Digitized by Google

tersucht werden konnte. Es hat sich jetzt gezeigt, daß dies Keton immer als Nebenproduct neben Pinylamin auftritt, wenn man Nitrosopinen unter den angegebenen Bedingungen reducirt und wir haben es jetzt in einer zur Untersuchung genügenden Menge dargestellt.

Das Keton ist mit Campher isomer und wie dieser eine gesättigte Verbindung. Es soll Pinocamphon genannt werden.

Das Pinocamphon siedet bei 211—213° und besitzt einen terpentinartigen (dem Pinocarvon ähnlichen) Geruch.

$$d = 0{,}959,\ n_D = 1.47273 \text{ bei } 21^0$$

Ber. für $C_{10}H_{16}O$		Gefunden
M	44.11	44.44

Das Semicarbazon der Verbindung bildet sich nur sehr langsam. Es schmilzt bei 199—200°. Das Oxim, $C_{10}H_{16}NOH$, entsteht schnell und glatt und schmilzt bei 86—87°.

Durch Wasserstoffzufuhr aus alkalischer Quelle geht das Camphon in Pinocampheol, $C_{10}H_{17}OH$, über. Der Alkohol besteht aus einer sehr dicken, zähen Flüssigkeit, deren Geruch gleichzeitig an Terpineol und an Terpentinöl erinnert. Der Siedepunkt liegt bei 218—219°, $d = 0.9655$, $n_D = 1.48612$ bei 20°.

Ber. für $C_{10}H_{17}OH$		Gefunden
M	45.45	45.80

Die Verbindung ist demnach ganz gesättigt und dem chemischen Character nach ein neues Borneol. Mit Carbanil verbindet sie sich zu dem bei 98° schmelzenden Urethan $C_{10}H_{17}O.CONH C_6H_5$. Beim Erwärmen mit Chlorzink verliert der Alkohol Wasser. Unter den Reactionsproducten fand sich Cymol.

Die Untersuchung des neuen Camphers wird noch fortgesetzt. Gleichzeitig ist aber eine andere, bemerkenswerthe Beobachtung gemacht worden.

Es wurde an Nitrosopinen in Eisessiglösung 1 Mol. Brom addirt, in der Erwartung, daß dies Additionsproduct sich bei der Reduction ähnlich verhalten würde, wie Nitrosopinen. Die Reaction verläuft auch insofern ganz analog, als sich gleichzeitig dabei ein Keton und eine Base bildet. Beide zeigen aber ganz andere Eigenschaften wie Pinocamphon und Pinylamin. Nach dem Schmelzpunkt seines Oxims zu urtheilen scheint das Keton identisch mit inactivem Bihydrocarvon zu sein. Damit würde ein interessanter Uebergang von Pinen zum Bihydrocarvon gewonnen sein und es wäre zu schließen, daß bei der Addition von Brom zu Nitrosopinen Ringsprengung erfolgt.

Digitized by Google

5) Ueber Pulegensäure.

Die Untersuchung der aus dem Pulegondibromid durch Einwirkung von Alkali entstehenden merkwürdigen Pulegensäure, $C_{10}H_{16}O_2$, [vergl. Nach. d. G. d. W. 1895 S. 309] ist nach verschiedenen Richtungen hin fortgesetzt worden. Um die Frage zu entscheiden, ob sich die Pulegensäure isomerisiren läßt, ist durch Einwirkung von Salzsäure auf eine methylalkoholische Lösung der Säure der Hydrochlormethylester $C_9H_{16}ClCO_2CH_3$ dargestellt worden und dieser dann mit alkoholischem Alkali gekocht. Dabei entstand einerseits Pulegensäure-methylester $C_9H_{15}CO_2CH_3$, der auffallend schwer durch Ammoniak und fixes Alkali verseift wird, und ein Gemenge von Alkalisalzen einer isomeren Pulegensäure und einer Oxysäure. Säuert man die Lösung an und extrahirt mit Aether, so erhält man eine bei 15^{mm} zwischen $125-149^0$ siedende Flüssigkeit, aus der Sodalösung einen Theil herauslöst. Der Rückstand siedet dann bei 15^{mm} zwischen $125-127^0$ und erweist sich als ein Lacton $C_{10}H_{16}O_2$ von normalem Verhalten. Vermuthlich liegt also ein γ-Lacton vor, wodurch ein Anhaltepunkt für die Lage der Aethylenbindung in der Pulegensäure gewonnen ist.

Aus der Sodalösung wird durch Säuren eine organische Säure freigemacht, die bei 15^{mm} zwischen $145-147^0$, bei gewöhnlichem Druck bei $256-260^0$ siedet, der Pulegensäure sehr ähnelt und auch dieselbe Zusammensetzung wie diese besitzt. Die Säure lieferte aber beim Erhitzen ihres Ammoniaksalzes ein bei 152^0 schmelzendes Amid $C_{10}H_{15}ONH_2$, während Pulegensäureamid bei 121^0 schmilzt. Die Säure soll daher vorläufig als β-Pulegensäure bezeichnet werden.

Sehr merkwürdig ist das Verhalten einer alkalischen Auflösung von Pulegensäure gegen Natriumhypobromid. Vermischt man die alkalischen Flüssigkeiten, so fällt sofort ein schweres Oel aus, das sich als ein gebromtes Lacton erweist. Kocht man diese Verbindung mit alkoholischem Alkali, so entsteht das Salz einer Oxysäure, aus der Mineralsäuren ein Lacton $C_{10}H_{14}O_2$ abscheiden.

Dieses Lacton ist ein prachtvoll krystallisirender Körper, der bei $44-45^0$ schmilzt und bei $265-268^0$ ohne Zersetzung siedet. Durch dauerndes Kochen mit Alkali kann dies Lacton wieder in das Salz der zugehörigen Oxysäure übergeführt werden, aus dem man weiter ein Silbersalz gewinnen kann.

Berechnet für $C_{10}H_{15}O_2Ag$: C = 41.2%; H = 5.2%: Ag = 37.1 %.
Gefunden 40.65 „ „ 4.87 „ „ 37.02. „

Digitized by Google

Das Lacton ist merkwürdiger Weise eine gesättigte Verbindung, die in Eisessiglösung Brom nicht addirt.

In dieselbe Verbindung läßt sich auch das gesättigte Oxylacton $C_{10}H_{16}O_3$ überführen, welches bei der Oxydation der Pulegensäure mit Kaliumpermanganat entsteht.

Hr. Sonneborn ist damit beschäftigt die Beziehungen dieser interessanten Verbindungen näher zu erforschen.

Das gesättigte Lacton $C_{10}H_{14}O_2$ aus Pulegensäure ist übrigens isomer mit einer gleichfalls sehr schön krystallisirenden ungesättigten Substanz, die ich früher durch Umsetzung des *i*-Carvontribromids mit alkoholischen Ammoniak erhielt. [Ann. d. Ch. 286, 126.] Diese bei 69—70° schmelzende Verbindung glaubte ich damals nicht als Lacton ansprechen zu dürfen, weil sie sich in warmem wäßrigem Alkali als ganz unlöslich erwies.

Nachdem ich jetzt gefunden habe, daß manche Lactone cyclischer Verbindungen sogar aus sehr stark alkalischen Lösungen bei ihrer Bildung ausfallen können, ist die Verbindung aus Carvon noch einmal näher untersucht und es hat sich gezeigt, daß sie durch dauerndes Kochen mit alkoholischem Alkali doch in das Salz einer Oxysäure verwandelt werden kann, daß also ein Lacton auch hier vorliegt.

Dieser Uebergang des Carvon, $C_{10}H_{14}O$, in ein ungesättigtes Lacton $C_{10}H_{14}O_2$ kann nur erklärt werden, wenn man annimmt, daß im Verlauf der Reactionen, welche zur Bildung des letzteren Körpers führen, eine Ringsprengung eingetreten ist. Es wird versucht werden, den Mechanismus dieses Vorganges nunmehr weiter aufzuklären.

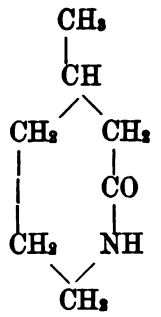
6) Ueber neue Verbindungen aus Methylhexanon.

Die cyclischen Oxime erleiden, wie ich früher schon gezeigt habe (Nachr. d. Ges. d. W. 1893, 747. 1894, 59, 165), ebensogut Umlagerungen, wie die gewöhnlichen Oxime, wenn man sie nach dem Vorgang von Beckmann mit umlagernden Agentien (SO_4H_2, PCl_5) behandelt. Der Mechanismus der Umlagerung ist aber nicht immer einfach und durchsichtig und bei verschiedenen cyclischen Verbindungen vollzieht er sich auch augenscheinlich nicht in demselben Sinn. So giebt Carvoxim bei der Umlagerung mit Schwefelsäure Amidothymol, Fenchonoxim giebt Fenchonitril, Menthonoxim giebt Isomenthonoxim. Es schien mir daher zur Klärung der Verhältnisse zweckmäßig, die Oxime der jetzt zugänglich gewordenen cyclischen Ketone einfachster Form auf ihr Verhalten

Digitized by Google

bei der Umlagerung zu prüfen. Hr. Böcker hat sich auf meine Veranlassung zunächt mit dem bei 44° schmelzenden Methylhexanonoxim beschäftigt. Bei der Behandlung mit Chlorphosphor unter den üblichen Bedingungen erhält man aus diesem Oxim zwei isomere Substanzen, die sich von dem Ausgangsmaterial durch ihre große Löslichkeit in Wasser schon ganz wesentlich unterscheiden. Die eine (α-Verbindung) schmilzt bei 103°, die andere (β-Verbindung) bei 65—66°, dagegen sieden beide Modificationen gleich, nämlich bei 14^{mm} zwischen 154—155°, ferner zeigen beide ein ähnliches optisches Verhalten, Die Substanzen sind links drehend. Die β-Verbindung zeigt eine ausgesprochen basische Natur, sie verbindet sich mit Säuren zu Salzen.

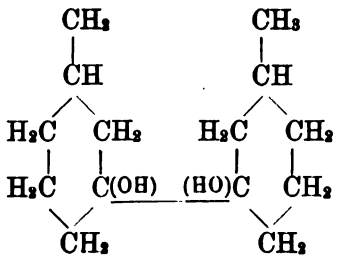
Unter dem Einfluß der salpetrigen Säure entsteht aus ihr eine ölige Säure von unangenehmem Fettsäuregeruch. Vermuthlich liegt eine Heptylensäure vor. Es scheint demnach, als wenn das Methylhexanonoxim sich zu der Verbindung



isomerisirt, welche sich dann unter Oeffnung des Ringes in das Amid einer ungesättigten Fettsäure verwandelt.

Ein anderes Umwandelungsproduct des Methylhexanon hat Hr. Tams aufgefunden. Bei der Reduction des Ketons in ätherischer Lösung mit Natrium entsteht neben Methylhexanol ein aus Alkohol schön krystallisirender Körper, welcher bei 74° schmilzt, wasserhaltig ist und beim Aufbewahren im Exsiccator oder beim Erwärmen Wasser verliert. Auch durch kurzes Erwärmen mit Essigsäureanhydrid kann man der Verbindung Wasser entziehen. Das wasserfreie Product schmilzt bei 101—102° und ist gemäß der Analyse als das Pinakon des Methylhexanons

Digitized by Google



aufzufassen.

7) Ueber Fenchon-Derivate.

Die Reindarstellung der durch gleichzeitige Einwirkung von Kohlensäure und Natrium auf Fenchon entstehenden Karbonsäure war früher auf Schwierigkeiten gestoßen, die aber jetzt vollkommen überwunden sind, so daß die Zusammensetzung und das Verhalten der Säure genau festgestellt werden konnte. Die ganz reine Fenchocarbonsäure schmilzt scharf bei 141°. Kleine Verunreinigungen beeinflussen den Schmelzpunkt außerordentlich. Den Schmelzpunkt gut krystallisirter Säure findet man daher häufig schon zwischen 137—139° liegend, bei Anwesenheit von Fremdsubstanzen kann er auch noch erheblich tiefer herabgedrückt werden. Die reine Säure krystallisirt aus verdünnter Essigsäure in scharf zugespitzten, dicken durchsichtigen Prismen und ist im Vacuum ohne Zersetzung destillirbar. Der Siedepunkt liegt bei 11^{mm} bei etwa 175°. Die Analyse der freien Säure und ihrer Salze zeigt, daß man es mit einer Oxycarbonsäure $C_{10}H_{16}\begin{matrix}COOH\\OH\end{matrix}$ zu thun hat.

Berechnet für $C_{11}H_{18}O_3$: C = 66.67 % H = 9.09 %.
Gefunden: „ = 66.47 „ = 9.20 „

Die Säure ist in Aether und Alkohol äußerst leicht, in Petroläther und in Wasser schwer löslich.

Das Silbersalz ist ziemlich lichtbeständig und in Wasser sehr schwer löslich.

Berechnet für $C_{11}H_{17}O_3Ag$: C = 43.28 %; H = 5.57 %; Ag = 35.11 %.
Gefunden: „ = 43.26 „ „ = 5.57 „ „ = 35.42 „

Das Fenchocarbonsaure Blei kann durch seine große Löslichkeit in Aether gereinigt werden. Man fällt das rohe Salz aus dem Ammoniaksalz durch Bleiacetat, trocknet es und löst in tro-

Digitized by Google

ckenem Aether. Aus der filtrirten Flüssigkeit läßt man den Aether verdunsten und trocknet den Rückstand erst im Vacuum, dann bei 80—85°.

Berechnet für $(C_{11}H_{17}O_3)_2Pb$: C = 43.97%; H = 5.66%; Pb = 34.37%.
Gefunden: „ = 43.32 „ „ = 5.64 „ „ = 34.04 „

Beim Ueberhitzen dieses Bleisalzes entsteht glatt das neulich (Nachr. d. G. d. W. 1896, S. 308) schon erwähnte Keton $C_{11}H_{16}O_2$.

Ein racemisches Gemisch der Carbonsäuren aus Rechts- und aus Links-Fechon schmilzt bei 91—92°, also erheblich niedriger als die Componenten.

Bei der trockenen Destillation giebt die Fenchocarbonsäure Wasser ab und es bildet sich die früher schon beschriebene Säure $C_{11}H_{16}O_2$, welche sich von der Fenchocarbonsäure durch ihren höheren Schmelzpunkt und die Flüchtigkeit mit Wasserdämpfen unterscheidet.

Digitized by Google

Digitized by Google

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Geschäftliche Mittheilungen

aus dem Jahre 1897.

Göttingen,
Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung
Lüder Horstmann.
1897.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhalt.

Bericht des abtretenden Secretärs der Gesellschaft über das Geschäftsjahr 1896/97 . . . . . S. 1

Bericht über die mit der Gesellschaft verbundenen Stiftungen . . . . . „ 6

Verzeichnis der im Jahre 1896/97 abgehaltenen Sitzungen und der darin gemachten wissenschaftlichen Mittheilungen . . . . . „ 8

Verzeichnis der Mitglieder der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften „ 14

Bericht über die Benekesche Preisstiftung . . . . . „ 24

Verzeichniß der im Jahre 1896 eingegangenen Druckschriften . . . . . „ 28

David Hilbert, Zum Gedächtnis an Karl Weierstraß . . . . . „ 60

F. Leo, Ernst Curtius . . . . . „ 70

Otto Wallach, Gedächtnißrede auf Aug. Kekulé . . . . . „ 75

Bericht über die öffentliche Sitzung am 13. November 1897 . . . . . „ 83

Fr. Merkel, Ueber Kräfte, welche gestaltend auf den Körper der Thiere wirken . . . . . „ 84

Verzeichnis der neugewählten Mitglieder der Kgl. Gesellschaft . . . . „ 98

Adresse der Kgl. Gesellschaft an Herrn Theodor Mommsen in Charlottenburg . . . . . „ 99

Bericht über die Wedekindsche Preisstiftung . . . . . „ 101

O. Bürger, Bericht über eine Reise durch Columbien und Venezuela . „ 104

Digitized by Google

Digitized by Google

Bericht des abtretenden Sekretärs über das Geschäftsjahr 1896/97.

Die Gesellschaft hat in dem abgelaufenen Geschäftsjahre 1896/97 4 außerordentliche, 15 ordentliche Sitzungen gehalten. Ueber die darin vorgelegten wissenschaftlichen Mitteilungen gibt die weiterhin abgedruckte Zusammenstellung Auskunft. Commissionssitzungen in verschiedenen geschäftlichen Angelegenheiten sind 3 gehalten worden. In den außerordentlichen Sitzungen vom 2. Juni 1896 hatte die Gesellschaft die Ehre seine Excellenz den vorgesetzten Herrn Minister Dr. Bosse, den Geh. Oberregierungsrat Dr. Althoff, den K. Curator der Universität, Geh. Oberregierungsrat Dr. Höpfner, und seine Magnificenz den Prorector der Georg-Augusts-Universität Geh. Justizrat von Bar als Gäste in ihrer Mitte zu begrüßen.

Die Nachrichten von der K. G. d. W. aus dem Jahre 1896 sind in je vier Heften für die Klasse vollständig erschienen; der neue Jahrgang ist im Drucke.

Für die Abhandlungen ist mit diesem Jahre die neue Ordnung ins Leben getreten, die im vorigen Geschäftsberichte angekündigt war. Es sind bisher zur Ausgabe gelangt

Philologisch-historische Klasse:

1. P. Kehr, über eine römische Papyrusurkunde des Marburger Archivs.
2. N. Bonwetsch, das slavische Henochbuch.
3. W. Meyer, über Lauterbachs und Aurifabers Sammlungen der Tischreden Luthers.
4. J. Wellhausen, der arabische Josippus.
5. Fr. Hultsch, über die Größe und Entfernung der Sonne nach Poseidonius.

Digitized by Google

Zwei andere Abhandlungen dieser Klasse und eine der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse sind im Druck.

Die Gelehrten Anzeigen sind in dem neuen Verlage der Weidmanschen Buchhandlung ganz unverändert forterschienen.

Der Schriftenaustausch ist regelmäßig vollzogen und hat wiederum eine Steigerung erfahren. Die Gesellschaft hat die Nachrichten der mathematisch-physikalischen Klase an 172, die der philologisch-historischen Klasse an 89, die geschäftlichen Mitteilungen an 231, die Abhandlungen an 31 Stellen versandt. Da die Gesellschaft die Versendung jeder einzelnen Nummer unmittelbar nach ihrem Erscheinen selbst besorgt, hat sie auf Grund mehrfacher Reclamationen constatirt, daß eine größere Anzahl von Exemplaren einer bestimmten Nummer der Nachrichten, die für amerikanische Institute bestimmt waren, auf dem Lloyddampfer Elbe ihren Untergang gefunden haben. Sie hat sich beeilt jeder Reclamation schleunigst Genüge zu leisten.

Das Verzeichnis der Schriften, die die Gesellschaft im Austausche oder als Geschenke erhalten hat, ist unten gegeben. Die Gesellschaft dankt auch an dieser Stelle für alle ihr gemachten litterarischen Zuwendungen. Wo nicht im Tauschverkehr auf besondern Wunsch sofort eine Empfangsbescheinigung ausgestellt worden ist, bittet die Gesellschaft, die nachstehende Veröffentlichung der Eingänge als solche anzusehen.

Die Gesellschaft ist in der Lage gewesen, auf wissenschaftliche Untersuchungen und Arbeiten, die sie teils angeregt hat, teils unterstützt, folgende Summen zu verwenden.

Zuschuß zu den Vorarbeiten für die mathematische Encyclopaedie . . . . . 800 M.

Herrn E. Riecke für elektrische Experimentaluntersuchungen . . . . . 600 M.

Demselben zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über Entladungserscheinungen in verdünnten Gasen . . 400 M.

Herrn W. Voigt zu Fortsetzung seiner Untersuchungen über Probleme der Krystallphysik . . . . 600 M.

Herrn Dr. O. Bürger, Zuschuß zu einer zoologischen Forschungsreise nach Südamerika . . . . . 1000 M.

Herrn P. Kehr zur Vorbereitung einer kritischen Ausgabe der Papsturkunden. . . . . 1200 M.

Herrn F. Leo und U. v. Wilamowitz-Moellendorff zur Herausgabe antiker Scholien . . . . . 500 M.

Digitized by Google

Die von Dr. H. Graeven besorgte Ausgabe der Lukianscholien steht unmittelbar vor der Vollendung.

Herrn v. Willamowitz-Moellendorff zur Herausgabe des Dioskorides . . . . . 700 M.

Für die durch Herrn Wellmann vorbereitete Ausgabe des Dioskorides sind die maßgebenden Handschriften des echten griechischen Textes verglichen, die beiden alten Wiener Handschriften des alphabetisch umgearbeiteten Textes, besonders wegen der zugesetzten Pflanzensynonyma, abgeschrieben, zahlreiche andere Handschriften der Umarbeitung, darunter ein Athous durch Herrn Fredrich, eingesehen und die Handschriften des mit Hülfe der Umarbeitung interpolirten Textes theils geprüft theils verglichen worden. Ferner hat Herr Wellmann eine Pariser Handschrift der *ἰατρικαὶ συναγωγαί* des Ontasios wegen der Excerpte aus dem echten Dioskorides zum Theil abgeschrieben und die Synonymenlisten des Pseudo-Apuleius de medicamentis herbarum in der Wiener Handschrift (cod. lat. CCLXXV) verglichen. Die deutsche Uebersetzung ist z. Th. ausgeführt. Die Bedeutung des Krateuas für die Quellenanalyse des Dioskorides ist in einer demnächst in den Schriften der Gesellschaft erscheinenden Abhandlung behandelt. Demnächst soll die Bearbeitung der lateinischen Uebersetzung in Angriff genommen werden.

Herrn Dr. C. Scherer zur Vorbereitung einer Ausgabe von Kestners schönwissenschaftlichen Werken 300 M.

In der Commission für den Thesaurus linguae Latinae ist die Gesellschaft wie bisher durch Herrn F. Leo vertreten gewesen, welcher auch an der Pfingstconferenz der Commission in Wien Teil genommen hat.

Ebenfalls in Wien hat gleichzeitig die Delegirten-Conferenz der im Cartell stehenden Akademien von Wien und München und der gelehrten Gesellschaften von Leipzig und Göttingen stattgefunden; Vertreter Göttingens war Herr F. Klein. Von den Gegenständen der Beratung sei allein die Herstellung einer mathematischen Encyclopaedie hervorgehoben, weil diese durch die wissenschaftliche und finanzielle Unterstützung von Wien, München und Göttingen gesichert ist. Der Verlagsvertrag ist mit der Firma B. G. Teubner in Leipzig abgeschlossen; die Ausarbeitung haben die Herren Professoren Burckhard in Göttingen (jetzt Zürich) und F. Meyer in Clausthal übernommen.

Digitized by Google

Der K. sächsischen Gesellschaft sind am 1. Juli 1896 die Glückwünsche der Göttinger Gesellschaft durch die beiden Secretäre persönlich überbracht worden.

Ihrem auswärtigen Mitgliede William Thomson Lord Kelvin hat die Gesellschaft zu seinem 50jährigen Doctorjubiläum ihren Glückwunsch in einer Adresse ausgesprochen, welche Herr W. Voigt am 16. Juni 1896 in Glasgow persönlich überreicht hat.

Ihrem correspondirenden Mitglied Wilhelm Hittorf hat die Gesellschaft zu seinem 50jährigen Doctorjubiläum am 26. October 1896 ebenfalls eine Glückwunschadresse gewidmet.

Beide Schriftstücke sind in dem zweiten Hefte der geschäftlichen Mitteilungen (S. 87 und 90) abgedruckt.

Auf die Preisaufgabe des Jahres 1897 ist keine Bewerbungsschrift eingegangen.

Die Preisaufgabe für das Jahr 1899 lautete:

Was an Schriften des Apollinaris von Laodicea erhalten ist, soll untersucht, kritisch bearbeitet und für die Darstellung seiner Theologie verwertet werden.

Der Preis beträgt 1000 Mark.

Die Bewerbungsschriften müssen bis zum 1. Februar 1899 eingeliefert werden. Sie sollen mit einem Spruche versehen und von einem Briefe begleitet sein, der außen den Spruch trägt, der die Arbeit kennzeichnet, und innen den Namen und Wohnort des Verfassers.

Die Gesellschaft verlor durch Weggang von Göttingen

von ordentlichen Mitgliedern:

Herrn Ulrich v. Willamowitz-Moellendorff, ordentliches Mitglied seit 1892, Secretär der philologisch-historischen Klasse seit 1894.

durch Tod

von auswärtigen Mitgliedern:

in der philologisch-historischen Klasse:

Herrn Ernst Curtius in Berlin, ordentliches Mitglied seit 1856, gestorben 10. Juni 1896.

in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse:

Herrn Carl Weierstraß in Berlin, correspondierendes Mitglied seit 1856, auswärtiges seit 1865, gestorben 19. Febr. 1897.

Herrn Gabriel Aug. Daubrée in Paris, ordentliches Mitglied seit 1876, gestorben am 28. Mai 1896.

Digitized by Google

Herrn August Kekulé in Bonn, correspondirendes Mitglied seit 1869, auswärtiges seit 1880, gestorben am 23. Juli 1896.

Herrn Ernst Beyrich in Berlin, correspondirendes Mitglied seit 1861, auswärtiges seit 1889, gestorben 9. Juni 1896.

Herrn Emil du Bois-Reymond in Berlin, correspondirendes Mitglied seit 1861, auswärtiges seit 1892, gestorben 27. December 1896.

Herrn James Joseph Sylvester in Oxford, correspondirendes Mitglied seit 1864, auswärtiges Mitglied seit 1883, gestorben 15. März 1897.

von correspondirenden Mitgliedern:
in der mathematisch-physikalischen Klasse:

Herrn Ludwig von Seidel in München, correspondirendes Mitglied seit 1859, gestorben am 13. August 1896.

Herrn Bernhard Minnigerode in Greifswald, Assessor seit 1873, correspondirendes Mitglied seit 1874, gestorben am 15. August 1896.

Herrn Ferdinand von Müller in Melbourne, correspondirendes Mitglied seit 1867, gestorben am 9. October 1896.

Herrn Hugo Gyldén in Stockholm, correspondirendes Mitglied seit 1879, gestorben 9. November 1896.

Herrn François Felix Tisserand zu Paris, correspondirendes Mitglied seit 1884, gestorben 20. October 1896.

Herr U. v. Wilamowitz-Moellendorff tritt durch seine Uebersiedelung an einen anderen Wohnort mit Ablauf des Jahres 1896 in die Reihe der auswärtigen Mitglieder der philologisch-historischen Klasse.

Die Gesellschaft wählte am 15. Mai 1896

zu auswärtigen Mitgliedern
in der philosophisch-historischen Klasse:
die Herrn Pasquale Villari zu Florenz;
Heinrich Denifle zu Rom.

Die allerhöchste Bestätigung dieser Wahlen erfolgte am 17. August 1896.

Die Gesellschaft wählte am 15. Mai 1896

zum correspondirenden Mitgliede
in der philologisch-historischen Klasse:
Herrn Oswald Holder Egger zu Berlin,

zum correspondirenden Mitgliede
in der mathematisch-physikalischen Klasse
Herrn Robert Helmert in Potsdam.

Digitized by Google

Ueber die Wedekindsche Preisstiftung für deutsche Geschichte lautet der von deren Director eingereichte Bericht:

Aus dem Jahre 1896/97 hat die Wedekindstiftung nichts weiter zu berichten, als daß der Verwaltungsrath aus den Ueberschüssen der letzten mit dem 31. März 1896 abschließenden Rechnungsperiode nach Einholung der Genehmigung des Herrn Universitätscurators an Herrn Kehr die Summe von 2400 Mk. für das laufende Jahr bewilligt hat zur Unterstützung seiner Arbeiten für die Herausgabe der älteren Papsturkunden, welche die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften unternommen hat.

F. Frensdorff,
d. Z. Director der Wedekindstiftung.

Von der Lagardeschen Stiftung ist ein anastatischer Neudruck von de Lagardes Aegyptiaca und Gesammelte Abhandlungen veranlaßt.

Durch Allerhöchsten Erlaß vom 7. Mai 1896 ist der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften die Genehmigung ertheilt, ein ihr für eine „Stiftung der Freunde Paul de Lagardes“ angebotenes Capital (siehe Geschäftliche Mittheilungen 1896 H. 1 pag. 6) anzunehmen. Die Summe von Mk. 5200 ist am 8. Juli 1896 für diese Stiftung bei der Kgl. Universitäts-Kasse eingezahlt. Für die Verwaltung der Stiftung sind Ausführungsbestimmungen entworfen, die sich an die Bedingungen anschließen, unter denen die Stiftung gemacht ist. Die Vermögensverwaltung führt danach der Curator der Lagardeschen Stiftung zusammen mit der Commission.

Digitized by Google

Bericht über den Fortgang der Vorarbeiten für die kritische Ausgabe der Papsturkunden bis Innocenz III.

Unter der Leitung des Unterzeichneten hat der seit dem 15. August vorigen Jahres als ständiger Mitarbeiter bei dem Unternehmen beschäftigte Herr Dr. Melle Klinkenborg zunächst die vorbereitenden bibliographischen Arbeiten begonnen. Gleichzeitig konnte Dank einer namhaften Bewilligung seitens der Wedekindstiftung mit den notwendigen archivalischen Reisen begonnen werden, für die zunächst Italien in Aussicht genommen wurde. Noch im August und während des Septembers hat der Unterzeichnete eine Reise nach Oberitalien angetreten, um an Ort und Stelle die Arbeiten einzuleiten. Er hat hier die Archive von Verona und vor allem das Staatsarchiv zu Venedig ausgebeutet. Diese Materialiensammlung hat er fortgesetzt während der Monate März und April in Gemeinschaft mit Herrn Dr. Luigi Schiaparelli, der, selbst mit der Sammlung der Urkunden der italienischen Könige von Berengar I. bis Berengar II. beschäftigt, seine Arbeitskraft bereitwillig unserm Unternehmen widmete und dessen Theilnahme für uns in hohem Maaße nützlich gewesen ist und, wie wir hoffen, uns auch fernerhin nicht fehlen wird. Diese zweite Reise galt den Archiven von Pisa, Calci, Lucca, Bologna und Ravenna. Die Fortführung dieser archivalischen Forschungen im oberen Italien ist den Herren Dr. Klinkenborg und Dr. Schiaparelli übertragen; zur Zeit arbeiten beide Herren in Modena und in Nonantola; nach Erledigung dieser Archive wird Herr Dr. Schiaparelli die Archive der Emilia (Reggio, Parma, Piacenza), Herr Dr. Klinkenborg diejenigen von Mantua und Verona und der Lombardei (Brescia, Bergamo, Cremona, Lodi, Monza und Como) selbständig durchforschen. Die Archive von Mailand, von Ligurien und von Piemont sind dagegen einer späteren Reise vorbehalten. Für den Herbst sind zunächst Forschungen in der Romagna, in den Marken, in Umbrien und Toscana in Aussicht genommen, so daß die Hoffnung ausgesprochen werden darf, daß in diesem und im nächsten Jahre die archivalischen Arbeiten in Ober- und Mittelitalien zum Abschluß gebracht sein werden.

Es darf endlich zu unsrer Freude berichtet werden, daß wir überall seitens der Vorstände der Archive und Bibliotheken, insbesondere auch seitens der Vorstände der geistlichen Institute, die entgegenkommendste Aufnahme, zuweilen sogar eine weit über alles Erwarten hinausgehende Unterstützung fanden, wofür wir auch an dieser Stelle unsern Dank wiederholen.

Kehr.

Digitized by Google

Verzeichnis der im Jahre 1896/97 abgehaltenen Sitzungen und der darin gemachten wissenschaftlichen Mittheilungen.

Außordentliche Sitzung vom 25. April 1896.

F. Klein legt vor: R. Fricke, Ueber die Theorie der automorphen Modulgruppen. (Gedruckt in Nachr. math.-phys. Kl. S. 91.)

E. Riecke legt vor: F. Pockels, Ueber die optische Wirkung eines elektrischen Feldes. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 102.)

Oeffentliche Sitzung vom 25. April 1896.

Geschäftsberichte. (Geschäftliche Mitteilungen. Heft 1.)

Sitzung vom 9. Mai 1896.

O. Wallach: Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium. (IV). (Nachr. math.-phys Kl. S. 114.)

F. Klein legt Probeartikel der mathematischen Encyclopädie von Prof. F. Meyer und Prof. H. Burkhardt vor.

Außerordentliche Sitzung vom 2. Juni 1896.

F. Leo überreicht und erläutert den Bericht über die Thesaurusconferenz in Wien.

F. Klein berichtet über die Verhandlungen und Beschlüsse der Cartellconferenz in Wien.

Sitzung vom 6. Juni 1896.

P. Kehr: Ueber die Chronologie der Briefe Papst Pauls I. im Codex Carolinus. (Nachr. phil.-hist. Kl. S. 102.)

F. Klein legt vor: O. Hölder über die Principien von Hamilton und Maupertuis. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 122.)

Sitzung vom 20. Juni 1896.

F. Klein überreicht ein Exemplar der Mathematical papers of the international mathematical congress of Chicago.

Digitized by Google

E. Riecke legt vor: F. Braun, 1) Versuche zum Nachweis einer orientirten elektrischen Oberflächenleitung. 2) über den continuirlichen Uebergang einer elektrischen Eigenschaft in der Grenzschicht von festen und flüßigen Körpern. 3) über die Leitung elektrisirter Luft. 4) ein Versuch über magnetischen Strom. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 158.)

U. v. Wilamowitz: Die Amphiktionie von Kalaurea. (Nachr. phil.-hist. Kl. S. 158.)

Sitzung vom 4. Juli 1896.

M. Lehmann: Denkwüdigkeiten des Freiherrn von Stein aus dem Jahre 1812. (Nachr. phil.-hist. Kl. S. 171.)

F. Leo überreicht den Praesidialbericht über den Thesaurus linguae Latinae für 1895/96.

D. Hilbert: Zur Theorie der aus n Einheiten gebildeten complexen Größen. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 179.)

Sitzung vom 20. Juli 1896.

W. Voigt: Ueber die Aenderung der Schwingungsform des Lichtes beim Fortschreiten in einem dispergirenden oder absorbirenden Mittel. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 186.)

Derselbe: Fluorescenz und kinetische Theorie. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 184.)

F. Frensdorff: Zur Geschichte der deutschen Reichsinsignien. (Erscheint in den Nachr. phil.-hist. Kl.)

F. Leo: Die staatsrechtlichen Excurse in den Annalen des Tacitus (Nachr. phil.-hist. Kl. S. 191.)

Außerordentliche Sitzung vom 1. August.

U. v. Wilamowitz: Des Mädchens Klage, eine alexandrinische Arie. (Nachr. phil.-hist. Kl. S. 209.)

E. Ehlers: Ueber die Annelidenfauna der Magelhaenstraße und der Kerguelen.

F. Klein: Ueber die zu singulären elliptischen Gebilden gehörigen Werte der Ikosaederirrationalität.

D. Hilbert legt vor: C. Noble (S. Francisco), Lösung der Randwertaufgabe für eine ebene Randcurve mit stückweise stetig sich ändernder Tangente und ohne Spitzen. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 191.)

Digitized by Google

Sitzung vom 24. October 1896.

U. v. Wilamowitz legt vor: 1) W. Helbig, Ueber die Nekropole von Assarlik in Karien. (Nachr. phil.-hist. Kl. S. 233.)
2) Fr. Hultsch, Ueber die Größe und Entfernung der Sonne nach Poseidonius. (Abhandlungen phil.-hist. Kl. 5.)

N. Bonwetsch legt vor: H. Achilles, Ueber Hippolyt's Oden und seine Schrift „Zur großen Ode". (Nachr. phil.-hist. Kl. S. 272.)

F. Kielhorn legt vor: Th. Zachariae, Prakrit *maïla* und Verwandtes. (Nachr. phil.-hist. Kl. S. 265.)

F. Leo: Zum Briefwechsel des Ausonius und Paulinus. (Nachr. phil.-hist. Kl. S. 253.)

J. Wellhausen: Der arabische Josippus. (Abhandlungen phil.-hist. Kl. 4.)

P. Kehr: Papsturkunden in Venedig, Reisebericht. (Nachr. phil.-hist. Kl. S. 277.)

J. Orth: 1) Fibrinbildung an serösen und Schleimhäuten. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 214.)
2) Dritter Bericht über Arbeiten aus dem pathologischen Institut in Göttingen. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 224.)

W. Voigt: 1) Eine neue Methode zur Untersuchung der Wärmeleitung in Krystallen. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 236.)
2) Ueber die Lage der Absorptionsbüschel in zweiaxigen pleochroitischen Krystallen. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 252.)

Oeffentliche Sitzung vom 7. November 1896.

P. Kehr: Ueber den Plan einer kritischen Ausgabe der Pabsturkunden bis Innocenz III. (Geschäftliche Mittheilungen Heft 2.)

Sitzung vom 21. November 1896.

F. Klein legt vor: H. Weber, Ueber einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 275.)
2) E. v. Weber, Ueber Linearconnexe. (Nachr. math.-phys. Kl S. 282).
3) W. F. Osgood, Ueber die ungleichmäßige Convergenz und die gliedweise Integration der Reihe. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 288.)

D. Hilbert legt vor: 1) A. Schoenflies, Ueber die Abbildung eines Würfels in beliebig vielen Dimensionen auf ein Punkt-

Digitized by Google

system von der Streckenlänge Null. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 255.)

2) H. Burkhardt, Lineare Scharen von Punktaggregation. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 267.)

W. Voigt, Einige kinetische Beobachtungen, die mit der Theorie der Verdampfung in Zusammenhang zu stehen scheinen. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 341.)

W. Schur überreicht Sonderabdrücke seiner Publicationen über die Thätigkeit der Sternwarte 1895 und über die Dimensionen des Planeten Jupiter.

U. v. Wilamowitz legt vor: C. Fredrich, Anekdota aus einer athenischen Handschrift mit Zusätzen von G. Wentzel. (Nachr. phil.-hist. Kl. S. 309.)

N. Bonwetsch: Die Fragen des Bartholomaeus. (Nachr. phil.-hist. Kl.)

Sitzung vom 5. December 1896.

W. Meyer: Die Buchstabenverbindungen der s. g. gothischen Schrift. (Erscheint in den Abhandlungen phil.-hist. Kl.)

D. Hilbert legt vor: P. Stäckel, Ueber Goldbachs empirisches Theorem. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 292.)

Sitzung vom 19. December 1896.

E. Riecke legt vor: P. Bachmetjew, Hauptresultate der Untersuchung über die Abhängigkeit der elektrischen Erdströme von Niveau-Schwankungen des Grundwassers in Bulgarien. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 300.)

O. Wallach: Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium (V). (Nachr. math.-phys. Kl. S. 304.)

Der vorsitzende Secretär legt vor: A. Hurwitz, Ueber die Zahlentheorie der Quaternionen. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 314.)

E. Ehlers macht Mitteilungen über die von der Gesellschaft unterstützte Forschungsreise des H. Dr. Bürger in Süd-Amerika.

U. v. Wilamowitz legt vor: H. Graeven, Florentiner Lukianhandschriften. (Nachr. phil.-hist. Kl. S. 341.)

Der vorsitzende Secretär macht Mitteilung von einem Briefe des Vice-Admirals de Jonquières in Paris, welcher einige Druckfehler in Band II von Gauss' Werken berichtigt. (Nachr. math.-phys. Kl. S. 365.)

Digitized by Google

Sitzung vom 9. Januar 1897.

U. v. Wilamowitz: Ueber die Geltung des Wortaccentes in der griechischen Musik und den Vortrag der verschiedenen Gattungen der Lyrik.

W. Schur: Ueber die Abplattung des Planeten Mars. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl.)

Der vorsitzende Secretär verliest einen Dankbrief des Herrn Baumeister Schmidt aus Budapest, dem die Gesellschaft eine Abschrift des Gauss-Bólyaischen Briefwechsels zugestellt hat, und legt einen daraus von Herrn P. Stäckel gemachten Auszug vor. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl.)

Sitzung vom 23. Januar 1897.

F. Klein legt vor: R. Müller, Ueber die angenäherte Geradführung durch das ebene Gelenkviereck. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl.)

J. Wellhausen legt vor: P. Horn, Lughati Furs, die älteste persische Glossensammlung von al Asadi. (Erscheint in den Abhandlungen.)

Sitzung vom 6. Februar 1897.

F. Kielhorn legt vor: H. Lüders, Die Sage von Ṛṣyaśṛṅga, ein Beitrag zur Geschichte des Epos. (Erscheint in den Nachr. phil.-hist. Kl.)

F. Leo: Die plautinischen Cantica und die hellenistische Lyrik. (Erscheint in den Abhandlungen.)

A. v. Könen: Ueber untere Kreiden in Kamerun. (Erscheint in den Abhandlungen.)

W. Voigt: Zur kinetischen Theorie idealer Flüssigkeiten. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl.)

W. Schur überreicht einen Separatabzug seiner Abhandlungen „Neue Untersuchungen über den Verlauf der systematischen Fehler bei Distanzmessungen."

Sitzung vom 20. Februar.

F. Klein legt vor: A. Wiman, Ueber die Gruppe der Vertauschungen von 8 Dingen. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl.)

D. Hilbert: Ueber diophantische Gleichungen. (Erscheint in den Nachr. math.-phys Kl.)

Digitized by Google

W. Voigt legt vor: W. Schütz, Das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl.)

C. Dilthey legt vor: Degering, Ueber etruskischen Tempelbau. (Erscheint in den Nachr. phil.-hist. Kl.)

F. Leo: Ueber die Composition von Senecas Chorliedern.

W. Schur überreicht einen Separatabzug seiner Abhandlung über die Marsabplattung.

Sitzung vom 6. März 1897.

F. Frensdorff: Ueber die Kaiserakte von 1742. (Erscheint in den Nachr. phil.-hist. Kl.)

F. Kielhorn spricht über die Junāgaḍh-Felseninschrift des Rudradāman und legt einen Abklatsch derselben vor.

D. Hilbert: Ueber die Entwickelung einer beliebigen analytischen Funktion in eine unendliche nach ganzen rationalen Functionen fortschreitende Reihe. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl.)

Der vorsitzende Secretär legt vor: A. Hurwitz, Ueber die Erzeugung der Invarianten durch Integration. (Erscheint in den Nachr. math-phys. Kl.)

W. Schur überreicht einen Separatabzug seiner Abhandlung ‚Heliometer' in Valentins Handwörterbuch der Astronomie.

Sitzung vom 20. März.

F. Leo legt vor: M. Wellmann, Ueber Krateuas.

Der vorsitzende Sekretär macht Mittheilungen über den Fortgang der Reise des H. Prof. Bürger in Columbien.

Digitized by Google

Verzeichnis der Mitglieder der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Ende März 1897.

Sekretäre.

Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff, Dr. ph., Geheimer Regierungsrath; vorsitzender Sekretär, Professor.

Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. phil., Professor, Geheimer Regierungs-Rath.

Ordentliche Mitglieder.

Philologisch-historische Klasse.

Ferdinand Wüstenfeld, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungs-Rath, seit 1856. (Zuvor Assessor, seit 1841.)

Hermann Wagner, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1880.

Ferdinand Frensdorff, Dr. jur. und. Dr. ph., Professor, Geh. Justitzrath, seit 1881.

Franz Kielhorn, Dr. ph., Professor, seit 1882.

Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1892. D. z. Sekretär.

Karl Dilthey, Dr. ph., Professor, seit 1892.

Wilhelm Meyer, Dr. ph., Professor, seit 1892.

Julius Wellhausen, Dr. th. und Dr. ph., Professor, seit 1892.

Max Lehmann, Dr. ph., Professor, seit 1893.

Gustav Cohn, Dr. ph., Professor, seit 1893.

Nathanael Bonwetsch, Dr. th., Professor, seit 1893.

Friedrich Leo, Dr. ph., Professor, seit 1893.

Gustav Roethe, Dr. ph., Professor, seit 1893.

Paul Kehr, Dr. ph., Professor, seit 1895.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Georg Meissner, Dr. med., Professor, Geh. Medicinalrath, seit 1861.

Ernst Schering, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath seit 1862. (Zuvor Assessor, seit 1860.)

Digitized by Google

Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1874. D. z. Sekretär.
Eduard Riecke, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1879. (Zuvor Assessor seit 1872.)
Adolf von Koenen, Dr. ph., Professor, Geh. Bergrath, seit 1881.
Woldemar Voigt, Dr. ph., Professor, seit 1883.
Friedrich Merkel, Dr. med., Professor, seit 1885.
Theodor Liebisch, Dr. ph., Professor seit, 1887.
Felix Klein, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1877. (Zuvor Assessor, seit 1871, Correspondent seit 1872.)
Gottfried Berthold, Dr. ph., Professor, seit 1887.
Albert Peter, Dr. ph., Professor, seit 1889.
Otto Wallach, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1890.
Johannes Orth, Dr. med. Professor, Geh. Medicinalrath, seit 1893.
Wilhelm Schur, Dr. ph., Professor, seit 1893.
David Hilbert, Dr. ph., Professor, seit 1895.

Assessor.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Bernhard Tollens, Dr. ph., Professor, seit 1884.

Ehren-Mitglieder.

Adolf Frhr. von Nordenskiöld, zu Stockholm, seit 1879. (Zuvor Correspondent, seit 1871.)
Heinrich von Stephan, Dr., Staats-Sekretär des Reichs-Postamts, Excellenz, zu Berlin, seit 1884.

Auswärtige Mitglieder.

Philologisch-historische Klasse.

Theodor Mommsen, Dr., Professor, zu Charlottenburg, seit 1867. (Zuvor Correspondent, seit 1857.)
Carl Hegel, Dr. ph. et jur., Professor, Geh. Rath, zu Erlangen, seit 1871. (Zuvor Correspondent, seit 1857.)
Alfred Ritter von Arneth, Dr., Hofrath, Direktor des Staatsarchivs, zu Wien, seit 1874. (Zuvor Correspondent, seit 1870.)
Adolf Kirchhoff, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1881, (Zuvor Correspondent, seit 1865.)
Theodor Nöldecke, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1883. (Zuvor Correspondent, seit 1864.)
Leopold Delisle, Administrateur général de la bibl. nationale, zu Paris, seit 1886. (Zuvor Correspondent, seit 1866.)

Digitized by Google

Theodor von Sickel, Dr., Professor, Hofrath, zu Rom, seit 1886. (Zuvor Correspondent, seit 1868.)

Wilhelm Wattenbach, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1886. (Zuvor Correspondent, seit 1865.)

Julius Oppert, Professor, zu Paris, seit 1887. (Zuvor Correspondent, seit 1876.)

M. J. de Goeje, Professor, zu Leiden, seit 1888. (Zuvor Correspondent, seit 1872.)

Gaston Paris, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1889.

Julius Ficker von Feldhaus, Dr., Professor, Hofrath, zu Insbruck, seit 1889. (Zuvor Correspondent, seit 1866.)

Alexander Conze, Dr., Generalsekretär des archäol. Instituts, zu Charlottenburg, seit 1890. Zuvor Correspondent, seit 1875.)

L. Duchesne, Abbé, zu Paris, seit 1891.

Max Müller, Professor, zu Oxford, seit 1891. (Zuvor Correspondent, seit 1861.)

Friedrich Bechtel, Dr., Professor, zu Halle, seit 1895. (Zuvor Assessor, seit 1882.)

Pasquale Villari, Senatore del Regno d'Italia, zu Florenz, seit 1896.

P. Heinrich Denifle, Sotto archivista della S. Sede, zu Rom, seit 1896.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Robert Bunsen, Dr., Großherzogl. Bad. Geheimer Rath I. Klasse, und Professor, Excellenz, zu Heidelberg, seit 1855.

Richard Dedekind, Dr., Professor, Geh. Hofrath, zu Braunschweig, seit 1862. (Zuvor Correspondent, seit 1859.)

William Thomson Lord Kelvin, Professor, zu Glasgow, seit 1864. (Zuvor Correspondent, seit 1859.)

Joseph Dalton Hooker, Direktor der Königlichen Gärten, zu Sunnigdale, seit 1865.

Carl Neumann, Dr., Professor, Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1868. (Zuvor Correspondent, seit 1864.)

Francesco Brioschi, Senator des Königreichs Italien, Direktor des kgl. technischen Instituts zu Mailand, seit 1870. (Zuvor Correspondent, seit 1864.)

Carl Claus, Dr., Professor, Hofrath, zu Wien, seit 1873. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1871.)

Eduard Frankland, Professor der Chemie, zu Reigate, seit 1873.

Max von Pettenkofer, Dr., Geheimer Rat und Ober-Medicinalrath, Professor zu München, seit 1874.

Digitized by Google

Alex Williamson, zu London seit 1874.

Charles Hermite, Professor, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris, seit 1874. (Zuvor Correspondent, seit 1861.)

Lazarus Fuchs, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1875. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1874.)

Joh. Jap. Sm. Steenstrup, Dr., Professor, zu Kopenhagen, seit 1876. (Zuvor Correspondent, seit 1860.)

A. L. Descloizeaux, Professor der Mineralogie, zu Paris, seit 1877. (Zuvor Correspondent, seit 1885.)

Friedrich Kohlrausch, Dr., Geh. Regierungsrath, Präsident der phys.-techn. Reichsanstalt, Charlottenburg, seit 1879. (Zuvor Assessor, seit 1867.)

Luigi Cremona, Professor, Senator und Direktor der Ingen.-Schule des Königreichs Italien zu Rom, seit 1880. (Zuvor Correspondent, seit 1869.)

Albert von Kölliker, Dr. ph. und Dr. med., Geheimer Rat, Excellenz, Professor, zu Würzburg, seit 1882. (Zuvor Correspondent, seit 1862.)

Sir Gabriel Stokes, Professor, zu Cambridge, seit 1882. (Zuvor Correspondent, seit 1864.)

Arthur Auwers, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, beständ. Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, seit 1882. (Zuvor Correspondent, seit 1871).

Eugenio Beltrami, Professor, zu Rom, seit 1883. (Zuvor Correspondent, seit 1875.)

Johannes Reinke, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Kiel, seit 1885. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1882.)

Wilhelm Foerster, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1886. (Zuvor Correspondent, seit 1875.)

Ludwig Boltzmann, Dr., Professor, Geheimer Rath, zu Wien, seit 1887. (Zuvor Corrrspondent, seit 1882.)

Carl Klein, Dr., Professor, Geh. Bergrath, zu Berlin, seit 1888. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1887.)

H. Graf zu Solms-Laubach, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1888. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1879.)

Gustav Wiedemann, Dr., Professor, Geh. Rath, zu Leipzig, seit 1888.

Rudolf Leuckart, Dr. Professor, Geh. Rath, zu Leipzig, seit 1889. (Zuvor Correspondent, seit 1859.)

Victor Meyer, Dr., Professor, Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1889. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1885.)

Karl Gegenbauer, Dr., Professor, Geh. Rath zu Heidelberg, seit 1891.

Digitized by Google

Adolf von Bayer, Dr., Professor, Geh. Rath, zu München, seit 1892. (Zuvor Correspondent, seit 1879.)
Eduard Suess, Dr., Professor, zu Wien, seit 1892. (Zuvor Correspondent, seit 1884.)
Herm. Amandus Schwarz, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1892. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1875, Correspondent seit 1869.)
Sophus Lie, Dr., Professor, zu Leipzig, seit 1892. (Zuvor Correspondent, seit 1872.)
Henri Poincaré, Professor, zu Paris, seit 1892. (Zuvor Correspondent, seit 1884.)
Heinrich Weber, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1895. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1892, Correspondent seit 1875.)

Correspondenten.

Philologisch-historische Klasse.

Jacob Burkhardt, Dr., Professor, zu Basel, seit 1865.
Leo Meyer, Dr., Professor, Wirkl. Staatsrath, Excellenz, zu Dorpat, seit 1865. (Zuvor Assessor, seit 1861.)
Theodor Aufrecht, Dr., Professor, zu Bonn, seit 1871.
Ulrich Köhler, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1871.
William Stubbs, D. D. Rt. Rev. Bishop of Oxford, Cuddesdon Palace near Oxford, seit 1872.
Ferdinand Justi, Dr., Professor, Geh. Regierungsrat, zu Marburg, seit 1875.
Stephanos Kumanudes, Dr., Professor, zu Athen, seit 1876.
Ludwig Hänselmann, Dr., Professor, Stadtarchivar, zu Braunschweig, seit 1878.
Adolf Michaelis, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1879.
Georg Hoffmann, Dr., Professor, zu Kiel, seit 1881.
Franz Bücheler, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1881.
Wolfgang Helbig, Dr., Professor, zu Rom, seit 1882.
Jos. G. Bühler, Dr., Professor, zu Wien, seit 1883.
Otto Benndorf, Dr., Professor, Hofrath, zu Wien, seit 1883.
Curt Wachsmuth, Dr., Professor, Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1884.
Heinrich Nissen, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1884.
Adalbert Bezzenberger, Dr., Professor zu Königsberg, seit 1884.
J. F. Fleet, Dr., zu Bombay, seit 1885.
Friedrich Hultsch, Dr., Ober-Schulrath, zu Dresden, seit 1885.

Digitized by Google

Johannes Vahlen, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, best. Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, seit 1885.

Percy Gardner, Professor, zu Oxford, seit 1886.

Friedrich Imhoof-Blumer, Dr., zu Winterthur, seit 1886.

Heinrich Kiepert, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1886.

Adolf Köcher, Dr., Professor, zu Hannover, seit 1886.

Charles Piot, Archivar, zu Brüssel, seit 1886.

Joh. Gottfried Wetzstein, Dr., Konsul a. D., zu Berlin, seit 1886.

Eugen Petersen, Dr., Professor, Sekretär des archäologischen Instituts, zu Rom, seit 1887.

Hermann Usener, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1887.

Sophus Bugge, Dr., Professor, zu Cristiania, seit 1887.

Ignazio Guidi, Professor, zu Rom, seit 1887.

Wilhelm Pertsch, Dr., Ober-Bibliothekar, Geh. Hofrath, zu Gotha, seit 1889.

Otto Ribbeck, Dr., Professor, Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1888.

Adolf Erman, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1888.

Constantin Höhlbaum, Dr., Professor, zu Gießen, seit 1889.

Karl Koppmann, Dr. Stadtarchivar, zu Rostock, seit 1889.

Richard Pischel, Dr., Professor, zu Halle, seit 1889.

Clemens Robert Markham, Kustos im Geographical Departement des India office, zu London, seit 1890.

Hermann Oldenberg, Dr., Professor, zu Kiel, seit 1890.

Wilhelm Fröhner, Dr., zu Paris, seit 1891.

Charles Gross, Professor, zu Cambridge, Mass., U. St. A., seit 1891.

Konstantinos Kontos, Professor, zu Athen, seit 1892.

Moritz Ritter, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1892.

Goswin Freiherr von der Ropp, Dr., Professor, zu Marburg, seit 1892.

Henry Harisse, zu Paris, seit 1892.

Ludwig Traube, Dr., Privatdocent a. d. Universität München, seit 1894.

Wilhelm von Bippen, Dr., Staatsarchivar und Senatssekretär, zu Bremen, seit 1894.

Dietrich Schaefer, Dr., Professor, zu Tübingen, seit 1894.

Edward Schröder, Dr., Professor, zu Marburg, seit 1894.

Albert Hauck, Dr., Professor, zu Leipzig, seit 1894.

Adolf Jülicher, Dr., Professor, zu Marburg i. H., seit 1894.

Digitized by Google

Wilhelm Wilmanns, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn a. Rh., seit 1894.

Hermann Möller, Dr., Professor, zu Kopenhagen, seit 1894.

Hermann Jacobi, Dr., Professor, zu Bonn a. Rh., seit 1894.

Heinrich Zimmer, Dr., Professor, zu Greifswald, seit 1894.

August Mau, Dr., Professor und Bibliothekar des Kgl. ärchäologischen Instituts, zu Rom, seit 1894.

Maxime Collignon, Dr., Professor an der faculté de lettres, Paris, seit 1894.

E. Hultsch, Dr., Governement Epigraphist, zu Bangalore, seit 1895.

Elias Steinmeyer, Dr., Professor, zu Erlangen, seit 1895.

Eduard Meyer, Dr., Professor, zu Halle a/S., seit 1895.

Otto Seek, Dr., Professor, zu Greifswald, seit 1895.

Oswald Holder-Egger, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1896.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Heinrich Limpricht, Dr. med. et ph., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Greifswald, seit 1860. (Zuvor Assessor, seit 1857.)

Wilhelm Gottlieb Hankel, Dr. ph. et med., Professor, Geheimer Rath, zu Leipzig, seit 1864.

Georg Quincke, Dr., Professor, Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1866.

Benj. Apthorp Gould, Professor, zu Cambridge, U. St., seit 1867.

Rudolf Lipschitz, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1867.

Robert Mallet, Mitglied der Royal Society zu London, seit 1869.

Elwin Bruno Christoffel, Dr., Professor a. D., zu Straßburg, seit 1869.

Wilh. Theod. Bernhard Holtz, Dr., Professor, zu Greifswald, seit 1869.

Georg Salmon, Professor, Provost des Trinity College zu Dublin, seit 1869.

Carl Friedrich Rammelsberg, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Lichterfelde bei Berlin, seit 1870.

Paul Gordan, Dr., Professor, zu Erlangen, seit 1870.

Eduard Pflüger, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, zu Bonn, seit 1872.

Adolf Mayer, Dr., Professor, zu Leipzig, seit 1872.

Karl Anton Bjerknes, Dr., Professor, zu Christiania, seit 1873.

Johannes Thomae, Dr., Professor, Hofrath, zu Jena, seit 1873.

Digitized by Google

Henry Enfield Roscoe, Professor, zu London, seit 1874.
Johann Strüver, Dr., Professor, zu Rom, seit 1874.
Leo Königsberger, Dr., Professor, Großh. Bad. Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1874.
Ferdinand Frh. von Richthofen, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1875.
William Huggins, Professor, zu London, seit 1876.
Joseph Norman Lockyer, Professor, zu London, seit 1876.
Wilhelm Waldeyer, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, best. Sekretär der K.Akademie d. Wissenschaften, zu Berlin, seit 1877.
Theodor Reye, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1877.
Franz Carl Joseph Mertens, Dr., Professor, zu Wien, seit 1877.
Gösta Mittag-Leffler, Dr., Professor, zu Stockholm, seit 1878.
Georg Cantor, Dr., Professor, zu Halle, seit 1878.
Alexander Agassiz, Professor, zu Cambridge, U. St. A., seit 1879.
Karl von Voit, Dr., Professor, Geheimer Rath und Obermedicinalrath, zu München, seit 1879.
Wilhelm Hittorf, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Münster, seit 1879.
Friedrich Beilstein, Dr., Professor, Staaatsrath, zu St. Petersburg, seit 1880.
Wilhelm His, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, zu Leipzig, seit 1880.
Ulisse Dini, Professor, zu Pisa, seit 1880.
H. Rosenbusch, Dr., Professor, Geh. Bergrath, zu Heidelberg, seit 1882.
R. Fittig, Dr., Professor, zu Straßburg i. E., seit 1882.
Ferdinand Lindemann, Dr., Professor, zu München, seit 1882.
Ludwig Kiepert, Dr., Professor, zu Hannover, seit 1882.
Franz Eilhardt Schulze, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1883.
Gaston Darboux, Dr., Professor, zu Paris, seit 1883.
Wilhelm Conrad Röntgen, Dr., Professor, zu Würzburg, seit 1883.
Ludwig Sylow, Dr., zu Frederickshall, seit 1883.
Gustav Tschermak, Dr., Professor, Hofrath, zu Wien, seit 1884.
Theodor Wilh. Engelmann, Dr., Professor, zu Utrecht, seit 1884.
Emile Picard, Professor, zu Paris, seit 1884.
Edouard Bornet, Professor, zu Paris, seit 1885.
Wilhelm Pfeffer, Dr., Professor, Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1885.

Digitized by Google

James Hall, Professor, zu Albany (New-York), seit 1885.
Ludimar Hermann, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, zu Königsberg, seit 1886.
Gustav Retzius, Dr., Professor, zu Stockholm, seit 1886.
Ferdinand Zirkel, Dr., Professor, Geh. Bergrath, zu Leipzig, seit 1886.
J. Boussinesq, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1886.
Georg Frobenius, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1886.
William Lord Rayleigh, zu Witham (Essex), seit 1886.
Julius Weingarten, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1886.
Walther Flemming, Dr., Professor, zu Kiel, seit 1887.
Hermann Vogel, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Potsdam, seit 1887.
Emil Warburg, Dr, ph., Professor, zu Berlin, seit 1887.
Ernst Mach, Dr., Professor, Regierungsrath. zu Prag, seit 1887.
Hermann Vöchting, Dr., Professor, zu Tübingen, seit 1888.
Eugen Warming, Dr., Professor, zu Kopenhagen, seit 1888.
Simon Newcomb, Professor, Superintendent of the American Nautical Almanac, zu Washington, seit 1888.
Alexander Brill, Dr., Professor, zu Tübingen, seit 1888.
Karl von Kupffer, Dr. Professor, Kais. russ. Kollegienrath, zu München, seit 1889.
Sir Archibald Geikie, Director-General of the Geological Survey of the United Kingdom zu London, seit 1889.
Otto Bütschli, Dr., Professor, Hofrath, zu Heidelberg, seit 1889.
E. W. Beneke, Dr., Professor, zu Straßburg i. E., seit 1889.
J. Willard Gibbs, Professor, zu Newhaven, seit 1889.
F. Fouqué, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1891.
Friedrich Prym, Dr., Professor, zu Würzburg, seit 1891.
Max Bauer, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath zu Marburg, seit 1892.
Camillo Golgi, Professor, zu Pavia, seit 1892.
Friedrich Leopold Goltz, Dr., Professor, zu Straßburg i. E., seit 1892.
Victor Hensen, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, zu Kiel, seit 1892.
Alexander von Karpinsky, Excellenz, Präsident des Comité geolog., zu St. Petersburg, seit 1892.
Dmitri Mendelejeff, Dr., Professor, zu St. Petersburg, seit 1892.
Simon Schwendener, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1892.
Karl von Zittel, Dr., Professor, zu München, seit 1892.

Digitized by Google

Heinrich Bruns, Dr., Professor, Geh. Rath zu Leipzig, seit 1892.
J. H. van't Hoff, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1892.
Henry A. Rowland, Professor, zu Baltimore, seit 1892.
Max Nöther, Dr., Professor, zu Frlangen, seit 1882.
Adolf Hurwitz, Dr., Professor, zu Zürich, seit 1892.
Robert Helmert, Dr, Professor, Geh. Regierungsrath, zu Potsdam, seit 1896.

Digitized by Google

Von der philosophischen Fakultät der GeorgAugusts-Universität in Göttingen ist zur Veröffentlichung folgendes mitgetheilt.

Beneke'sche Preisstiftung.

Am 11. März 1897, dem Geburtstage des Begründers der Preisstiftung, des Consistorialraths Carl Gustav Beneke, wurde in einer öffentlichen Sitzung der philosophischen Fakultät das Ergebniß der Preisbewerbung für das Jahr 1897 verkündet:

Im Jahre 1894 ist folgende Aufgabe gestellt worden:

„Die Untersuchung der Mischbarkeit krystallisirter Stoffe hat vor Kurzem eine erhöhte Bedeutung gewonnen, einmal durch die von J. H. van't Hoff aufgestellte Hypothese, derzufolge Mischkrystalle sich nicht wie mechanische Gemenge verhalten, sondern „feste Lösungen" bilden, auf welche sich die für flüssige Lösungen erkannten Gesetzmäßigkeiten übertragen lassen, andererseits durch die von H. W. B. Roozeboom durchgeführte Anwendung der allgemeinen von Willard Gibbs aufgestellten thermodynamischen Gesetze über die Gleichgewichtszustände eines aus mehreren Phasen bestehenden Systems auf das Gleichgewicht zwischen mischbaren krystallisirten Stoffen und ihren gesättigten Lösungen. Das Interesse, welches sich an diesen Gegenstand knüpft, beruht darauf, daß sich jetzt eine Methode zur Bestimmung der Moleculargröße fester Stoffe darbietet. Ist die Analogie zwischen verdünnten festen und flüssigen Lösungen vorhanden, so muß in allen Fällen, in welchen der gelöste Stoff in beiden Zuständen dieselbe Moleculargröße besitzt, zwischen den Concentrationen dieses Stoffes in den Mischkrystallen und in den gesättigten Lösungen derselben ein constantes von der Concentration selbst unabhängiges Verhältniß bestehen. Da die experimentelle Prüfung dieses Satzes von hervorragender Bedeutung für die Kenntniß der Molecularconstitution fester Stoffe ist, so wünscht die Facultät eine sorgfältige Bestimmung der Lös-

Digitized by Google

lichkeit von Mischkrystallen, welche einen sicheren Schluß auf den Bereich der Giltigkeit der oben erwähnten theoretischen Betrachtungen gestattet."

Es ist rechtzeitig eine Bewerbungsschrift mit dem Motto „Auch Einer" eingeliefert worden.

Den Hauptttheil dieser Arbeit bildet die Darlegung der experimentellen Ergebnisse, die der Verfasser über die Löslichkeit von Mischkrystallen erhalten hat. Die Mehrzahl der Versuchsreihen ist nach einer zweckmäßig gewählten Methode ausgeführt unter Einhaltung der Vorsichtsmaßregeln, die bei der Gewinnung und der Analyse von Mischkrystallen erforderlich sind. Auf diesem Wege ist es dem Verfasser durch mühevolle und zeitraubende Versuche gelungen, unsere Kenntniß der Grenzen der Mischfähigkeit isomorpher Stoffe erheblich zu erweitern. Seine Ergebnisse würden noch übersichtlicher hervortreten, wenn er die beobachtete Abhängigkeit zwischen der Zusammensetzung der Mischkrystalle und der Zusammensetzung ihrer gesättigten Lösungen nicht nur für Kalium- und Thalliumnitrat, sondern für alle von ihm untersuchten Salzpaare graphisch dargestellt hätte. Von diesem unwesentlichen Mangel abgesehen, würde der mit rühmlichem Fleiße und großer Sorgfalt durchgeführte experimentelle Theil der Arbeit volle Anerkennung verdienen, wenn die Fakultät lediglich die Ausführung von Löslichkeitsbestimmungen an beliebig zu wählenden isomorphen Körper gewünscht hätte. Allein unter dem in der Aufgabe hervorgehobenen Gesichtspunkte ist die Auswahl der untersuchten Stoffe und die theoretische Behandlung des Beobachtungsmaterials für die Beurtheilung entscheidend, und in dieser Hinsicht entspricht die Arbeit nicht den berechtigten Erwartungen. Der Verfasser hat sich die Lösung der Aufgabe dadurch außerordentlich erschwert, daß er nur Elektrolyte benutzt und als Lösungsmittel nur Wasser angewendet hat. Die einzige mit einem Paare von Nichtelektrolyten, Harnstoff und Sulfoharnstoff, angestellte Versuchsreihe ergab, daß diese Stoffe nie zusammenkrystallisiren. Durch die Einschränkung der Untersuchung auf relativ leicht lösliche Körper ist der Verfasser aber verhindert worden, die Frage nach dem Verhalten verdünnter Lösungen, deren Beantwortung in erster Linie angestrebt werden mußte, eingehend zu prüfen. Am wenigsten befriedigt der theoretische Theil der Arbeit. Er ist nicht frei von Mißverständnissen und willkürlichen Annahmen und hat demgemäß zu unbegründeten Resultaten geführt. Daß der Verfasser die Theorie des Gegenstandes nicht beherrscht, ergiebt sich auch aus dem Mangel an Kritik in seiner Besprechung

Digitized by Google

der Untersuchungen anderer Forscher. Wenn er am Schluß die Behauptung aufstellt, daß die Krystallmoleküle der einfachen chemischen Körper allgemein mit den normalen chemischen Molekülen identisch sind, so beweist er damit, wie wenig er sich der Lücken unserer Kenntnisse auf einem Gebiete, dessen Erforschung kaum begonnen hat, bewußt geblieben ist.

Die Fakultät ist daher nicht in der Lage, der vorliegenden Bewerbungsschrift einen der beiden Preise zu ertheilen.

Für das Jahr 1900 stellt die philosophische Fakultät folgende neue Aufgabe:

„Der Einfluß Gerlach Adolph's von Münchhausen auf die Hebung des geistigen Lebens in Hannover.

Leibnitz hatte in Hannover vielfache Anregungen hinterlassen. Diese Ansätze entwickelten sich kräftig und allseitig während der langen Wirksamkeit Münchhausens. Seine besondere Aufmerksamkeit wandte er den Wissenschaften zu, zumeist der Geschichte und Jurisprudenz, der Rechtspflege und der Verwaltung des Landes; die Gründung und Pflege der Universität in Göttingen ist nur ein Glied der langen Kette.

Abgesehen von verschiedenen Aufsätzen Frensdorff's hat bisher nur die Gründung der Universität in Göttingen eingehende Darstellung gefunden. Gewünscht wird jetzt eine allseitige Darstellung der Verdienste Münchhausens um die Hebung des geistigen Lebens in Hannover, auf Grund des reichen Stoffes, der sich hauptsächlich in Hannover und in der Göttinger Bibliothek erhalten hat."

Bewerbungsschriften sind in einer der modernen Sprachen abzufassen und bis zum 31. August 1899, auf dem Titelblatte mit einem Motto versehen, an uns einzusenden, zusammen mit einem versiegelten Briefe, der auf der Außenseite das Motto der Abhandlung, innen Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben werden. Auf dem Titelblatte der Arbeit muß ferner die Adresse verzeichnet sein, an welche die Arbeit zurückzusenden ist, falls sie nicht preiswürdig befunden wird.

Der erste Preis beträgt 3400 Mark, der zweite 680 Mark.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1900, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät zu Göttingen.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum ihrer Verfasser.

Digitized by Google

Die Preisaufgaben, für die die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1897 und 31. August 1898 einzusenden sind, finden sich in den Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mittheilungen aus dem Jahre 1895 Seite 30 und 1896 Seite 69.

Göttingen, den 11. März 1897.

Die philosophische Fakultät.

Der Dekan

Th. Liebisch.

Digitized by Google

Verzeichniß
der im Jahre 1896 eingegangenen Druckschriften[1])

A. Gesellschaftsschriften.

Aachen. Zeitschrift des Aachener Geschichtsvereins. Bd. 18. 1896.

Aargau. Argovia. Jahresschriften der historischen Gesellschaft des Kantons Aargau. Bd. 26. 1896.

Adelaide. Transactions of the R. Society of South Australia. Vol. 20. P. 1. 1896.

Agram. Starine na sviet izdaje Jugoslavenska Akademija znanosti i umjetnosti. Kngiga 27. Zagrebu 1895.

Altenburg. Mittheilungen aus dem Osterlande. Hrsg. v. d. Naturforschenden Gesellschaft des Osterlandes zu Altenburg. Bd. 7 (d. g. R. Bd. 26). 1895.

Amiens. Bulletins de la Société des Antiquaires de Picardie. 1894 No. 4. — 1895 No. 1.

Amsterdam. Jaarboek van de Koninkl. Akademie van Wetenschappen v. 1895.

— Verhandelingen der Koninkl. Akademie van Wetenschappen. (Afd. Natuurkunde: 1. Sectie, Deel 3. No. 5—9. 1896 — Deel 5. No. 1. 2. 1896. 2. Sectie, Deel 4. No. 7—9. 1895 — Deel 5. No. 1—3. 1896. — Afd. Letterkunde: Deel 1. No. 5—6. 1896.

— Verslagen der Zittingen van de Wis- en Natuurkundige Afd. der Koninkl. Akad. van Wetenschappen. 1895—96. Deel 4. [1896]).

— Pascoli, Jo. Cena in caudiano Nervae, carmen praemio aureo ornatum in certamine poetico Hoeufftiano. Acc. duo poemata laudata. Amstelod. 1896.

— Tijdschrift van het Koninkl. Nederlandsch Aardrijkskundig Genootschap. Ser. 2. Deel 13. Afl. No. 1—5. 1896.

---

1) Der Druckort ist nur dann besonders angegeben, wenn er nicht mit dem Sitz der Gesellschaft zusammenfällt. Das Druckjahr ist, wo es dem Jahrgang einer Zeitschrift nicht entspricht, in Klammern hinzugefügt.

Digitized by Google

Amsterdam. Revue semestrielle des publications mathématiques rédigée sous les auspices de la Société Mathématique d'Amsterdam. T. 4. 1896.

— Wiskundige opgaven met de oplossingen door de leden van het Wiskundig Genootschap. Deel 7. Stuk 1. 2. 1896.

Annaberg. Mittheilungen des Vereins zur Geschichte von Annaberg und Umgegend. 5. Jahrbuch f. 1895/96.

Antwerpen. Bulletin de la Société Royale de géographie d'Anvers. T. 20. 1895/96 fasc. 3. 4.

Athen. *Ἀθηνᾶ. Σύγγραμμα περιοδικὸν τῆς ἐν Ἀθήναις Ἐπιστημονικῆς Ἑταιρείας.* T. 8. 1896.

— Mittheilungen des Kaiserl. deutschen archaeologischen Instituts. Athenische Abtheilung. Bd. 21. Heft 2. 1896.

Augsburg. Zeitschrift des historischen Vereins für Schwaben und Neuburg. Jahrg. 22. 1895.

Baltimore. Johns Hopkins University Circulars. Vol. 15 No. 123—127. 1896.

— American Journal of Mathematics. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 16. No. 4. 1894. — Vol. 17. 1895. — Vol. 18. No. 1—2. 1896.

— Johns Hopkins University Studies. 12. Series No. 8—12. 1894. — 13. Series No. 1—12. 1895. — 14. Series No. 1—7. 1896.

Basel. Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. 11. Bd. 2. H. 1996.

Batavia. Notulen van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel 33. Afl. 3. 4. 1896.

— Tijdschrift voor indische taal-, land- en volkenkunde uitgeg. door het Batav. Genootschap van Kunsten en Wetensch. Deel 38. Afl. 6. 1895. — Deel 39. Afl. 1—3. 1895—96.

— Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India. Uitgeg. door het Batav. Genootschap van Kunsten en Wetensch. van J. A. van der Chijs. A. 1666—67. (1895.)

— Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811 dor J. A. van der Chijs. Uitgeg. door het Bat. G. v. K. e. W. Deel 14. 1804—1808. (1895.)

— Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia. Vol. 17. 1894. (1895.)

Digitized by Google

Batavia. Regenwaarnemingen in Nederlandsch Indië door J. P. van der Stok. Jaarg. 16. 1894. (1895.)

— Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. Uitgeg. door de Koninkl. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Deel 55 (= IX, 4) 1896.

— Voordrachten No. 1. 1889. — Boekwerken 1896. — Supplement-Catalogus (1883—1893) der Bibliothek van de K. Natuurk. Vereeniging 1895.

Bayreuth. Archiv für Geschichte und Alterthumskunde von Oberfranken. Hrsg. v. d. histor. Verein für Oberfranken zu Bayreuth. Bd. 19. H. 3. 1895.

— Katalog der Bücher und Manuscripte des histor. Vereins. 1. Hälfte. 1896.

— Quellen zur alten Geschichte des Fürstenthums Bayreuth. Bd. 1. 1895.

Berkeley. University of California. Bulletin of the Departement of Geology. Vol. 1 No. 10. 11. 1895—96.

— University of California. Bulletin of the Agricultural Experimental Station. No. 104—109. Sacramento 1894/95. — Register of the University 1894/95. — Report of the Board of State Viticultural Commissioners. State Viticultural Commission. 2. ed. 1881—1889/90 (1890). — 1891/92 (1892). — 1893/94 (1894) & App. 1894.

— Directory of the Grape Growers, Wine Makers 1891. — Report of the Chief Executive Viticultural Officer to the Board of State Viticultural Commissioners y. 1881 (1882), y. 1882/3 & 1883/4 (1884). — Biennial Report of the President of the University. 1894. — Annual Report of the Secretary to the Board of Regents for the year ending 30. Jun. 1895.

— Report of the Annual State Viticultural Convention. 6. 1888.

— Philosophical Union. 52. Report. August 1895.

— The Oaks of Berkeley and some of their insect inhabitants. By J. J. Rivers. 1887.

Berlin. Abhandlungen der Koenigl. Akademie der Wissenschaften zu B. aus d. J. 1895.

— Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akad. der Wissensch. zu B. Jahrg. 1895 No. 39—53. — 1896 No. 1—39.

— Acta Borussica. Denkmäler der Preuß. Staatsverwaltung im 18. Jahrh. Getreidehandelspolitik. Bd. 1. 1896.

— Politische Correspondenz Friedrichs des Großen. Bd. 22. 1895.

Digitized by Google

Berlin. Die Venusdurchgänge 1874 und 1882. Bericht über die deutschen Beobachtungen. Im Auftrage der Commission für die Beobachtung des Venus-Durchgangs hrsg. v. A. Auwers. Bd. 6. 1896.

— Korrespondenzblatt des Gesammtvereins der deutschen Geschichts- und Alterthumsvereine. Jahrg. 44. 1896.

— Mittheilungen der Gesellschaft für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte. Jahrg. 5. H. 4. 1896. — Jahrg. 6. 1896.

— Jahresbericht des Direktors des Königl. Geodätischen Instituts. 1894/95 (1895). — 1895/96 (1896).

— Mittheilungen des Vereins für die Geschichte Berlins. 1896. No. 1—6. 8—12.

— Zeitschrift des Vereins für Volkskunde. Jahrg. 6. 1896.

Bern. Jahrbuch für schweizerische Geschichte. Hrsg. auf Veranstaltung der Allgemeinen Geschichtsforschenden Gesellschaft der Schweiz. Bd. 21. Zürich 1896.

— Bodenseekarte in zwei Blättern. Hrsg. von der Vollzugscommission im Auftrage der 5 Staaten Baden, Bayern, Oesterreich, Schweiz, Württemberg. Erstellt durch das Eidg. Topogr. Bureau in Bern. 1895.

Bologna. Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Ser. 5. T. 4. 1896.

Bonn. Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 99. 1896.

Bordeaux. Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Ser. 4. T. 5 & App. 1895.

— Commission météorologique de la Gironde. Observations pluviométriques et thermométriques. 1893/94. 1894.

Boston. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. N. S. Vol. 22. 1894/95 (1895).

— Memoirs read before the Boston Society of Natural History. Vol. 5 No. 1. 2. 1895.

— Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. 26. p. 4. 1894. — Vol. 27. p. 1—74. 1896.

Braunsberg. Monumenta historiae Warmiensis. Bd. 6. 3. Abth. Bibliotheca Warmiensis. 6. Bogen 11—20. 1895.

Digitized by Google

Braunsberg. Zeitschrift für die Geschichte und Alterthumskunde Ermlands. Bd. 11. H. 2 (= G. R. H. 34). 1895.

Bremen. Abhandlungen hrsg. vom Naturwissenschaftlichen Vereine zu Bremen. Bd. 13. H. 2—3. 1895. — Bd. 14. H. 1. 1896.

— Bremisches Jahrbuch. Hrsg. von der historischen Gesellschaft des Künstlervereins. Bd. 18. 1896.

Breslau. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. 73 f. 1895 (1896), Ergänzungs-H. 4. 1896.

— Schlesiens Vorzeit in Bild und Schrift. Zeitschrift des Vereins für das Museum schlesischer Altertümer. Bd. 6 H. 4. 1896. — Bd. 7 H. 1. 1896.

Brisbane. Proceedings of the Royal Society of Queensland. Vol. 11. P. 2. 1896.

Bromberg. Jahrbuch der Historischen Gesellschaft für den Netzedistrikt zu Br. Jahrg. 1896.

Brünn. Bericht der Meteorologischen Commission des Naturforschenden Vereines in Brünn über die Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. 13. i. J. 1893 (1895).

— Verhandlungen des Naturforschenden Vereines in Brünn. Bd. 33. 1894 (1895).

Brüssel. Annuaire de l'Académie Roy. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 62. Année. 1896.

— Bulletins de l'Acad. Roy. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 65. Année. Sér. 3. T. 30. No. 9—12. 1895. — 66. Année. Sér. 3. T. 31. 32. No. 1—11. 1896.

— Analecta Bollandiana. T. 15. 1896.

— Université libre de Bruxelles. Rapport sur l'année académique. 1895/96 (1896). — Statuts organiques de l'université et programme des cours. 1896/97 (1896).

— Institut international de Bibliographie. Bulletins. 1. Année. 1895. N. 2—3. 1896.

Budapest. Magyar Tudományos Akadémiai Almanach polgári és csillagászati naptárral 1896-re (1896).

— Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Königl. Ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft redig. v. J. Fröhlich. Bd. 13. 1895. 1. Hälfte. (1896.)

Digitized by Google

Budapest. Emlékek. Török-Magyarkori Történelmi. 2. Osztály: Irók. Török Történetirók. 2. kötet 1896.
— Értekezések a Magyar Tudomán. Akadém. nyelv-és széptudományi osztálya köreböl. Kötet 16. szám 6. 7. 1895.
— Értekezések a bölcsészeti tudományok köréböl. Kötet 3. szám 3. 1896.
— Értekezések a társadalmi tudományok köreböl. Kiadja a Magyar Tudom. Akadém. Kötet 11. szám 11. 1896.
— Értekezések a történelmi tudományok köreböl. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet 16. szám 7. 1896.
— Archaeologiai Értesitö. A Magyar Tudom. Akad. arch. bizottságának es, az orsz. régészeti s. emb. társulatnak közlönye, szerkeszti Hampel József. Uj folyam Kötet 15. szám 4—5. 1896. — Kötet 16. szám 1—2. 1896.
— Mathematikai és természettudományi Értesitö. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet 13. füz. 3/5. 1896. — Kötet 14. füz. 1/2. 1896.
— Archaeologiai Közlemények hazai müemlékek ismeretének elömozditására. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet 18—19. (= Uj folyam. Kötet 15—16). 1896.
— Mathematikai és természettudományi Közlemények vonatkozólag a hazai viszonyokra. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet 26, szám 3, 4, 5. 1895.
— Nyelvtudományi Közlemények kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet 25. füz. 3, 4. 1895—96. — Kötet 26. füz. 1, 2. 1896.
— Mátyás Király levelei. A Magyar Tudom. Akad. történelmi bizottságának gegbizásából közzéteszi Fraknói Vilmos. Külügyi osztály. Kötet 2. 1480—1490. 1895.
— Megyei Monografiák . . . szerkeszti Körösi József. Kötet 1. 2. 1891—1895.
— Monumenta Hungariae historica. Magyar történelmi Emlékek kiadja a Magyar Tudom. Akad. történelmi bizottsága I. Osztály. Monumenta comitialia regni Transsylvanicae. Kötet 18. (1683—1686). 1895. — 2. Osztály. Irók. Kötet 34. 1895.
— Monumenta Hungariae juridica-historica. Corpus statutorum. T. 4. P. 1. 1896.
— Lexicon linguae Votjacicae. A Votják nyelv Szótára irta Munkácsi Bernat. Füzet 4 (Bogen 31—53). 1896.
— A Magyar tudományos akad. kiadásában megjelent Munkák es folyóiratok czímjegyzéke. 1831—1895. 1896.
— Ungarische Revue. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 15. H. 8—10. 1895.

Digitized by Google

Budapest. Rapport sur les travaux de l'Acad. Hongroise des Sciences en 1895. 1896.
— Regi Magyar Költök Tára. Kötet 6. 1896.

— Jahresbericht der Königl. Ungarischen Geologischen Anstalt f. 1893 (1895).
— Földtani Közlöny. Geologische Mittheilungen. Zeitschrift der Ungar. Geolog. Gesellschaft. Kötet 25. füz. 6—12. 1895. — Kötet 26. füz. 1—10. 1896.
Buenos Aires. Anales del Museo público. T. 4. (= 2. Ser. T. 1). 1895.

— Anales de la Oficina meteorológica Argentina. T. 10. 1896.

— Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. T. 40—41. 1895/96. — T. 42 Entr. 1—5. 1896.
— Bulletin mensuel de statistique municipale de la ville de Buenos Aires. Année 10. No. 5. 9. 1896.
Bukarest. Academia Română: B. Petriceĭcu Hasden, Etymologicum Magnum Romaniae. Dictionarul libri istorica si poporane a Românilor lucrat dupĭ dorinta şi cu cheltuiéla M. S. Regelui Carol. I. Tomul 3. fasc. 3—4. 1896. — N. Manolesen, Igiena tĕranului Român. 1895. — Gh. Crainiceanu, Igiena tĕranului Român. 1895.
— Analele Academiei Romane. Partea administrativă şi desbaterile. Ser. 2 T. 17. (1895).
— Memoriile sectiunei scientifica. Ser. 2. T. 16. 1894/95 (1895).
— Memoriile sectunii istorice. T. 15. 16. 17. 1895/96.
— Lege, statute regulamente si decisiune. 1896.
Calcutta. Bibliotheca Indica: a Collection of Oriental Works publ. by the Asiatic Society of Bengal. N. S. 860—879. 1895 und 1896.
— Memoirs of the Geological Survey of India. Vol. 27. P. 1. 1896.
— Paläontologia Indica. Ser. 13. Vol. 2. P. 1. 1895. — Ser. 15. Vol. 2. P. 2. 1895.
— Records of the Geological Survey of India. Vol. 29. 1896.
— Catalogue of the Persian Bookes and Manuscripts in the Library of the Asiatic Society of Bengal. Compiled by Maulavi Mirza Ashraf Ali. Fasc. 3. 1895.
Cambridge. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 9. p. 1—3. 1896.
— Annual Report of the Library Syndicate. 42. for 1895 (1896).
— Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 16. P. 1. 1896.

Digitized by Google

Cambridge, Mass. Bulletin of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. 29. 1896. — Vol. 30. No. 1—2. 1896.
— Memoirs of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. 19. No. 1. 1896.
— Annual Report of the Curator of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College to the president and fellows of Harvard College for 1894—95. (1895.)
— Harvard Oriental Series. Vol. 3. 1896.

Capstadt. Report on the geodetic Survey of South Africa executed by in the years 1883—92, under the direction of David Gill. 1896.

Cassel. Abhandlungen und Bericht des Vereins für Naturkunde zu C. 41. 1895/96. (1896.)

Catania. Annuario scolastico. R. Università degli studi. 1895/96.

Charkow. Annales de l'Université Impér. de Ch. Записки Импераморскаго Университета. 1895. 4. — 1896. 1—3.

Charlottenburg. Die Thätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in der Zeit vom 1. April 1895 bis 1. Februar 1896. (S.-A.) Berlin 1896.

Chemnitz. Deutsches meteorologisches Jahrbuch. 1895. = Jahrbuch d. Sächsischen Meteorol. Instituts. Jahrg. 13. 1865.

Cherbourg. Mémoires de la Société nationale des sciences naturelles et mathématiques. T. 29. (= 3. Sér. T. 9) 1892—95. (1896.)

Chicago. Bulletin of the Chicago Academy of Sciences. Vol. 2. No. 2. 1895.
— Annual Report of the Chicago Academy of Sciences. 38. y. 1895. (1896.)
— The Open Court. Vol. 9. No. 50—52. — Vol. 10. No. 1—46. 1896.
— The Monist. A quarterly magazine. Vol. 6. No. 2—4. 1896. — Vol. 7. No. 1—2. 1896.

Christiania. Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. 1894. (1895.)
— Oversigt over Videnskabs-Selskabets Møder i 1894. (1895.)
— Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet. 1894. Math.-Naturw. Cl. No. 1—6. — Histor.-filos. Cl. No. 1—4.

Chur. Jahresbericht der Historisch-Antiquarischen Gesellschaft von Graubünden. 25. Jahrg. 1895.

— Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Bd. 39. 1895/96. (1896.)
— Beilage zu Bd. 39: Eblin, Waldreste des Averser Oberthales. Bern 1896.

Digitized by Google

Cordoba. Boletin de la Academia Nacional de Ciencias en Córdeba. T. 14. Entr. 3. 4. Buenos Aires. 1895—96.

Danzig. Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Bd. 9. H. 1. 1896.

Dorpat. Acta et commentationes imp. universit. Jurjevensis (olim Dorpat). 1896, 1—4.

Dortmund. Dortmunder Finanz- und Steuerwesen. Bearb. v. Karl Rübel. Bd. 1. 1892.

Dresden. Neues Archiv f. Sächsische Geschichte und Altertumskunde. Bd. 17. 1896.

— Jahresbericht des Königlich Sächs. Alterthums-Vereins über das 71. Vereinsjahr 1895/96. (1896.)

— Dresdener Geschichtsblätter. Hrsg. v. Verein für Geschichte Dresdens. Jahrg. 2. 1896. — Tit. u. Reg. zu Bd. 1. (= Jg. 1—4).

— Mittheilungen des Vereins für Geschichte Dresdens. H. 12—14. 1896.

— Jahresbericht des Vereins für Erdkunde. 25. 1896.

Dublin. Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. 3. Vol. 3. No. 4—5. 1895—96.

— List of the Members. 1895. 1896.

— Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 30. p. 15—20. 1895—1896.

— The Scientific Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 8. P. 3. 4. 1894—95.

— The Scientific Transactions of the R. Dublin Society. Ser. 2 Vol. 5. P. 5—12. 1895—96. — Vol. 6. P. 1. 1896.

Dürkheim a. d. Hart. Mitteilungen der Pollichia. No. 8—9 = Jahresbericht. No. 52—53. 1894—95.

Düsseldorf. Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Jahrbuch des Düsseldorfer Geschichts-Vereins. Bd. 10. 1895.

Edinburgh. Proceedings of the Edinburg Mathematical Society. Vol. 14. 1895—96.

— Proceedings of the R. Physical Society of Edinburgh. Vol. 13. 1895/96.

— Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 20. 1896.

— Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. 37. P. 3. 4. 1895. — Vol. 38. P. 1. 2. 1896.

Eichstädt. Sammelblatt des Historischen Vereins Eichstädt. Jahrg. 10. (1896.)

Eisenberg. Mitteilungen des Geschichts- und Altertumsforschenden Vereins zu Eisenberg. H. 11. 1896. — H. 12. 1897.

Digitized by Google

Elberfeld. Zeitschrift des Bergischen Geschichtsvereins. Bd. 31. N. F. 21. 1895.

Emden. Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft i. E. 80. 1894/95. (1896.)

Erfurt. Jahrbücher der Königl. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften zu E. N. F. Heft 22. 1896.

— Mittheilungen des Vereins für die Geschichte und Alterthumskunde von E. H. 17. 1895.

Erlangen. Sitzungsberichte der Physikalisch-Medicinischen Societät in E. Heft 27. München 1895.

Florenz. Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazione italiane ricevute per diritto di stampa. 1895. No. 240. — 1896. No. 241—263.

— Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori praticie di perfezionamento in Firenze.

Sez. di filosofia e di filologia: A. Faggi, La filosofia dell' inconsciente metafisica e morale. 1890.

— C. Martinati, Notizie storico-biografiche intorno al conte Baldassare Castiglione. 1890.

Sez. di medicina e chirurg.: A. Minuti, Sul lichen vosso. 1891.

— G. Pellizzan, Archivio dil anatomia normale e patologia. Vol. 5. fasc. 1. 2. 1889—90.

Sez. di scienze fisiche e natur: V. Marchi, Sull' origine e decorso dei peduncoli cerebellari. 1891.

— G. Ristori, Sopra i resti di un coccodrillo scoperti nelle lignite mioceniche di Montebamboli. 1890.

Frankfurt a. M. Archiv für Frankfurts Geschichte und Kunst. Hrsg. von dem Vereine für Geschichte und Alterthumskunde zu Frankfurt a. M. 3. Folge. Bd. 5. 1886.

— Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Fr. a. M. für 1894/95. (1896.)

Frauenfeld. Thurgauische Beiträge zur vaterländischen Geschichte. Hrsg. vom Histor. Vereine des Kantons Thurgau. H. 35. 1895.

Freiburg i. B. Freiburger Diöcesan-Archiv. Organ des kirchlich-historischen Vereins für Geschichte, Alterthumskunde und christliche Kunst der Erzdiöcese Freiburg. 25. Bd. 1896.

Genf. Documents par servir à l'histoire de l'Université de Genève. 4. 1896.

— Mémoires et documents publ. par la Société d'Histoire et d'Archèologie de Genève. Ser. 2. T. 4. 1896.

Digitized by Google

Genf. 35 Thesen der Universität Genf. 1896.

Giessen. Mitteilungen des Oberhessischen Geschichtsvereins. N. F. 6. Bd. 1896.

Glarus. Jahrbuch des Historischen Vereins des Kantons Glarus. Heft 32. 1897.

Görlitz. Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 72. H. 1. 1896.

— Festschrift zum 550. Gedenktage des Oberlausitzer Sechsstädtebündnisses 1896. Th. 1. 2. 1896.

's Gravenhage. Bijdragen tot de taal- land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië uitgeg. door het Koninkl. Instituut voor de Taal- Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. Volgreeks 6. Deel 2. 1896. — Deel 3. Afl. 1. 1896.

Graz. Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Hrsg. vom Historischen Vereine für Steiermark. Jahrg. 27. 1896.

— Mittheilungen des Naturwissenschaftlichen Vereines für Steiermark. Heft 32. Jahrg. 1895. (1896.)

Greifswald. Jahresbericht der Rüg.-Pom. Abth. d. Ges. f. Pommersche Geschichte. 55—58. 1893—1896. (1897.)

Guatemala. Memoria de estadistica de la Republica de Guatemala. 1893. (1895.)

Guben. Niederlausitzer Mittheilungen. Zeitschrift der Niederlausitzer Gesellschaft für Anthropologie und Alterthumskunde. Bd. 4. H. 1—6. 1895—96.

Haarlem. Archives du Musée Teyler. Ser. 2. Vol. 5. P. 1. 2. 1896.

— Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles publ. par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem. T. 30. Livr. 1—3. 1896.

Halifax. Proceedings and transactions of the Nova Scotian Institute of Natural Science. Vol. 8 = Ser. 2. 1893/94. Vol. 1 p. 4 (1895). — Vol. 9 = Ser. 2. 1894/95. Vol. 2 p. 1 (1896).

Halle. Leopoldina. Amtliches Organ der Kaiserl. Leopoldino-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Heft 31 No. 23—24. 1895. — Heft 32 No. 1—11. 1896.

— Verhandlungen der Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Nova acta acad. caesar. Leopold-Carol. German. naturae Curiosorum. Bd. 61—64. 1894—1895.

— Grulich, O., Katalog der Bibliothek der K. L.-C. Akad. Bd. 2. H. 2 (= Lief. 5). 1894. — Bd. 2. H. 3 (= Lief. 6). 1895.

Digitized by Google

Halle. Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Hrsg. v. d. Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Bd. 10. No. 3. 1896.
— Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Bd. 49. H. 4. Leipzig 1895. — Bd. 50. H. 1—3. Ebend. 1896.

— Zeitschrift für Naturwissenschaften. I. A. des Naturwissenschaftl. Vereines für Sachsen und Thüringen hrsg. von O. Lüdecke. 5. Folge. Bd. 6 (= 68) H. 3—6. Leipzig 1895—1896. — Bd. 7 (= 69) H. 1—2. Ebend. 1896.
Hamburg. Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd. 3. H. 6. 1896.

— Mittheilungen des Vereins für Hamburgische Geschichte. 17. Jahrg. 1895.
— Zeitschrift des Vereins für Hamburgische Geschichte. Bd. 10. H. 1. 1896.

— Verhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins in Hamburg. 3. Folge. Bd. 3. 1895. (1896.)
— Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften, hrsg. vom Naturwissenschaftlichen Verein in Hamburg. 14. Bd. 1896.

— Verhandlungen des Vereins für naturwissenschaftliche Unterhaltung zu H. Bd. 9. 1894—95. (1896.)
Heidelberg. Neue Heidelberger Jahrbücher hrsg. vom Historisch-Philosophischen Verein zu Heidelberg. Jahrg. 6. 1896.
Helsingfors. Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. 37. 1894/95. (1895.)
— Acta societatis pro fauna et flora Fennica. Vol. 5. P. 3. Vol. 9. 10. 12. 1893—95.
— Bulletin de la commission géologique de la Finlande. 1—5. 1895/96.
— Finlands geologiska Undersökning. Beskrifning till Kartbladen. No. 27. [Text u. Karten.] 1895/96.
— Herbarium musei Fennici. 2. ed. 2. Musci 1894. (1896.)
— Vetinskapliga Meddelanden af geografiska föreningen i Finland. 2. 1894—1895. — 3. 1896.
— Meddelanden af Societas pro fauna et flora Fennica. Häftet 19—21. 1893—95.
— Observations météorologiques publiées par la Société des Sciences de Finlande. T. suppl. 1881—1890. (1896.)
— Observations publiées par l'Institut Météorologique Central de la Société des Sciences de Finlande. Vol. 13 livr. 1. Obser-

Digitized by Google

vations en 1894 (1895). — Vol. 14 livr. 1. Observations en 1895 (1896).

Hermannstadt. Jahresbericht des Vereins für siebenbürgische Landeskunde für 1895/96. (1896.)

— Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. N. F. Bd. 27. H. 1. 1896.

Hohenleuben. Jahresbericht des Vogtländischen Altertumsforschenden Vereins zu Hohenleuben. 65—66. (und 18—19. Jahresbericht zu Schleiz). 1896.

Karlsruhe. 13 Schriften der Technischen Hochschule zu Karlsruhe. 1896.

— Veröffentlichungen der Großherzogl. Sternwarte zu Karlsruhe. Hrsg. von Dr. W. Valentiner. Heft 5. 1896.

Kasan. Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kasan. Ser. 2. T. 5. No. 3. 4. 1896.

Kempten. Allgäuer Geschichtsfreund. Zwanglose Mittheilungen, hrsg. vom Allgäuer Alterthums-Verein. Jahrg. 8. 1895.

Kiel. Zeitschrift der Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte. Bd. 25. 1895.

— Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen, hrsg. von der Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. N. F. 1. Bd. 2. Heft. Kiel und Leipzig 1896.

Klagenfurt. Carinthia I. Mittheilungen des Geschichtsvereins für Kärnten. 85. Jahrg. 1895. — 86. Jahrg. 1896.

— Jahresbericht des Geschichtsvereins für Kärnten f. 1894. (1895). f. 1895 (1896). — Festschrift zum hundertjährigen Geburtstage Gottliebs Freih. v. Ankershofen und zur fünfzigjährigen Jubelfeier des Geschichtsvereins 1896.

Klausenburg. Értesitö az Erdélyi Muzeum-egylet orvos-természettudományi szakosztályából. Évfolyam 20, I. füz. 3. 1896; II. füz. 3. 1896. Évfolyam 21, I. füz. 1. 1896; II. füz. 1. 1896; III. füz. 1. 1896.

Köln. Annalen d. histor. Vereins für den Niederrhein. Bd. 60. Abth. 1. 1895. — Bd. 61. 1895.

Königsberg i. Pr. Sitzungsberichte der Altertumsgesellschaft Prussia. Heft 20 für 1895/96. (1896.)

— Schriften der Physikalisch-Oekonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Jahrg. 36. 1895. (1896.)

Digitized by Google

Kopenhagen. Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder. i Aaret 1895 No. 3. 4. — 1896. No. 1—5.

— Det Kong. Danske Vidensk. Selskabs Skrifter. Naturvidensk. og math. Afdeling. 6. R. Bd. 8 H. 2. 1896.

— Regesta diplomatica historiae Daniae cura societatis regiae scientiarum Danicae [= Chronologisk Fortegnelse over hidtil toykte diplomer og andre brevskaber til oplysning af den danske Historie]. T. 1. II. 3 (1574—1607). 1895.

Krakau. Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. 1895 No. 9. — 1896 No. 1—8.

— Wydawnictwo Komisyi fizyograficznej Akadem. Umiejętn. Atlas geologiczny Galicyi. Zęćśćyt. 5. Tekst i Kart. 1895.

— Materyačy antropologiczno-archeologiczne-etnograficzne wydawane staraniem Komisyi antropologicznej Akademii umicjętnosci. T. 1. 1896.

— Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia. Pomniki dziejowe wieków średnich do objaśnienia rzeczy polskich stuzące. T. 15. 1896.

— Rocznik zarządu Akademii Umiejętności w Krakowie. Rok 1894/95 (1895).

— Rosprawy Akademic Umiejętności. Wydziat filol. Ser. 2. T. 7—9. 1894—95. 1894. — Wydziat histor.-filozof. Ser. 2. T. 7. 1895. — Wydziat mat.-przyrod. Ser. 2. T. 8. 9. 1896.

— Sprawozdania Komisyi do badania historyi sztuki w Polsce. T. 5. No. 4. 1896.

— Sprawozdania Komisyi Fiziograficznej obejmujące poglad na czynności dokonane w ciągu roku. T. 30. 1896.

— Biblioteka pisarzów polskich. T. 31. 1896.

— Balzer, Oswald, Genealogia Piastow. 1895.

— Finkel, L., Bibliografia historyi Polskiej. Wspótnic z Henrykiem Sawczyńskiem i czenkami Kótka histor. ucznego Universytetu twow. Część. 2. Zeszyt. 2. 1896.

Laibach. Izvestja muzejskega društva z Kranjsko. Letnik 5. Seš. 1—6. 1895.

— Mittheilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 8. 1895.

Landshut. Verhandlungen des Historischen Vereins für Niederbayern. Bd. 32. 1896.

Lawrence. The Kansas University Quarterly. Vol. 5. No. 1. 1896.

Leiden. Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. 1894/95 (1895). — 1895/96 (1896).

Digitized by Google

Leiden. Tijdschrift voor nederlandsche taal- en letterkunde uitg. vanwege de Maatschappij der Nederl. Letterkunde to Leiden. Deel 15. (= N. Recks 6.) 1896.

— Flora Batava. Afbeelding en beschrijving van Nederlandsche Gewassen. Aangevangen door Jan Kops voortgezet door E. W. van Eeden. Afl. 311—314. 1896.

— Verslag van den staat der sterrenwacht te Leiden, uitgebr. door H. G. van de Lande Bakhuyzen. 1894—1896. (1896).

Leipzig. Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. 30. Jahrg. H. 4. 1896. — Generalregister der Jahrg. 1—25 von A. v. Tillo. Suppl.-H. zu Jahrg. 29. 1895.

— Abhandlungen des Königl. Sächs. Meteorologischen Institutes. Heft 1. 1896.

— Abhandlungen der philolog.-histor. Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. 17. No. 1—5. 1896.

— Abhandlungen der mathemat.-phys. Classe. Bd. 23. No. 1—5. 1896.

— Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Philolog.-histor. Cl. Bd. 47. 1895. H. 3. 4. 1895. — Bd. 48. 1896. H. 1. 1896. — Mathemat.-phys. Cl. Bd. 47. 1895. — Bd. 48. H. 1—3. 1896.

— Zur 50. Jubelfeier der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. am 1. Juli 1896. Reden und Register.

— Preisschriften gekrönt und hrsg. v. d. Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. No. 30—33. 1895—96.

Leisnig. Mittheilungen des Geschichts- und Alterthums-Vereins zu Leisnig. H. 10. 1896.

Lincoln. University of Nebraska. Bulletin of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. No. 44—45. Art. 3. 4. 1896.

Lissabon. Real observatorio astronomico. Observations méridiennes de la planete Mars pendant l'opposition de 1892. 1895.

Liverpool. Proceedings of the literary and philosophical Society of Liverpool. 85. Session. 1895—96. No. 50. 1896.

London. Proceedings of the Royal Society of London. Vol. 59. 1896. — Vol. 60 No. 359—364. 1896.

— Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Vol. 186 for 1895. A. B. 1896. — Fellows of the R. S. 1895.

— Catalogue of scientific papers. Compiled by the Roy. Soc. of London. Vol. 11. 1896.

Digitized by Google

London. Journal of the Asiatic Society of Great Britain & Ireland. 1896. April (1896).

— Monthly Notices of the Roy. Astronomical Society, containing papers, abstracts of papers and reports of the proceedings of the Society. Vol. 56. No. 2—6, 8—10. 1896. — Vol. 57. No. 1. 1896.

— Memoirs of the Roy. Astronomical Society. Vol. 51. 1892—95. 1895.

— The Journal of the Linnean Society. Botany: Vol. 30. No. 211 1896. — Vol. 31. No. 212—217. 1896. — Zoology: Vol. 25. No. 161—162. 1896. — Ind. to Voll. 1—21. ib. 1896.

— Proceedings of the Linnean Soc. of London. Session from Nov. 1894 to June 1895. (1896.)

— List of the Linnean Soc. 1895/96. (1895.)

— Transactions of the Linnean Soc. of London. Botany: Vol. 5. P. 2. 1896. — Zoology: Vol. 6. P. 4. 5. 1896.

— Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 26. No. 528—534. 1895. — Vol. 27. No. 535—568. 1895—96.

— List of members of the L. M. S. 12th Nov. 1895. 32 Sess. 1895—96. (1895).

— Journal of the Roy. Microscopical Society for 1895, p. 6. — for 1896, p. 1—5.

— Proceedings of the Physical Society of London. Vol. 13. P. 13 (No. 63). 1896.

— Proceedings of the general meeting for scientific business of the Zoological Society of London. 1895. p. 3, 4. — 1896. p. 1—3.

— Transactions of the Zoolog. Soc. of London. Vol. 13. P. 11. 1895. — Vol. 14. P. 1. 2. 1896.

— List of the Vertebrated Animals . . . in the gardens of the Zoolog. Soc. 9. ed. 1896.

Lüttich. Annales de la Société Géologique de Belgique. T. 23. Livr. 1, 2. 1895/96.

Lund. Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Arsskrift. T. 31. Afd. 1. 2. 1895.

— Sveriges offentliga bibliotek. Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog. — Utgifven af Kongl. Biblioteket genom. E. W. Dahlgren. 10. Stockholm 1895.

Digitized by Google

Luxemburg. Publications de l'Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles et mathematiques. T. 24. 1896.

Luzern. Der Geschichtsfreund. Mittheilungen des Historischen Vereins der fünf Orte Luzern, Uri, Schwyz, Unterwalden und Zug. Bd. 51. Stans 1896.

Lyon. Mémoires de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon. Sciences et Lettres. 3. Ser. T. 3. 1895.

— Annales de la Société d'Agriculture, Histoire naturelle et Arts utiles de Lyon. Ser. 7. T. 2. 3. 1895—96.

— Annales de la Société Linnéenne de Lyon. N. S. T. 41—42. 1894—1895.

Madison. Wisc. Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. 9. P. 1. 2. 1896.

— Transactions of the Wisconsin Academy of Sciences. Vol. 10. 1894—95.

Madras. Madras Government Museum. Bulletin No. 4. 1896. — Public. 814/815. Aug. 1896.

Mailand. Memorie dell R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze mor. e. stor. Vol. 20. (Ser. 3, 11) fasc. 2. 3. 1896. — Classe die scienze matem. e. natur. Vol. 17. fasc. 5. 6. 1896. — Vol. 18. fasc. 1. 1896.

— R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Vol. 28. 1895.

Manchester. Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. Ser. 4. Vol. 10. 1895—96. — Vol. 11. P. 1. 1896—97.

— Complet List of the Members & Officers from 1781—1896. 1896.

Marseille. Annales de la Faculté des Sciences de Marseille publiées sous les auspices de la municipalité. T. 4. fasc. 4. 1896. — T. 5. 1896. — T. 6. fasc. 1—3. 1896. — T. 7. 1896.

— Annales de l'Institut botanico-géologique colonial de Marseille publ. sous la direction de Prof. Ed. Heckel. 1. Sér. 3. Année. Vol. 2. Lille 1895.

Meiningen. Schriften des Vereins für Meiningische Geschichte und Landeskunde. Heft 20—22. 1896.

Meissen. Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Meißen. Bd. 4. Heft 2. 1896.

Digitized by Google

Melbourne. Illustrated official Handbook to the Aquarium Museum & Picture Salon. Compiled by James E. Sherrard. Melbourne (1896).

Meriden. Proceedings and transactions of the Scientific Association Meriden. Vol. 7. 1894—95.

Metz. Jahr-Buch der Gesellschaft für lothringische Geschichte und Altertumskunde. Jahrg. 7. 1895.

Mexico. Anuario de la Academia Mexicana de ciencias exactas fisicas y naturales. Anno 1. 1895. (1896.)

— Anuario estadístico de la Republica Mexicana. Anno 2. 1894. No. 2. 1895.

— Boletín Mensual del Observatorio Meteorologico Central de Mexico. Juli—Aug. 1896. — Oct. 1896.

Milwaukee. Annual Report of the Board of Trustees of the public museum of the city of Milwaukee. 13. 1894—95.

Minneapolis, Minnes. Geological and Natural History Survey of Minnesota. Annual Report 21. 1893 (1894). — 22. 1894 (1895).

Mölln i. Lbg. Vaterländisches Archiv für das Herzogthum Lauenburg. N. F. Bd. 8 (= Archiv des Vereins f. d. Geschichte des Herzogthums Lauenburg. Bd. 5). Heft 1. 1896.

Moskau. Математическу Сборнік. Recueil mathématique publié par la Société Mathématique de Moscou. T. 18. No. 4. 1896. — T. 19. No. 1. 1896.

— Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou. Nouv. Sér. Année 9. 1895. No. 3. 4. — Année 10. 1896. No. 1. 2.

München. Abhandlungen der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Histor. Classe Bd. 21. Abth. 2. 1896. — Mathem.-physikal. Classe Bd. 19. Abth. 1. 1896. — Philos.-philolog. Classe Bd. 20. Abth. 2. 1895.

— Sitzungsberichte der K. B. Akad. der Wissensch. zu München. Philos.-philol. und histor. Classe 1895—1896. Heft 1. 2. — Math.-physik. Classe 1895. Heft 3. — 1896. Heft 1. 2.

— Bechmann, A. v., Der churbayerische Kanzler Alois Freiherr von Kreiltmayr. Festrede geh. in der k. b. Akad. d. Wiss. zu München zur Feier ihres 137. Stiftungstages am 14. März 1896. München 1896.

— Oberbayerisches Archiv für vaterländische Geschichte. Hrsg. v. d. Historischen Verein für Oberbayern. München. Bd. 49. 1895/96.

— 56/57. Jahresbericht für 1893 und 1894. (1895.)

Digitized by Google

München. Monatsschrift des Historischen Vereins von Oberbayern. Jahrg. 4. No. 11–12. 1896. — Jahrg. 5. No. 1—12. 1896.

Neapel. Rendiconto dell' Accademia delle science fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Ser. 3. Vol. 1. fasc. 12. 1896. — Vol. 2. fasc. 1—11. 1896.

— Rendiconto delle tornate e dei lavori dell' Accademia di scienze morali e politiche. Anno 34. 1895.

Neuburg a. D. Neuburger Kollektaneen-Blatt für die Geschichte Bayerns, insbesondere des ehemaligen Herzogtums Neuburg, hrsg. von dem Historischen Verein Neuburg a. D. 59. Jahrg. 1895.

New Haven, Connect. Journal of the American Oriental Society. New Haven. Vol. 17. 1896.

— Report for the year 1895/96 presented by the Board of Managers of the Observatory of Yale University to the president and fellows. 1896.

— Transactions of the astronomical observatory of Yale University. Vol. 1. P. 5. 1896.

New York. Journal of the American Geographical Society of New York. Vol. 27. No. 4. 1896. — Vol. 28. No. 1—3. 1896.

— Bulletin of the American Mathematical Society. Ser. 2. Vol. 1. No. 10. 1896. — Vol. 2. 1895—96. — Vol. 3. No. 1—3. 1896.

— Papers published by the American Mathematical Society. Vol. 1. 1896.

Nürnberg. Abhandlungen der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 10. Heft 4. 1896.

— Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg für 1895.

— Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1895.

— Katalog der im Germanischen Museum vorhandenen zum Abdrucke bestimmten geschnittenen Holzstöcke vom XV.—XVIII. Jahrhundert. Atlas zum 2. Th. 17. und 18. Jahrh. 1896.

— Mittheilungen aus dem Germanischen Nationalmuseum. Jahrg. 1895.

Odessa. Записки математическаго отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей (— Memoires de la section mathématique de la Société des naturalistes de la Nouvelle — Russie). T. 17. 1895.

Osnabrück. Mittheilungen des Vereins für Geschichte und Landeskunde von Osnabrück. Bd. 20. 1895.

Digitized by Google

Ottawa, Can. Geological Survey of Canada. Annual Report. New series. Vol. 7 & Maps. 1894. (1896.)

— Contributions to Canadian palaeontology. Vol. 3 p. 1. 1895.

Padua. Onoranze a Galileo Galilei nel terzo centenario dalla sua prelezione nell' Universita di Padova. Dicembre 1892. Narrazione e Documenti. Padova 1896.

Palermo. Annuario del circolo matematico. Anno 13. 1896.

— Rendiconti del Circolo Matematico. T. 10. 1896.

Paris. Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures publ. sous l'autorité du Comité intern. par le directeur du Bureau. T. 11. 1895.

— Comité international des Poids et Mesures. Procèsverbaux des séances. 1894 (1895).

— Journal de l'École polytechnique publ. par le Conseil d'Instruction de cet établissement. 2. Ser. Cah. 1. 1895.

— Ministère de l'Instruction publique. Annales du Musée Guimet (Ser. in 4°). T. 27. Fasc. 1. 1896. — (Ser. in 8°) Bibliothèque d'Etudes. T. 5. 1895.

— Annales du Musée Guimet. Revue de l'histoire des religions publ. sous la direction de J. Réville. Année 16. 1895. T. 32. No. 2. 3.

— Annuaire de l'observatoire municipal de Montsouris. Année 1896. Paris 1896.

— Bulletin de la Société Mathématique de France. T. 23. No. 9—10. 1895. — T. 24. No. 1—7. 1896.

Pavia. Annuario della R. Università di Pavia. Anno scol. 1895/96. T. 23. No. 9—10. 1895. — T. 24. No. 1—7. 1896.

Philadelphia. Annals of the American Academy of Political and Social Science. Vol. 7. No. 1—3. 1896. — Vol. 8. No. 1—3. 1896. — Suppl. Vol. 7. No. 1—3. 1896.

— Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. 1895. p. 2. 3. — 1896. p. 1.

— Proceedings of the American Pharmaceutical Association. Vol. 43. 1895.

— Alumni Report. Publ. by the Alumni Association of the Philadelphia College of Pharmacy. Vol. 32. No. 4—9. 1896. — Vol. 33. No. 1—3. 1896.

Digitized by Google

Philadelphia. Proceedings of the American Philosophical Society held ad Philadelphia for promoting useful knowledge. Vol. 34. No. 148—149. 1896. — Vol. 35. No. 150. 1896.

— Transactions of the Amer. Philos. Soc. held at Philadelphia. New Ser. Vol. 18. P. 3. 1896.

— Catalogue of the University of Pennsylvania. 1895/96. (1895.)

— Publications of the University of Pennsylvania. Series in Philology, Literature and Archaeology. Vol. 4. 1895. — Vol. 5. 1896.

— Translations and Reprints from the original sources of European History. Publ. by the Department of History of the University of Pennsylvania. Vol. 2. No. 2—7. 1896. — Vol. 3. No. 1—2. 1896.

— University of Pennsylvania. 192 kleine Schriften medic. u. naturwiss. Inhalts. S.-A. aus Zeitschriften.

Pisa. Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Filosofia e filologia. Vol. 11. (18). 1896.

— Annuario della R. Universitá di Pisa. Per l'anno academ. 1895/96 (1896).

— Atti della Societa Toscana di science naturali residente in Pisa. Memorie. Vol. 14. 1895. Processi verbali. Vol. 9. S. 243—310. Vol. 10. S. 1—167. 1895—97.

Plauen. Mittheilungen des Alterthumsvereins zu Plauen i. V. 11. 1894/95 (1895). — 12. 1895/96 (1896).

Portland. Proceedings of the Portland Society of Natural History. Vol. 2. P. 3. 1895.

Posen. Roczniki towarzystwa przyjaciół nauk Poznańskiego. T. 22. 1896.

— Sonder-Veröffentlichungen der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. I. Stadtbuch von Posen. Bd. 1. hrsg. v. A. Warschauer. 1, 1. 2. 1892. — II. Knoop, Sagen und Erzählungen aus der Provinz Posen. 1893. — III. Das Jahr 1793. Urkunden und Aktenstücke zur Geschichte der Organisation Südpreußens. Hrsg. unter d. Red. v. Rodger Prümers. 1895.

— Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 10. 1895. — Jahrg. 11. H. 1. 2. 1896.

Potsdam. Jahresbericht des Direktors des Königl. Geodätischen Instituts. 1895/95. Berlin 1896.

— Veröffentlichung des Kgl. Preuß. Geodät. Instituts und Centralbureaus der Internat. Erdmessung. Bestimmung der Polhöhe

Digitized by Google

und der Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen von der Ostsee bei Kolberg bis zur Schneekoppe. Berlin 1896.

Potsdam. Verhandlungen der vom 25. Sept. bis 12. Okt. 1895 in Berlin abgehaltenen 11. allgemeinen Conferenz der Internationalen Erdmessung. Th. 1. 2. Berlin 1896.

Prag. Jahresbericht der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften für 1895 (1896).

— Sitzungsberichte der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Cl. f. Philosophie, Geschichte und Philologie. Jahrg. 1895 (1896). — Math.-naturw. Cl. Jahrg. 1895 (1896).

— Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Hrsg. v. d. Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft in Böhmen. Bd. 1. Heft 1. 2. 1896.

— Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Hrsg. im Auftrage der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wiss., Kunst und Litteratur in Böhmen. Bd. 4. Prag, Wien, Leipzig 1896. — Bd. 5. 1896.

— Erläuterungen zur geologischen Karte des Böhmischen Mittelgebirges. Bearb. mit Unterstützung d. Gesellschaft zur Förderung deutscher Wiss., Kunst und Litteratur in Böhmen. Blatt 1. (Teschen) v. J. E. Hibsch. Wien 1896.

— Forschungen zur Kunstgeschichte Böhmens. Veröffentlicht v. d. Gesellschaft zur Förderung deutscher Wiss., Kunst und Litteratur in Böhmen. 1896. 1. 2. 1896.

— Mittheilung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wiss., Kunst und Litteratur in Böhmen. No. 5. 6. 1896.

— Rechenschafts-Bericht, erstattet vom Vorstande der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wiss., Kunst und Litteratur in Böhmen in der Vollversammlung am 14. Dec. 1895.

— Richard Batka, Altnordische Stoffe und Studien in Deutschland. 1. Abschnitt: von Gottfried Schütze bis Klopstock. Mit Unterstützung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft in Böhmen. Bayreuth 1896.

— W. J. Gerber, Die hebräischen Verba denominativa. Leipzig 1896.

— Wettstein, R. v., Monographie der Gattung Ephrasia. Leipzig 1896.

— Abhandlungen des deutschen naturwiss.-medic. Vereins für Böhmen „Lotos“. Bd. 1. H. 1. 1896.

— Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag i. J. 1895 (1896).

Digitized by Google

Prag. Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der K. K. Sternwarte zu Prag. 56. Jahrg. 1896.

— Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. 34. Jahrg. 1896.

Regensburg. Verhandlungen des Historischen Vereins von Oberpfalz und Regensburg. Bd. 48 (N. F. 40). 1896.

Rom. Atti della R. Accademia dei Lincei. Rendiconto dell' adunanza del 7 Giugno 1896.

— Atti della R. Accademia dei Lincei. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. A. 292. 1895. Ser. 5. Vol. 4. Sem. 2. fasc. 12. — A. 293. 1896. Vol. 5. Sem. 1. (1896). Sem. 2. fasc. 1—10. (1896.)

— Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. 5. Vol. 4. fasc. 11—12. 1896. — Vol. 5. fasc. 1—10. 1896.

— Atti della R. Accademia dei Lincei. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Parte 2. Notizie degli scavi. A. 292. 1895. Vol. 3. Ott.-Dec. (1896.) — A. 293. 1896. Vol. 4. Gennajo-Oct. (1896).

— Ministero di agricoltura, industria e commercie (Direzione generale della Statistica). Statistica delle Biblioteche. P. 2. 1896.

— Catalogo del museo Kirchnoriano pubbl. per cura del dir. Prof. Ettore de Ruggiers. P. 1. 1878. 1896.

— Le Gallerie nazionali Italiane. Notizie e documenti. Per cura del Ministero della publica istruzione. A. 1894. (1896.)

Rostock. Beiträge zur Geschichte der Stadt Rostock. Hrsg. i. A. des Vereins für Rostocks Alterthümer von K. Koppmann. Bd. 2. H. 1. 1896.

Sacramento. Contributions from the Lick Observatory. No. 4—5. 1896.

San Francisco. Proceedings of the California Academy of Sciences. Ser. 2. Vol. 5. p. 1. 2. 1895—96.

— Transactions and Proceedings of the Geographical Society of the Pacific. Report of the special commitee, appointed by the conneil to report upon the „Jeanelte" relics May 1896.

Santiago (Chile). Verhandlungen des Deutschen Wissenschaftlichen Vereins zu Santiago. Bd. 3. Heft 3—4. 1896.

— Actes de la Société Scientifique du Chili. T. 5. Livr. 1—4. 1895. — T. 6. Livr. 1. 1896.

Digitized by Google

Santiago (Chile). Congreso scientifico general Chileno. 1894. (1895.)

St. Louis, Missouri. Botanical Garden. 7. annual Report. 1896.

St. Pétersbourg. Ежегодникъ зоологическаго музея Императорской академіи наукъ = Annuaire du musée zoologique 1896. No. 1. 2. 3. 1896.

— Mémoires de l'Académie Impér. des Sciences de St. Pétersbourg. Cl. phys.-mathém. Ser. 8. Vol. 1. No. 9. 1896. — Vol. 2—4. 1896. — Cl. histor.-philol. Vol. 1. No. 1, 2. 1896.

— Сборникъ отдѣленія русскаго языка и словесности Императорской академіи наукъ. T. 60. 1896.

— *Βυζαντινὰ χρονικά.* Бузантійскій Временникъ, издаваемый при Императорской Академіи подъ редакціею Б. И. Васильевскаго и Б. І. Регела. T. 1. No. 1—4. 1895. — T. 3. No. 1. 1896.

— Извѣстія Императорскаго географическаго Общества. T. 31. Сът. 5. 1896. — T. 32. Сът. 1—3. 1896.

— Отчетъ Императорскго Русскаго географическаго Общесьаза 1895. Годъ (1896).

Schaffhausen. Neujahrsblatt des Kunstvereins und des Historisch-Antiquarischen Vereines zu Schaffhausen für 1897 (1896).

— Rob. Lang, Das Collegium humanitatis in Schaffhausen. Th. 2. 1896.

Siena. Bullettino Senese di Storia patria. Anno 2. fasc. 3. 4. 1896. — Anno 3. fasc. 1—3. 1896.

Speier. Mitteilungen des Historischen Vereins der Pfalz. 20. 1896.

Stavanger. Stavanger Museums Aarsberetning for 1894 (1895). — 1895 (1896).

Stockholm. Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens handlingar. Bd. 27. 1895—96.

— Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens förhandlingar. Arg. 52. 1895 (1896).

— Meteorologiska Jakttagelser i Sverige utg. af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien anstälda . . . Bd. 33 (= 2. Ser. Bd. 19). 1891 (1896).

— Sveriges Geologiska Undersökning. Ser. Aa. No. 110—113. — Ser. B.b. No. 8. — Ser. C.a. No. 135—159.

Strassburg. Annalen d. Kaiserl. Universitäts-Sternwarte. Bd. 1. 1896.

— Jahrbuch für Geschichte, Sprache und Litteratur Elsaß-Lothringens, hrsg. von dem Historisch-litterarischen Zweigverein des Vogesen-Clubs. Jahrg. 12. 1896.

Digitized by Google

Stuttgart. Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte, hrsg. von der Württemberg. Kommission für Landesgeschichte. 4. Jahrg. 1895.

Sydney. Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 29. 1895.

— The Agricultural Gazette of New South Wales p. by the Department of agriculture. Vol. 7. P. 6. 1896.

— Annual Report of the Department of Mines and Agriculture, New South Wales for the year 1895. (1896.)

— Records of the Geological Survey of New South Wales. Vol. 5. p. 1. 1896.

— Report of the Meeting of the Australasian Association for the Advancement of Science. 6. Brisbane 1895.

Thorn. Jahresbericht des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst. 36—41 f. 1889/90—1894/95 (1895). — 42 f. 1895/96 (1896).

— Mittheilungen des Coppernicus-Vereins . . . Heft 10. 1895. — Heft 11. 1896.

Tiflis. Наблюденія Тифлисской Обсерваторіи за 1894 годъ издаваемыя И. Мильбергомъ (1896).

Tokio. Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. 3. Suppl. zu Bd. 6. — Heft 57. (= 6. Bd. S. 319—364). Berlin, Yokohama 1896.

— The Journal of the College of Science, Imperial University, Japan. Vol. 8. 1894—95. — Vol. 9. P. 1. 1895. — Vol. 10. P. 1. 1896.

— Mittheilungen aus der Medicinischen Fakultät der Kais. Japanischen Universität. Bd. 3. No. 2. 1896.

— Tokyō Sūgaku-Butrurigaku Kwai Krji. Maki No. 7. Dai. 1. 2. 4. 6. 1896.

Torgau. Veröffentlichung des Alterthums-Vereins zu Torgau. 9—10. 1895—96.

Toronto. Transactions of the Canadian Institute. Vol. 4. P. 2. 1895. — Vol. 5. P. 1. 1896.

Tufts College Mass. Studies. No. 4. 1895.

Turin. Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 31. 1895/96.

— Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. T. 45—46. 1896.

Digitized by Google

Turin. Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1895 all' Osservatorio della R. Università di Torino. 1896.

Upsala. Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala. Vol. 2. 1895. P. 2. No. 4. (1896.)

— Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique d'Université d'Upsal. Vol. 27. 1895. (1895—96.)

Washington. Annual Report of the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution. 13. 1891—92. (1896.)

— Bulletin of the United States National Museum. No. 48. 1895. (1896.)

— Proceedings of the United States National Museum. Publ. under the direction of the Smithsonian Institution. Vol. 17. 1894. (1896.)

— Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution showing the operations . . . of the Institution for the year ending June 30, 1893.

— Memoirs of the National Academy of Science. Vol. 7. 1895.

— Report of the Superintendent of the United States Coast and Geodetic Survey showing the progress. y. 1893. P. 1. 2. (1894/5). — y. 1894. P. 1. 2. 1895.

— United States Geological Survey. Geological Atlas of the United States. Fol. 13—25. 1896.

— Bulletin of the U. S. Geological Survey. No. 123—126. 128. 129. 131—134. 1895—96.

— Annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior. 15. 1893—94. — 16. 1894—95. P. 2. 3. 4. (1895.)

Wien. Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Cl. Bd. 62. 1896.

— Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. der Wissenschaften. Philos.-hist. Cl. Bd. 131. 1894. — Bd. 132. 1895. — Bd. 133. 1896. — Mathemat.-naturw. Cl. Bd. 104. Abth. 1. 2a. 2b. 3. 1895.

— Archiv für österreichische Geschichte. Hrsg. v. der zur Pflege vaterländischer Geschichte aufgestellten Commission d. K. Akad. d. W. Bd. 82. 1895. — Bd. 83. 1. Hälfte. 1896.

— Venetianische Depeschen vom Kaiserhofe (Dispaeci di Germania). Hrsg. v. d. Histor. Commission d. Kais. Akad. d. Wiss. Bd. 3. 1895.

— Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschichtsquellen. Hrsg. v. d. Histor. Commission d. K. Ak. d. W. Abth. II. Diplomata et Acta. 48. Bd. 1. Hälfte. 1896.

Digitized by Google

Wien. Jahrbücher der k. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Bd. 30. 1893.

— Meteorologische Zeitschrift. Hrsg. von der Oesterreich. Gesellschaft f. Meteorologie u. der Deutsch. Meteorolog. Gesellsch. Jahrg. 12. H. 12. 1895. — Jahrg. 13. 1896.

— Astronomische Arbeiten des k. K. Gradmessungs-Bureau. Bd. 7. Längenbestimmungen. 1895.

— Verhandlungen der Oesterreichischen Gradmessungs-Commission. Protokolle über die Sitzungen am 19. Juni 1896.

— Verhandlungen d. k. K. Zoologisch-Botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 45. Heft 10. 1895. — Bd. 46. No. 1—8. 1896.

— Abhandlungen der k. K. Geologischen Reichsanstalt. Bd. 18. Heft 1. 1895.

— Jahrbuch der k. K. Geologischen Reichsanstalt. Bd. 45. Jahrg. 1895. H. 2—4. — Bd. 46. 1896. H. 1.

— Verhandlungen der k. K. Geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1895. No. 14—18. — Jahrg. 1896. No. 1—15.

— Publicationen der v. Kuffner'schen Sternwarte in Wien (Ottakring). Hrsg. v. Dr. Norbert Herz. Bd. 4. 1896.

— Blätter des Vereins für Landeskunde von Niederösterreich. Jahrg. 29. 1895. (1895/96.)

— Topographie von Niederösterreich, hrsg. v. Verein f. Landeskunde von Niederösterreich. Bd. 4. Bogen 25—48. 1895.

— Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen der Landesstationen in Bosnien-Hercegovina. Hrsg. v. d. Bosnisch-Hercegovinischen Landesregierung. 1894 (1895).

Wiesbaden. Annalen des Vereins für Nassauische Altertumskunde und Geschichtsforschung. Bd. 28. 1896.

— Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. 49. 1896.

Worms. Vereinsgaben des Alterthumsvereins zu Worms 1895: Catechismus und anweisung zu christlichem glauben. 1543. — A. Weckerling: Leonhart Brunner, der erste vom Rate der Reichsstadt Worms angestellte evangelische Prediger (1527—1548).

Würzburg. Sitzungsberichte der Physikalisch-Medicinischen Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1895. No. 3—9.

Digitized by Google

Würzburg. Verhandlungen der Physik.-Medic. Gesellschaft zu Würzburg. Bd. 29. No. 6—7. 1895. — Bd. 30. No. 1—5. 1896.

— Archiv des Historischen Vereins von Unterfranken und Aschaffenburg. Bd. 37. 1895. — Bd. 38. 1896.

— Jahresbericht des Histor. Vereins von Unterfranken und Aschaffenburg für 1894 (1895). — für 1895 (1896).

Xalapa. Boletin mensual meteorológico y agrícola del observatorio central del estado de Veracruz Llave (Republica Mexicana) Avril 1896. 1896.

Zürich. Mittheilungen der Antiquarischen Gesellschaft in Zürich. Bd. 24. Heft 2. Leipzig 1896.

— Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 40. 1895. H. 3. 4. — Jahrg. 41. 1896. H. 1. 2.

— Jahresbericht der Physikalischen Gesellschaft in Zürich. 8. 1896.

— Astronomische Mittheilungen. Von Dr. Rudolf Wolf. [S.-A.] 87. 1896.

B. Anderweitig eingegangene Schriften.

Acta mathematica. Journal rédigé par G. Mittag-Leffler. Bd. 20. Heft 1—2. ib. 1896.

Acte şi documente relative la Istoria renascerei Romanici publ. de Ghenadie Petrescu, Dim. A. Sturdza si Dim. C. Sturdza Bucureni. Vol. 1. 1883. — Vol. 2—5 ib. 1883—1890. — Vol. 6. P. 1. ib. 1896. — Vol. 7 ib. 1892.

Antiquités Lacustres. Album publié par la Société d'histoire de la Suisse romande et la société académique randoise, précédé d'une notice par B. von Muyden et A. Colomb. Lausanne 1896.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Amsterdam. 2. R. Deel 3. St. 1. 1896.

Aron, Joseph, Canada Transvaal. Dédié aux diplomates français qui ont du bon sens. Paris 1896.

Beilstein, F., Handbuch der organischen Chemie. 3. Aufl. Bd. 2. Lief. 33—35 (= Lief. 58—60). — Bd. 3. Lief. 1—11 (= Lief. 61—71). Hamburg und Leipzig 1896.

Boussinesq, M. J., Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les libs rectilignes à grande section, Paris 1897.

Digitized by Google

Brandstetter, Renward, Malaio-Polynesische Forschungen. 5. Die Gründung von Wadjo (Paapan Rikadong). Eine historische Sage aus Südwest-Zelebes ins Deutsche übertragen. Luzern 1896.

Brinton, Daniel G., Report upon the collections exhibited at the Columbian Historical Exposition. Washington 1895.

Bulletin bibliographique international et courrier litteraire. Année 1. No. 4—12. Paris 1896.

— de la libraire Française. Année 10. No. 3. Paris 1896.

Bulletin des publications nouvelles de la librairie Gauthiers-Villars et fils. Anno 1896. T. 1.

Carus, Paul, Das Evangelium Buddhas. Nach alten Quellen erzählt. Unter Mitwirkung des Verf. aus dem Engl. übers. v. E. F. L. Gauß. Chicago 1895.

Cauchy, Augustin, Oeuvres complètes. Ser. 2. T. 10. Paris 1896.

Cavallari, F. S., Topògrafia archeologica di Siracusa. Palermo 1883. Atlas ib. 1883.

Cayley, Arthur, Collected mathematical papers. Vol. 9—11. Cambridge 1896.

Chroust, Anton, Abraham von Dohna. München 1896.

Daday, E. v., Cyridicola parasitica nov. gen. nov. sp. Ein neues Räderthier. (S.-A.) Budapest 1893.

Darboux, Gaston, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. T. 4. fasc. 2. Paris 1896.

Draghicénu, Math. M., Les tremblements de terre de la Roumanie et des pays environnants. Bucuresci 1896.

Filarszky, N., A Charafélék (Characeae L. d. Richard) különös tekinteltel a magyarországi fajorka. Budapest 1893.

Fischer, Ernst, Ueber die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz. (Nicolaigymn. zu Leipzig. 1896.)

Galilei, Galileo, Opere. Ediz. nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Vol. 5. Firenze 1895.

Galle, Einige Zusätze, Nachträge zu seiner Klimatologie. (S.-A.) Breslau 1895.

Graf, J. H., Ludwig Schläfli (1814—1895). Bonn 1896.

Guidi, Ign., Vita za-Mîkâêl' Aragâwî. Romae 1896.

Goldziher, Ign. & C. Graf v. Landberg-Hallberger, Die Legende vom Mönch Barşîsâ. Kirchhain N. L. 1896.

Heinrichs, A. & E. Biese, Météorologie et magnetisme terrestre. S.-A. aus: Fennia 13. Société de géographie de Finlande. (Helsingfors 1895.)

Hegyfoky, Jacob, A. Szél Iránga a magyar. szent corona orszá-

Digitized by Google

gaiban a barométer állas es az csö izimü függelékkel. Budapest 1894.

Heller, August, Katalog der Elischer'schen Göthe-Sammlung. Budapest 1896.

Hertzsch, Robert Hugo, *Εὕρηκα* oder endlich ein mathematischer Beweis für das Dasein eines persönlichen Gottes. Halle a. S. 1896.

Jahn, G., Zum Verständniß des Sibawaihi. Erwiderung. — 2. Abwehr. Göttingen 1896.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. Emil Lampe. Jahrg. 1825. 1893/94. H. 1. 2. 1896.

Inscriptiones christianae urbis Romae septimo saeculo antiquiores. Ed. Jo. Bapt. de Rossi. Vol. 1. 1861. — Vol. 2. P. 1. 1888.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publ. pelo F. Gomes Teixeira. Vol. 12. No. 4—6. Coimbra 1895—96.

Journal of Physical Chemistry. Vol. 1. No. 1. Ithaca, London, Leipzig 1896.

Buffalo Medical and **Surgical Journal.** Vol. 35. No. 10. 1896.

Journal of comparative neurology . . . ed. by C. L. Herrich. Vol. 5. Dec. 1895.

American Journal of Philology. Vol. 17. No. 1 (= 65). 1896.

Kerntler, Franz, Die elektrodynamischen Grundgesetze und das eigentliche Elementargesetz. Budapest 1897.

Kölliker, A. von, Handbuch der Gewebelehre des Menschen. 6. Aufl. Bd. 1. 2. 1896.

— Ueber den Fornix longus sive superior des Menschen. (S.-A.) Zürich 1896.

Körting, Gustav, Geschichte des Theaters in seinen Beziehungen zur Entwickelung der dramatischen Dichtkunst. 1. Geschichte des griechischen und römischen Theaters. Paderborn 1897.

Kont, J., La Hongrie littéraire et scientifique. Paris 1896.

Kosmopolan. A bimensal gazette for furthering the spread of volapük and for world-wide-advertisement. 1896. No. 27—31 Sidney.

Lampe, E., Rede bei der Feier des 25jährigen Gedenktages der Proclamirung des deutschen Reiches am 18. Januar 1896. Berlin 1896.

Lang, Robert, Die Thätigkeit der Schaffhauser Scholarchen im 16. und 17. Jahrhundert. (S.-A.) Zürich 1896.

Lepsius, Richard, Der Rheinstrom und seine Ueberschwemmungen. (Rede.) Darmstadt 1895.

Liedertafel von Melbourne. 245. Concert. Melbourne 1896.

Digitized by Google

Lippert, Julius, Socialgeschichte Böhmens in vorhussitischer Zeit. Bd. 1. Prag, Wien, Leipzig 1896.

Love, Norges gamli. Bd. 5. H. 2. Udgivet ved Gust. Storm og Ebbe Hertzberg. Christiania 1895.

Madarász, J. v., Erläuterungen zu der aus Anlaß des 2. internationalen Ornithologen-Congresses zu Budapest veranstalteten Ausstellung der ungarischen Vogelfauna. Budapest o. J.

Magazine, International Medical. Vol. 5. No. 1. Philadelphia 1896.

Messner, Paul, Joseph Messner. Ein Lebensbild. Lobzow bei Krakau (1895).

Müller, F. v., Select extra-tropical plants readily eligible for industrial Culture or naturalisation. 9. ed. Melbourne 1895.

Mueller, F. v. & Ralph Tate, Phanerogams and vasculars cryptogams. (S.-A.) Adelaide 1896.

Müller-Breslau, Heinrich, Vom Kriege hinter der Front. (Festvortrag.) Berlin 1896.

Nature. A weekly illustrated journal of science. Vol. 53. No. 1366—1383. London & New York 1895/96. — Vol. 54. No. 1384—1407. 1895/96. — Vol. 55. No. 1408—1415. 1896.

Pirckheimer, Wilibald, Schweizerkrieg, hrsg. v. Karl Rück. München 1895.

Repertoire bibliographique des sciences mathematiques. Ser. 2. Fiches 101—200. 201—300. 301—400. Paris 1896.

Riem, Joh., Ueber eine frühere Erscheinung des Kometen 1881 III. Tebbut. Göttingen 1896.

Rosenbusch, H., Mikroskopische Physiographie der Mineralien und Gesteine. 2. Bd. Mikroskop. Physiographie der massigen Gesteine. 3. Aufl. 2. Hälfte. Stuttgart 1896.

Rothfels, Jeremias. S.-A. aus A. Brülls populär-wissenschaftl. Monatsblättern. Frankfurt a. M. 1896.

Saint-Lager, Les nouvelles flores de France. Paris 1894. (S.-A.) Les gentianella du groupe grandeflóra. (S.-A.) Paris 1896. La vigne du Mont Ida et le vacinium. (S.-A.) Paris 1896.

Salmon, Phil., Ethnologie préhistorique. Dénombrement et types des cranes néolithiques de la Gaula. (S.-A.) Paris 1895.

Sars, G. O., An account of the crustacea of Norway. Vol. 2. Isopoda. P. 1. 2. Apseudidae, Tanaidae. Bergen 1896.

Schueren, G. v. d., Teuthonista of Duytschlender. Uitg. door J. Verdam. Leiden 1896.

Schwickert, Joh. Jos., Kritisch-exegetische Untersuchungen zu Pindars zweitem olympischen Siegesgesange. Trier 1891.

Digitized by Google

Schwickert, Joh. Jos., Ein Triptychon klassischer kritisch-exegetischer Philologie. Leipzig und Würzburg 1896.

Steenstrup, J., Yak Lungta-Bracteaterne, Archaeologernes „nordiske Gruppe af Guldbracteater" fra den aeldre Jernalder. (S.-A.) Kjøbenhavn 1893.

— Det store Solvfund ved Gundestrup i Jylland 1891. Kjøbenhavn 1895.

Studien, Prager, aus dem Gebiet der classischen Alterthumswissenschaft. Heft 5. Prag 1895.

Tannert, A. C., Der Sonnenstoff als Zukunftslicht und Kraftquelle. Neiße 1896.

Vogel, H. C., Ueber das Spectrum von Mira Ceti. (S.-A.) Berlin 1896.

— Die Lichtabsorption als maaßgebender Factor bei der Wahl der Dimension des Objectivs für den großen Refractor des Potsdamer Observatoriums. (S.-A.) Berlin 1896.

Weingarten, J., Sur la déformation des surfaces. (S.-A.) Stockholm 1896.

Weiss, Johann, Die musikalischen Instrumente in den Heiligen Schriften des Alten Testamentes. Festschrift der k. K. Carl-Franzens-Universität in Graz aus Anlaß der Jahresfeier am 15. November 1895. Graz 1895.

Wolfer, A., Zur Bestimmung der Rotationszeit der Sonne. (S.-A.) Zürich 1896.

Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. Jahrg. 1896. H. 1. Leipzig 1896.

Ziegler, Julius und Walther **König,** Das Klima von Frankfurt a/M. Frankfurt 1896.

Digitized by Google

Zum Gedächtnis an Karl Weierstraß.

Von

David Hilbert.

Karl Weierstraß wurde am 31. Oktober 1815 zu Ostenfelde in Westfalen als Sohn des dortigen Bürgermeisters geboren. Er besuchte während der Jahre 1829—1834 das Gymnasium in Paderborn und studirte dann in Bonn Jura; erst im Jahre 1838, als er im 23. Lebensjahre stand, entschloß er sich zum Studium der Mathematik und ging deshalb nach Münster, woselbst er eine mathematische Vorlesung bei *Gudermann* besuchte, die einzige, die er in seinem Leben gehört hat. Nach Ablegung des Examen pro facultate docendi und des Probejahres ging er zunächst als Lehrer an das Progymnasium in Deutsch-Krone und dann als Oberlehrer an das Gymnasium in Braunsberg. Fünfzehn Jahre hindurch war *Weierstraß* als Gymnasiallehrer thätig; während dieser Zeit veröffentlichte er eine Reihe bedeutender Abhandlungen über die schwierigsten Probleme der Functionentheorie. Die erste Anerkennung für diese Leistungen wurde ihm durch die philosophische Facultät in Königsberg zu Teil, die ihn im Jahre 1854 auf *Richelot's* Antrag zum Doctor honoris causa ernannte. Zwei Jahre später wurde *Weierstraß* als ordentlicher Professor an das Gewerbe-Institut und zugleich als außerordentlicher Professor an die Universität, sowie als Mitglied der Akademie der Wissenschaften nach Berlin berufen. Im Jahre 1864 wurde er ordentlicher Professor an der Universität Berlin. Seit 1856 ist *Weierstraß* Korrespondent unserer Gesellschaft der Wissenschaften und seit 1865 ihr auswärtiges Mitglied gewesen. Sein siebzigster Geburtstag wurde von der mathematischen Welt als Festtag begangen; ebenso sein achtzigster Geburtstag, an welchem unsere Gesellschaft ihn in einer Glückwunschadresse als den größten lebenden Meister des mathematischen Faches feierte.

Digitized by Google

Weierstraß ist am 19. Februar dieses Jahres im zweiundachtzigsten Lebensjahr in Berlin gestorben. Die Lehrthätigkeit hatte er schon seit einer Reihe von Jahren eingestellt; doch seine geistige Frische blieb ihm bis zum Tode erhalten. Er empfing noch gern Besuche auch der ihm persönlich ferner stehenden Mathematiker und verfolgte ihre wissenschaftlichen Bestrebungen mit Interesse.

Weierstraß' äußere Erscheinung war eine bedeutende; seine leuchtenden Augen und sein weißes wallendes Haar werden auch dem in Erinnerung bleiben, der ihn nur selten gesehen hat. Sein Bildnis ist im Auftrage des Staates für die Nationalgallerie gemalt worden.

Die Abhandlungen und Vorlesungen von *Weierstraß* werden von einer Kommission herausgegeben, welche die Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus ihrer Mitte ernannt hat und der *Weierstraß* selbst angehörte. Die ersten beiden Bände sind bereits erschienen.

In seiner akademischen Antrittsrede vom Jahre 1857 hat *Weierstraß* selbst sein wissenschaftliches Programm entwickelt. Er schildert darin, eine wie mächtige Anziehungskraft schon beim ersten Studium die Theorie der elliptischen Functionen auf ihn ausgeübt habe und wie er die Förderung der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen, deren Existenz bereits von *Jacobi* nachgewiesen worden war, als eine Hauptaufgabe der Mathematik ansah, an der auch er sich zu versuchen entschloß. Um sich für diese schwierige Aufgabe vorzubereiten, gab er sich zunächst dem gründlichen Studium der vorhandenen Hülfsmittel und der Beschäftigung mit minder schweren Aufgaben hin. Die Frucht dieser Studien waren zunächst die in den Jahren 1841—1843 veröffentlichten Abhandlungen über die Theorie der Potenzreihen, über die Definition analytischer Functionen mittelst algebraischer Differentialgleichungen und über die analytischen Facultäten; diese Abhandlungen waren zugleich die ersten Vorläufer für die später durch ihn vollendete Neubegründung der Theorie der analytischen Functionen. Nunmehr folgten drei grundlegende Abhandlungen über das sogenannte Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale: die erste in dem Programm des Braunsberger Gymnasiums enthielt die Herleitung der Relationen zwischen den Perioden der hyperelliptischen Integrale, die für die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems von fundamentaler Bedeutung sind; die zweite und dritte Abhandlung im Journal für Mathematik Band 47 und 52 gaben eine kurze Darlegung des Weges, auf welchem er die das Umkehrproblem lösenden Functionen als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen wirklich zur Darstellung

Digitized by Google

bringt. Dieser Weg war gänzlich neu und demjenigen entgegengesetzt, der bisher für den Fall des Geschlechtes $p = 2$ von *Rosenhain* und *Goepel* betreten war. Während diese Mathematiker die Thetafunctionen und die errechneten Relationen zwischen denselben als Grundlage für ihre Theorie wählten, ging *Weierstraß* von den Differentialgleichungen der hyperelliptischen Functionen aus und es erscheinen bei ihm die Thetafunctionen als ein letztes Glied der Theorie. Die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems, die *Weierstraß* in diesen Arbeiten für die hyperelliptischen Integrale zum ersten Mal gegeben hat und die für beliebige Abel'sche Integrale nachher zuerst durch *Riemann* auf einem anderen Wege und dann von *Weierstraß* selbst in seinen Vorlesungen ausgeführt worden ist, gilt mit Recht als eine der größten Errungenschaften in der Analysis.

Doch den nachdrücklichsten und weitreichendsten Einfluß auf die Entwickelung der mathematischen Wissenschaft hat *Weierstraß* durch die Neubegründung und den systematischen Aufbau der allgemeinen Theorie der analytischen Functionen ausgeübt. Bei der Errichtung dieser Theorie, die das Hauptwerk seines Lebens ist, diente ihm als wesentliches Mittel zur Sicherung der Grundlagen und zur Klärung der Begriffe die Kritik, die er am überlieferten analytischen Stoffe mit meisterhafter Schärfe handhabte und die durchweg ein Grundzug in seinem wissenschaftlichen Denken ist.

Vor Allem erinnern wir an *Weierstraß'* Kritik des Functionsbegriffes, welche ihn dazu führte, eine analytische Function als den Inbegriff aller Potenzreihen zu definiren, die aus einer bestimmten Potenzreihe durch Fortsetzung entstehen. Die Potenzreihe ist sonach das Fundament seiner Theorie der analytischen Functionen; die Potenzreihe gilt ihm begrifflich als das Analogon zu der Irrationalzahl, die er als eine unendliche Summe von rationalen Zahlen definirt, und sie erscheint ihm auch formal als die naturgemäßeste Grundlage für seine Theorie, indem er erkennt, daß das Rechnen mit Potenzreihen nach den gewöhnlichen Grundgesetzen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division erfolgt. Für die Weiterentwickelung der Theorie sieht *Weierstraß* das Wesentliche und Werthvolle seiner Definition der analytischen Function in dem Umstande, daß eine jede durch eine analytische Gleichung ausgedrückte Eigenschaft der Function, wenn sie für einen noch so kleinen Bereich der complexen Veränderlichen erfüllt ist, notwendig für den ganzen Definitionsbereich gilt, oder kurz gesagt, daß die Eigenschaften einer Stelle des Bereiches jeder

Digitized by Google

Stelle zukommen. Diese Thatsache würde, wie *Weierstraß* an Beispielen zeigt, nicht statthaben, sobald man die Function etwa durch einen analytischen Ausdruck oder durch eine beliebige unendliche Reihe von rationalen Functionen definiren würde.

In einer nach Form und Inhalt klassischen Abhandlung zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen hat *Weierstraß* eine große Klasse von Functionen, nämlich die eindeutigen und in der ganzen Ebene definirten Functionen mit einer endlichen Anzahl von wesentlich singulären Stellen nach den Principien seiner Functionentheorie behandelt und insbesondere den allgemeinsten analytischen Ausdruck für die Functionen dieser Klasse aufgestellt.

Die Kritik des übergelieferten Begriffes des Differentialquotienten führte *Weierstraß* zur Entdeckung solcher Functionen einer reellen Veränderlichen, welche überall innerhalb eines Intervalles stetig ist und die dennoch nirgends einen Differentialquotienten besitzt.

Von höchster Wichtigkeit ist ferner die scharfe Unterscheidung, die *Weierstraß* trifft, je nachdem eine Function an einer Stelle einen Werth erreicht oder demselben nur beliebig nahe kommt, insbesondere die Unterscheidung zwischen dem Begriff des Maximum oder Minimum und dem Begriff der oberen oder unteren Grenze einer Function einer reellen Veränderlichen. In seinem Satze, demzufolge eine stetige Function einer reellen Veränderlichen ihre obere und untere Grenze stets wirklich erreicht, d. h. ein Maximum und Minimum notwendig besitzt, schuf *Weierstraß* ein Hülfsmittel, das heute kein Mathematiker bei feineren analytischen oder arithmetischen Untersuchungen entbehren kann.

In engem Zusammenhange mit der genannten Unterscheidung steht die *Weierstraß*'sche Kritik des sogenannten Dirichlet'schen Principes, eines Principes, mit dessen Hülfe *Riemann* seine großartige Theorie der Abel'schen Functionen begründet hatte. *Weierstraß* erkannte, daß die diesem Principe zu Grunde liegende Schlußweise nicht stichhaltig ist, und zeigte dies auf die Weise, daß er als Beispiel ein gewisses einfaches Integral angab, welches vermöge der Willkür der darin vorkommenden Function die untere Grenze 0 besitzt, dagegen niemals genau den Werth 0 darstellt, wie man auch, den Endbedingungen entsprechend, die sonst willkürliche Function unter dem Integralzeichen wählen mag.

Wie wir gesehen, war *Weierstraß*' wissenschaftliche Thätigkeit vor Allem zwei großen Aufgaben gewidmet, nämlich der Förderung der Theorie der Abel'schen Functionen und der Neubegrün-

Digitized by Google

dung der allgemeinen Functionentheorie. Diese und die nah verwandten Wissensgebiete bildeten zugleich den Hauptgegenstand der Vorlesungen, welche *Weierstraß* an der Berliner Universität gehalten hat; es sind dies vor Allem die Vorlesungen über die Theorie der analytischen Functionen, über die elliptischen, die hyperelliptischen und die Abel'schen Functionen. Diese Vorlesungen haben in zahllosen Nachschriften weit über den Kreis seiner Schüler hinaus Verbreitung gefunden und sind den Fernerstehenden öfters auch durch mündliche Ueberlieferung bekannt geworden; erst sie lassen den ganzen Gedankeninhalt seiner Lehre erkennen. Es zeigt sich hier recht deutlich, daß für die Erlernung und Ausbreitung der mathematischen Wissenschaft neben der geschriebenen Formel das gesprochene Wort ein gleichberechtigter Factor und ein ebenso unentbehrliches Hülfsmittel ist.

Die Vorlesung über die allgemeine Theorie der analytischen Functionen einer Veränderlichen hat die bereits erwähnte Neubegründung der Functionentheorie zum Gegenstande und bildet das Fundament des ganzen *Weierstraß*'schen Lehrgebäudes; sie zeichnet sich ganz besonders durch die strenge Methode und den naturgemäßen Fortgang der Gedankenentwickelung aus.

Wir nennen ferner die Vorlesung über elliptische Functionen. *Weierstraß* vereinfachte die Theorie dieser Functionen in erheblichem Maße, indem er an Stelle der von *Jacobi* studirten Functionen die Functionen $\wp(u)$ und $\sigma(u)$ einführte, die gegenüber der linearen Transformation der Perioden ein invariantes Verhalten aufweisen. Die Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche dieser elliptischen Functionen sind nach *Weierstraß*' Vorlesungen und Aufzeichnungen von *H. A. Schwarz* bearbeitet und herausgegeben worden. Die *Weierstraß*'schen elliptischen Functionen $\wp(u)$ und $\sigma(u)$ sind jetzt fast allgemein in der mathematischen Welt eingebürgert.

Die Vorlesung über hyperelliptische Functionen enthält die Ausführung und Vervollständigung der vorhin besprochenen von *Weierstraß* in seinen Abhandlungen niedergelegten Theorie.

Aus *Weierstraß*' Vorlesung über Abel'sche Functionen endlich erkennen wir, wie es ihm gelang, in Verfolg seines ursprünglich für die hyperelliptischen Functionen eingeschlagenen Weges eine Theorie dieser allgemeineren Functionen aufzurichten. Diese Theorie ist ein ebenbürtiges Gegenstück zu derjenigen, die *Riemann* auf völlig verschiedene Art fast zu gleicher Zeit begründet hat. Während *Riemann*, wie vorhin erwähnt, seine Theorie der Abel'schen Functionen wesentlich auf das nicht einwandfreie Dirichlet'sche Princip stützt, beruht die *Weierstraß*'sche Theorie der Abel'schen Functionen auf

Digitized by Google

algebraischer Grundlage. Es war, wie *Weierstraß* in einem an *H. A. Schwarz* gerichteten Briefe ausführt, für ihn ein Glaubenssatz, in welchem er sich besonders durch eingehendes Studium der Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlicher bekräftigt sah, daß die Functionentheorie auf dem Fundamente algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden müsse, und daß es deshalb nicht der richtige Weg sei, wenn umgekehrt zur Begründung einfacher und fundamentaler algebraischer Sätze sogenannte transcendente Hülfsmittel in Anspruch genommen werden.

Für die *Weierstraß*'sche Theorie der algebraischen Gebilde besonders charakterisch ist der Begriff der Primfunction. Indem *Weierstraß* das algebraische Gebilde in der nach ihm benannten Normalform zu Grunde legt derart, daß das Unendlichferne nur eine Stelle des Gebildes ausmacht, beweist er die Existenz einer analytischen auf dem algebraischen Gebilde eindeutigen Function, welche überall im Endlichen sich regulär verhält und welche überdies nur höchstens an einer gegebenen Stelle des Gebildes verschwindet. Fällt das Geschlecht oder nach *Weierstraß* der Rang des algebraischen Gebildes größer als 0 aus, so besitzt jene Function im Unendlichfernen notwendig eine wesentlich singuläre Stelle und wenn diese Singularität noch in gehöriger Weise charakterisirt ist, nennt *Weierstraß* jene Function eine Primfunction und beweist dann, daß jede ganze algebraische Function auf eine und nur auf eine Weise als Product von Primfunctionen darstellbar ist. Der Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit mathematischer Größen in Primfactoren, welcher für ganze rationale Zahlen sogar Nichtmathematikern geläufig ist und der in der gesammten Zahlen- und Functionentheorie eine fundamentale Rolle spielt, ist somit durch den Begriff der Primfunction für den Bereich der Functionen eines algebraischen Gebildes festgestellt und insofern wird gewissermaßen der algebraische Begriff des Primideals durch die *Weierstraß*'sche transcendente Primfunction realisirt. Mit Hülfe des genannten Satzes von der eindeutigen Zerlegbarkeit einer jeden ganzen Function in Primfunctionen gelangt *Weierstraß* zu dem Abel'schen Theorem und zu dessen Umkehrung d. i., um die Sprache der Arithmetik zu gebrauchen, zu der Erkenntnis, daß die Gleichungen des Abel'schen Theorems die notwendige und hinreichende Bedingung darstellen, damit ein Ideal des algebraischen Gebildes zur Klasse der Hauptideale gehöre. Die Lösung des *Jacobi*'schen Umkehrproblems und die Darstellung der Abel'schen Functionen durch die Thetafunctionen bilden den Abschluß der Vorlesung.

Digitized by Google

In engster Beziehung zur Theorie der Abel'schen Functionen steht der Gegenstand einer Note, welche *Weierstraß* in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1869 veröffentlicht hat und welche die wichtige Frage nach den allgemeinsten $2n$-fach periodischen Functionen von n Variabeln betrifft. Ein an *Borchardt* gerichteter Brief behandelt den gleichen Gegenstand. Leider sind die Beweise der hier aufgestellten Sätze bis heute noch nicht bekannt geworden.

Durch die Beschäftigung mit der Theorie der Abel'schen Functionen wurde *Weierstraß* veranlaßt, seine Theorie der analytischen Functionen einer Veränderlichen auf mehr Veränderliche auszudehnen; er entwickelte vermöge des Hülfsmittels der Potenzreihen die Grundlagen der Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlicher und deckte die merkwürdigen Analogien und Unterschiede dieser Theorie mit der Theorie der Functionen einer Veränderlichen auf. Die hauptsächlichsten Resultate seiner Forschungen auf diesem Gebiete hat *Weierstraß* zuerst im Jahre 1879 für seine Zuhörer lithographiren lassen.

Die schöpferische Thätigkeit *Weierstraß'* war keineswegs auf Functionentheorie beschränkt. Die Algebra verdankt ihm zwei neue Beweise ihres Fundamentalsatzes, demzufolge jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat. Der letztere im Jahre 1891 veröffentlichte Beweis giebt zugleich einen Weg an, wie man die Wurzeln durch eine endliche Anzahl im Voraus zu übersehender Operationen mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann.

Weierstraß bereicherte ferner die Algebra der linearen Transformationen mit dem Begriffe der Elementarteiler; er stellte mit Hülfe dieses Begriffes die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, daß zwei bilineare oder quadratische Formen in zwei andere vorgelegte Formen linear transformirt werden können. Die Theorie der Elementarteiler fand seitdem in den verschiedensten Gebieten der Mathematik Eingang und Anwendung.

Der in unseren Nachrichten 1883 veröffentlichte an *H. A. Schwarz* gerichtete Brief zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen behandelt die von *Gauß* aufgeworfene Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können. *Weierstraß* hält es nach dem Ergebnis seiner Untersuchung für wahrscheinlich, daß *Gauß* diese Unzulässigkeit als dadurch begründet angesehen habe, daß bei Einführung von mehr als zwei Haupteinheiten das Product zweier Größen verschwinden

Digitized by Google

kann, ohne daß einer seiner Factoren den Werth 0 hat. Jedenfalls geht, wie *Weierstraß* ausdrücklich hervorhebt, aus seiner Untersuchung hervor, daß die Arithmetik der allgemeinen complexen Größen zu keinem Resultate führen kann, das nicht aus Ergebnissen der Theorie der complexen Größen mit einer oder mit zwei Haupteinheiten ohne Weiteres ableitbar wäre.

Die Arbeit von *Weierstraß* über die Ludolph'sche Zahl stellt eine Vereinfachung der bekannten Untersuchungen von *Hermite* und *Lindemann* dar, durch welche der letztere Mathematiker die Transscendenz der Zahl π bewiesen hatte.

Eine große Anzahl wertvoller mathematischer Publikationen entstanden auf *Weierstraß'* Anregung. Es seien hier nur die beachtenswerten Theoreme erwähnt, die *Mittag-Leffler* im Anschluß an die früher genannten Weierstraß'schen Untersuchungen über die eindeutigen analytischen Functionen entwickelt hat, und die interessante Abhandlung von *F. Schottky* „Abriß einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln".

Kein Zweig der Functionentheorie blieb von der *Weierstraß*schen Lehre unberührt; so sei an den Einfluß erinnert, den dieselbe auf die Theorie der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen ausgeübt hat.

Wichtige und entwickelungsfähige Theorieen anderer Mathematiker führen, wenn man ihrer Quelle nachgeht, auf *Weierstraß* zurück. So knüpfen die interessanten und anregenden Untersuchungen von *H. A. Schwarz* über Minimalflächen an die Formeln an, die *Weierstraß* 1866 in den Monatsberichten der Berliner Akademie über diesen Gegenstand entwickelt hat, und die Lösung der Randwertaufgabe in der Potentialtheorie durch die fundamentalen Methoden von *H. A. Schwarz* und *C. Neumann* ist eine mathematische Errungenschaft, die durch die vorhin besprochene *Weierstraß*'sche Kritik des Dirichlet'schen Princips bedingt war. Ferner sind die neuerdings von den französischen Mathematikern, insbesondere von *J. Hadamard* angestellten Untersuchungen über eindeutige analytische Functionen von bestimmtem „Geschlechte" eine consequente Fortbildung der *Weierstraß*'schen Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, und wie wichtig diese Untersuchungen auch für die Arithmetik sind, hat uns jüngst in glänzender Weise *J. Hadamard*[1]) gezeigt, indem es ihm gelang, wesentlich auf Grund

1) Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. Bull. de la soc. math. t. 24. 1897.

Digitized by Google

der Theorie der eindeutigen analytischen Functionen den seit *Gauß* von den ersten Mathematikern vergeblich gesuchten Beweis dafür zu finden, daß die Anzahl der unterhalb einer Grenze m liegenden Primzahlen den asymptotischen Wert $\frac{m}{\log m}$ besitzt.

Was endlich die Anwendungen der Functionentheorie betrifft, so sind vor Allem die Vorlesungen von *Weierstraß* über Variationsrechnung zu nennen. Mit bewundernswerter kritischer Schärfe legt hier *Weierstraß* die Mängel der überlieferten Theorie bloß; er zeigt, daß die alten Methoden nicht sämmtliche Variationen der zu bestimmenden Function, sondern nur diejenigen berücksichtigen, für die auch die Differentialquotienten der zu bestimmenden Function unendlich wenig variiren. *Weierstraß* giebt die Lösung der Frage, wann ein bestimmtes Integral mit einer willkürlichen Function ein Maximum oder Minimum besitzt, indem er zu den Kriterien von *Euler*, *Lagrange*, *Legendre* und *Jacobi* ein neues Kriterium hinzufügt.

Auch auf die Anwendungen der Functionentheorie im Gebiete der Mechanik und Physik hat *Weierstraß* hohen Wert gelegt und seine Schüler vielfach zu Untersuchungen in diesem Gebiete veranlaßt. Wir erwähnen in dieser Hinsicht nur die Dissertation von *H. Bruns*, welche die Frage nach der Fortsetzung der Potentialfunction über die Oberfläche des betrachteten Körpers hinaus behandelt, und die ebenfalls durch *Weierstraß* angeregten Untersuchungen von *Sophie Kowalevski* über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln. Es haben ja über das Verhältnis der reinen Mathematik zur angewandten Mathematik die Gelehrten je nach ihren Neigungen und Arbeitsgebieten gar verschiedene Meinungen gehabt. *Kummer* hat sein Glaubensbekenntnis in dieser Hinsicht in seiner akademischen Antrittsrede vom Jahre 1856 ausgesprochen. „Die Mathematik", so führt *Kummer* aus, „habe auch als Hülfswissenschaft namentlich in ihren Anwendungen auf die Natur manche großartige Triumphe gefeiert, und es sei nicht zu leugnen, daß sie diesen hauptsächlich die allgemeine Achtung verdankt, in welcher sie steht; aber ihre höchste Blüthe könne sie nach seinem Dafürhalten nur in dem ihr eigenen Elemente des abstrakten reinen Quantums entfalten, wo sie unabhängig von der äußeren Wirklichkeit der Natur nur sich selbst zum Zwecke hat". *Weierstraß* vertrat eine mehr vermittelnde Ueberzeugung. Die Bedeutung, die die Mathematik als reine Wissenschaft beansprucht, erkennt er im vollsten Maße an und warnt davor, den Zweck einer Wissenschaft außerhalb derselben zu suchen; aber zugleich betont er in seiner akademischen Antritts-

Digitized by Google

rede vom Jahre 1857, daß es ihm nicht gleichgültig sei, ob eine mathematische Theorie sich für Anwendungen auf Physik eigne oder nicht. *Weierstraß* redet einer tieferen Auffassung des Verhältnisses zwischen Mathematik und Naturforschung das Wort, derzufolge der Physiker in der Mathematik nicht lediglich eine Hülfsdisciplin und der Mathematiker die Fragen, die der Physiker stellt, nicht als eine bloße Beispielsammlung für seine Methoden ansehen solle. „Auf die Frage", so fährt *Weierstraß* in jener Rede fort, „ob es denn wirklich möglich sei, aus den abstrakten Theorien, welchen sich die heutige Mathematik mit Vorliebe zuzuwenden scheine, auch etwas unmittelbar Brauchbares zu gewinnen, möchte er entgegnen, daß doch auch nur auf rein speculativem Wege griechische Mathematiker die Eigenschaften der Kegelschnitte ergründet hätten, lange bevor irgend wer ahnte, daß sie die Bahnen seien, in welchen die Planeten wandeln, und er lebe allerdings der Hoffnung, es werde noch mehr Functionen geben mit Eigenschaften, wie sie *Jacobi* an seiner Thetafunction rühmt, welche lehrt, in wie viel Quadrate sich jede Zahl zerlegen läßt, wie man den Bogen einer Ellipse rectificirt und dennoch", so setzt *Weierstraß* hinzu, „im Stande ist, und zwar sie allein das wahre Gesetz darzustellen, nach welchem das Pendel schwingt".

Weierstraß ist nun seinem langjährigen Mitarbeiter an der Berliner Universität *L. Kronecker* im Tode gefolgt und nachdem auch die englischen Mathematiker *Cayley* und *Sylvester* heimgegangen sind, bleibt uns aus jener klassischen Zeit, in der die Mathematik allerorten in so hoher Blüthe stand, noch der greise *Ch. Hermite* in Paris, der zweite mathematische Ehrendoctor der Königsberger Universität. Dieser scharfsinnige und vielseitige Mathematiker hat neulich in der Pariser Akademie dem Andenken *Weierstraß'* herzliche Worte gewidmet. „La vie de notre illustre Confrère", so schließt *Hermite* seinen Nachruf, „a été en entier consacrée à la Science qu'il a servie avec un absolu dévouement. Elle a été longue et comblée d'honneurs; mais devant une tombe qui vient de se fermer, nous ne rappelons que son génie et cette universelle sympathie qui s'accorde à la noblesse du caractère. Weierstraß a été droit et bon; qu'il reçoive le suprême hommage plein de regrets et de respect que nous adressons à sa mémoire! Elle vivra aussi longtemps que des esprits avides de vérités consacreront leurs efforts aux recherches de l'Analyse, au progrès de la science du Calcul."

Digitized by Google

Ernst Curtius.

Von

F. Leo.

An die Aufgabe, in Abwesenheit des zunächst in unsrer Gesellschaft dazu Berufenen, einige Worte zum Gedächtnisse von Ernst Curtius zu sprechen trete ich mit dem Gefühle der Zuneigung, der Liebe, das auch dem Fernerstehenden die reine und edle Gestalt dieses Mannes eingeflößt hat. Sein Tod hat hier in Göttingen viele Herzen getroffen. Er hat aber auch an der Peripherie des deutschen Geisteslebens eine Bewegung lebhafter Theilnahme hervorgerufen. Curtius war einer der auserwählten Menschen, deren Bild schon in der Seele ihrer Zeitgenossen eine Art von Verklärung empfängt; nach allem aber was seine Reden und Schriften lehren, was seine Freunde gleichermaßen und die sich nur flüchtiger Berührungen zu erfreuen hatten von ihm wissen und melden, hat selten in ähnlichem Grade das idealisirte Bild die Wirklichkeit gedeckt, ist selten ein vollkommnerer Einklang von Geistes- und Seelenkräften, ein reicheres Ausstrahlen und Empfangen sonniger Lebenselemente, eine reinere Verbindung von Weisheit und Kindlichkeit in einem glücklicher gefügten Lebensrahmen beisammen gewesen. Wenn ein Mann von solcher Art eine starke wissenschaftliche Wirkung geübt hat, so wird man von vornherein annehmen dürfen, daß ein Theil davon Wirkung der Persönlichkeit gewesen ist; es können sich in der litterarischen Production eines solchen Mannes dieselben Eigenschaften als Schattenseiten geltend machen, die in der lebendigen Wirkung glänzende Erfolge bedeutet haben; in der That wird, wenn einmal die Quellen dafür reichlicher fließen, Ernst Curtius' eigenstes persönliches Wesen wie das weniger anderer Gelehrter zur Geschichte der Wissenschaft gehören.

Hier in Göttingen ist sein Bild lebendig geblieben, wie es in stiller und öffentlicher Arbeit, in Verkehr und Leben sich zusammenschloß. Curtius hat in unsrer Gesellschaft, an unsrer

Digitized by Google

Universität zwölf seiner lebenskräftigsten Jahre verbracht, die Jahre gleichmäßiger Wanderung auf erreichter Höhe. Hier ist seine griechische Geschichte entstanden; in unsrer Gesellschaft sind seine attischen Studien vorgelegt worden; an den Festtagen unsrer Universität hat Curtius die dann in einem besonderen Bande vereinigten 'Göttinger Festreden' gehalten. Hier hat sein rednerischer Stil die Vollendung erreicht, hinter der seine Fähigkeit historischer Darstellung zurückblieb, eine hohe Vollendung, denn dieser Stil mit einer Fülle von Kunst und Schönheit in Sprache und Gedanken scheint ganz Natur zu sein: klingen die Gedanken vertraut und scheint die Sprache wie unbewußt zu quellen, so könnte doch kein Satz einem anderen als diesem Redner gehören. Hier in unserem Kreise hat Curtius in seiner letzten Göttinger Zeit die Erinnerungsreden auf E. Gerhard, Brandis und Böckh gehalten. Dann zog er als Gerhards Nachfolger nach Berlin zurück, wo ihm noch fast drei Jahrzehnte in Kraft und Frische beschieden waren; so ist er alt genug geworden, daß schon bei seinen Lebzeiten die Stelle, die ihm in der Geschichte der Alterthumswissenschaft gebührt, mit Sicherheit zu bezeichnen war.

Es ist mehrfach ausgesprochen worden, daß das Große und Bleibende an Curtius' wissenschaftlicher Arbeit in seinen Bemühungen um topographisch-geographische Untersuchung und Beschreibung, um archäologisch-historische Erschließung der Stätten des griechischen Lebens und der griechischen Geschichte liegt. Es ist die Fortsetzung des Weges, den O. Müller gebahnt hat. O. Müller hatte selbst die Nothwendigkeit erkannt, den Boden der hellenischen Länder ebenso wie die Monumente ihrer Litteratur und Kunst zu durchforschen, um die Geschichte und Cultur der hellenischen Stämme in ihren Wurzeln zu fassen. Ihn hat auf der Reise, die er auf dieses Ziel hin unternahm, in den Armen seines Schülers Curtius ein früher Tod getroffen; an der Stelle, an der O. Müller sie liegen lassen mußte, nahm Curtius die Arbeit auf. Nicht als ein Fremdes und Uebernommenes; seit drei Jahren lebte Curtius in Athen, hatte das Land vielfach bereist und war von O. Müller bereits dazu ausersehen worden, zu seiner Geschichte der Hellenen die geographische Einleitung zu schreiben. Eine jener Reisen durch den Peloponnes hatte Curtius mit Karl Ritter gemeinsam machen dürfen. Ritter ist es, dessen Einfluß neben den O. Müllers getreten ist; aus dem Fortwirken der von diesen beiden Männern ausgegangenen Impulse ist Curtius' wichtigstes und eigentlich epochemachendes Werk, der 'Peloponnesos, eine historisch-geographische Beschreibung der Halbinsel'

Digitized by Google

entstanden. Auch als Beschreiber des griechischen Bodens war Curtius nicht ohne Vorgänger; eine lange Reise vornehmlich englischer Forschungsreisender und gleichzeitig mit ihm Ludwig Roß und Ulrichs hatten reichliches Material und erhebliche Resultate gewonnen. Aber als eine den Stoff durchdringende und unter mannigfaltigen großen Gesichtspunkten zusammenfassende wissenschaftliche Beschreibung eines der classischen Länder, die zugleich ein Kunstwerk der Darstellung war, stand der Peloponnesos einzig da und bezeichnete, gleich nach ihren Anfängen, einen Höhepunkt der wissenschaftlichen Bewegung, an deren Spitze nunmehr Curtius getreten war. In steigendem Maße, von vielen Centren aus, durch das Eingreifen vieler thatkräftiger Männer ist seit jenen Zeiten die Durchforschung der hellenischen Länder betrieben worden; Curtius hat bis in seine letzten Tage nicht nur sein Jugendfeuer in die Herzen der Mitstrebenden schlagen lassen, er hat auch beständig die großen Gesichtspunkte angegeben, das Ziel am höchsten gesteckt und die großen Mittel, die ihm sein Lebensweg erreichbar machte, auf das Ziel hingelenkt. Zwei Stätten waren es vornehmlich, auf die sich diese führende Thätigkeit erstreckte, Athen und Olympia. Die Wiedergewinnung Olympias ist Curtius' That und Verdienst. Er hat den Gedanken formulirt, in die Welt geworfen und den rechten Zeitpunkt zu seiner Ausführung ersehen, er hat die Verhandlungen geführt, den Plan entworfen und die Ausführung geleitet. Die sechsjährige Ausgrabung von Olympia hat nicht nur zum erstenmal eine wichtige griechische Culturstätte vollkommen aufgedeckt, sie ist auch musterhaft durch die rasche und treffliche Berichterstattung und vorbildlich geworden für jede folgende Ausgrabung, die auf wissenschaftlichen Charakter Anspruch macht, durch die constructive Methode der Aufdeckung, die das Ganze als Ganzes wiederzugewinnen und jedem einzelnen Funde seine Stelle im Ganzen zu bewahren strebt. Mit Recht steht Curtius als neuer *κτίστης* in der Vorhalle des Museums von Olympia; aber auch an den anderen Stätten hellenischen Lebens, die seitdem dem Lichte zurückerobert wurden, ist die Wirkung seines Geistes zu spüren.

Arbeiten über die Topographie und Stadtgeschichte Athens haben Curtius von seinen athenischen Jugendjahren an durchs Leben begleitet. Von Göttingen aus hat er Athen wieder besucht und wenige Tage nach seiner Rückkehr in der Rede über 'das alte und neue Griechenland' von den lebhaften Eindrücken seiner Anschauungskraft berichtet und auf die Wichtigkeit solcher Reisen, die damals noch selten waren, für die Bestrebungen der Alter-

Digitized by Google

thumswissenschaft hingewiesen. Während jenes Aufenthalts wurde zuerst der großen Unternehmung vorgearbeitet, die später, in der Zeit von Olympia, in weiterem Umfang und mit reicheren Mitteln nach Curtius' Plan und unter seiner Leitung wieder aufgenommen das sichere Fundament für die attische Topographie geschaffen hat, die von deutschen Generalstabsoffizieren ausgeführte Vermessung und Aufnahme der Stadt Athen und des attischen Landes.

Gleichfalls in die Vorbereitungszeit der olympischen Ausgrabung fällt die Gründung des athenischen Instituts, zu der Curtius, auch hier den entscheidenden Moment erfassend, den Plan entworfen hatte. Athen und Hellas waren seine wissenschaftlichen Objecte und seine Ideale; die römische Welt lag ihm fern, auch seine griechische Geschichte schließt vor der Zeit ab, da die griechische Cultur und Politik mit der römischen in Berührung tritt. Man kann auch das zu den glücklichen Fügungen rechnen, an denen Curtius' Leben reich war, daß er in seinen letzten Jahrzehnten die Verschiebung des Centrums der archäologischen Interessen von Italien nach den griechischen Ländern erlebt hat. Das Institut, in dem so lange die archäologische Arbeit concentrirt gewesen ist, gehörte dem Lande der Renaissance des 15. und des 18. Jahrhunderts; das Stückchen Renaissance, das wir in der Auferstehung so vieler griechischer Culturstätten in unseren Tagen erlebt haben, hat den Schwerpunkt dieser Studien nach Griechenland verlegt. Dort strömt das neue Material zu und schafft sich neue Methoden, von dort kommt der gesammten Alterthumsforschung die stärkste Befruchtung und Erneuerung. Eine ganz andere Bedeutung hat jetzt für den Philologen und Archäologen die Reise nach Griechenland als sie in Curtius' Jugend und in seiner Göttinger Zeit gehabt hat. Ihm war es beschieden, diese Bewegung vorzubereiten und in vorderster Reihe zu führen. Es ist nur gerecht wenn sein Name mit dem athenischen Institut so unzertrennlich verbunden ist wie der Eduard Gerhards mit dem römischen.

Ich habe nur die Richtungslinie bezeichnen können, in der Ernst Curtius' unvergängliches Verdienst zu suchen ist. Es sind Leistungen, die aus dem Ganzen seiner Persönlichkeit entsprungen, Erfolge zum Theil die nur durch die eigne Art seines Wesens möglich geworden sind. Gelehrte, die nicht nur Bücher geschrieben, sondern durch ihre persönlichen Eigenschaften die Wissenschaft eine Strecke des Weges geführt haben, wie etwa unter den Philologen Männer so verschieden an Art und Wirkung wie Gottfried Hermann und Ernst Curtius, stehen hoch in der

Digitized by Google

Rangliste der Wissenschaft. Wer über den ganzen Umfang von Curtius' litterarischer Production berichten wollte, würde nicht in derselben Weise die positive Seite allein vorkehren dürfen. Dieselbe Liebe zur Idee, dieselbe Energie der Ueberzeugung, die ihn befähigte große Gedanken in That umzusetzen, befestigte ihn auch im Irrthum, ließ ihn auch die Macht des thatsächlichen Beweises unterschätzen; derselbe Idealismus, der seinen Blick über die gemeinen Schranken hinaus so oft zur Intuition der Wahrheit führte, verminderte ihm den Sinn fürs Charakteristische, dessen er als Historiker bedurfte: wir hören mit Interesse aus den Mittheilungen einer Freundin, daß ihm auch in moderner Dichtung psychologische Analyse zuwider war. Aber auch in der Wissenschaft ist das wesentliche nicht die einzelnen Schritte, sondern das Ziel; wer wie Curtius nach den Sternen sieht, der ist des rechten Weges sicher, ob er auch öfter als die nur den Boden sehen am Wege straucheln mag. Curtius war einer von denen, die ihre Mitlebenden gelehrt haben aufwärts zu blicken; das wird ihm, wie wir hoffen wollen, auch die Nachwelt danken.

Digitized by Google

Gedächtnißrede auf Aug. Kekulé.

Von

Otto Wallach.

Der Tod, der im verflossenen Jahr eine so reiche Ernte unter den Mitgliedern unserer Gesellschaft hielt, hat aus deren Zahl auch einen der hervorragendsten Chemiker unserer Zeit dahingerafft. Am. 13. Juli 1896 starb in Bonn im 67. Lebensjahre Aug. Kekulé.

Kekulé stammt aus Darmstadt, der Vaterstadt J. v. Liebigs. Als er 1847 die Universität Gießen bezog, stand Liebig schon im Zenith seines Ruhms. Er hatte in Gießen das berühmte Laboratorium begründet, die erste große Pflanzschule der Chemie in Deutschland, aus der von Mitgliedern unserer Gesellschaft u. a. auch Fresenius, Henneberg, A. W. Hofmann, H. Kopp, hervorgegangen sind. Kekulé ging auf seine Landes-Universität nicht um Chemie, sondern um Architektur zu studieren und wir müssen es ihm wohl glauben, was er später wiederholt ausgesprochen hat, daß er gerade seiner Veranlagung für dies Fach seine großen Erfolge in der Chemie verdankt. Der junge Architekt besuchte auch die Vorlesungen seines berühmten Landsmanns und diese nahmen ihn so ein, daß er sich von seinen ersten Studien ab und ganz der Chemie zuwandte. — So groß der Ruhm Liebigs, so anerkannt sein Lehrtalent waren, so nahe sich die Beziehungen des Meisters zu seinem neuen Jünger gestaltet hatten, war doch keine Rede davon, daß Kekulé seine Studien bei Liebig allein abgeschlossen hätte.

Hier liegt ein Unterschied im Verhalten der Chemiker von Sonst und Jetzt, den ich mir nicht versagen kann mit einem Wort zu streifen. Seit mehreren Jahrzehnten strömen aus aller Herrn Länder, aus allen Welttheilen den deutschen Bildungsstätten lernbegierige Chemiker zu. Sie vertiefen in Deutschland ihr Wissen und verpflanzen es in ihr Vaterland. Daß dem so ist, verdanken

Digitized by Google

wir der Schule Liebigs, Wöhlers und Bunsens, aus denen die von Hofmann, Kolbe und Kekulé hervorgegangen sind. Als aber die ersten chemischen Schulen Deutschlands im Werden waren, lag es noch anders. Wer Chemie lernen wollte, der wandte sich nach Paris oder nach Stockholm oder auch nach London. So hat z. B. Liebig sich unter den Auspicien von Gay Lussac, Thénard, Dulong, Chevreul ausgebildet. Wöhler hat bei Berzelius die Anregung zu seinem Schaffen empfangen.

Wir dürfen stolz darauf sein, daß die deutsche Wissenschaft sich von der Vormundschaft anderer Länder jetzt vollkommen unabhängig gemacht hat. Aber wir wollen auch nicht vergessen, daß Deutschland seine wissenschaftliche Blüthe in der Chemie nie erreicht hätte, wäre den lernbegierigen Deutschen von anderen Ländern nicht seiner Zeit Gastfreundschaft gewährt worden. Und wenn wir heute das Gute, das wir einst empfangen, vielleicht auch mit Zinsen zurückzahlen, so sollten wir uns doch nicht verleiten lassen — wozu jetzt eine gewisse Neigung aufkommt — ängstlich zu rechnen, ob es nicht für den Augenblick nationalökonomisch vortheilhafter sei, uns gegen den zahlreichen Besuch des Auslands zu wehren. Die Herde der Wissenschaft darf man nicht hermetisch abschließen, wenn ihre heiligen Feuer nicht an Glanz verlieren sollen.

Doch das dürften wir unseren Schüler zu bedenken geben, ob sie nicht ihren Gesichtskreis für ihren künftigen Beruf vortheilhaft erweitern würden, wenn sie weniger einseitig als es jetzt meist in Deutschland geschieht, nur von einer einzigen oder nur wenigen, lediglich deutschen chemischen Bildungsstätten ihre geistige Nahrung aufnehmen würden.

Zu den Zeiten der beginnenden Präponderanz der chemischen Wissenschaft in Deutschland war man jedenfalls der Ansicht, daß zur chemischen Ausbildung der Besuch eines, wenn auch vortrefflichen, Bildungscentrums nicht genüge.

Liebig rieth Kekulé nach Paris zu gehen. Es war für dessen Entwicklung entscheidend, denn in Paris war es, wo Kekulé außer mit Dumas, Wurtz, Cahours, Regnault auch mit Gerhard, dem Schöpfer der chemischen Typentheorie in freundschaftliche Berührung kam, dessen chemische Anschauungen, wie wir sehen werden, weiter zu entwickeln und zu vertiefen er berufen war. Von Paris siedelte Kekulé auf einige Zeit nach Schloß Reichenau bei Chur zum Freiherrn v. Planta über, den er bei chemischen Forschungen namentlich über Nicotin unterstützte. Dann ging er als Assistent zu Stenhouse nach London, wo sich

Digitized by Google

anregende Beziehungen zu allen dortigen bedeutenden Chemikern, namentlich zu Williamson und Odling entwickelten. — Mit dem Londoner Aufenthalt sind die Lehrjahre Kekulé's abgeschlossen. Er habilitirt sich Anfang 1856 in Heidelberg und sieht sehr schnell seine Lehrthätigkeit von durchschlagendem Erfolge gekrönt, seine Leistungen als Forscher anerkannt. Schon nach 2 Jahren beruft man Kekulé als ord. Professor an die Universität nach Gent. 1867 erhält er den Lehrstuhl der Chemie in Bonn, den er fast 30 Jahre hindurch eingenommen hat.

In Gent hat Kekulé seine intensivste Thätigkeit entfaltet. Dort hat er sein System ausgebaut, die wichtigsten Abschnitte seines epochemachenden Lehrbuchs geschrieben und eine Reihe z. Th. hervorragender Schüler — u. a. Baeyer, Körner, Ladenburg, Hübner, Wichelhaus — ausgebildet.

Wenn man mit der fruchtbaren und rastlosen Schaffenszeit dieses Decenniums von der Habilitation bis zur Uebersiedelung nach Bonn die drei Decennien der Bonner Zeit Kekulés vergleicht, so erscheinen sie verhältnißmäßig leer. Allerdings hat Kekulé auch in Bonn noch eine sehr bedeutende Lehrthätigkeit entfaltet. Viele Universitätslehrer des In- und Auslandes u. a. Anschütz, Claisen, Franchimont, van't Hoff, Klinger, Königs, de Koning, F. Krafft, Krutwig, Spring, G. Schultz, Zincke, haben gerade in Bonn bei Kekulé ihre beste Anregung erhalten. Auch an der Fortsetzung seines Lehrbuchs hat Kekulé in den ersten Jahren in Bonn noch eifrig gearbeitet — aber es ist unvollendet geblieben. Er hat Experimentaluntersuchungen ausgeführt — aber nicht gerade zahlreiche Abhandlungen Kekulé's sind aus Bonn datirt. — Dieses Zurücktreten der Production fällt um so mehr auf, wenn man damit die bis in das späte Alter andauernde, unerschöpfliche Productivität seines berühmten Fach- und Altersgenossen A. W. Hofmann vergleicht, der jährlich bis an sein Lebensende die Wissenschaft mit neuen und eleganten Untersuchungen bereichert hat. Vielen erscheint es wie ein psychologisches Räthsel, daß ein Mann von Kekulé's hervorragender geistiger Begabung, zugleich ein eleganter, furchtloser, sicherer Experimentator, der in einer kurzen Spanne Zeit sich unvergänglichen Ruhm zu verschaffen im Stande war, scheinbar so frühzeitig erlahmt ist. Körperliche Indispositionen, welche namentlich in den letzten Jahren ihn heimsuchten, äußere Bedingungen überhaupt bieten für die Erscheinung keine genügende Erklärung. Es spielen ganz andere Momente die entscheidende

Digitized by Google

Rolle. Die Menschen, auch die bedeutenden, sind eben aus sehr verschiedenem Holze geschnitzt. Kekulé war keine Arbeitsbiene, stetig beflissen, durch Ausbau möglichst vieler neuer Zellen den Stock des Wissens zu bereichern. Er fühlte sich wie ein Künstler, zu dem er sich auch ursprünglich berufen hielt. „Es wird ihnen nicht leid thun nach Bonn zu kommen, schrieb er mir 1870 gelegentlich einer Aufforderung sein Assistent zu werden, „wir führen hier ein wissenschaftliches Künstlerleben.“ Diese Worte bergen gewissermaßen eine Erklärung für Kekulés Eigenart und sein wissenschaftliches Verhalten.

Ein Künstler schafft nur da intensiv, wo ein Problem ihn lebhaft interessirt und reizt — mitunter, wenn die dira necessitas ihn treibt. Der Nothwendigkeit sich Namen und Stellung zu schaffen, war Kekulé sehr früh überhoben. Für das schwierige wissenschaftliche Problem aber, das seinen jugendlichen Geist mitgerissen hatte, hatte er eben so früh eine geniale Lösung gegeben. Jahrzente lange Arbeit vieler Forscher ist nothwendig gewesen, um festzustellen, ob diese Lösung richtig wäre. Dem ist Kekulé bis an sein Lebensende mit innerer Spannung, weniger mit nach außen tretender Arbeit gefolgt. Wer will sich anmaßen darüber zu rechten, daß er sich nicht immer neue Probleme stellte oder daß er den von der jüngeren Generation verfolgten Zielen nicht immer das thätige Interesse entgegen brachte, das sie von ihm glaubte beanspruchen zu dürfen?

Kekulé hat die Chemie durch manche Experimentaluntersuchungen bereichert. Der Schwerpunkt seiner Leistungen liegt aber auf rein theoretischem Gebiet, da beherrschen seine Anschauungen die Chemie seit Jahrzehnten.

Es ist ein etwas gewagtes Unternehmen, vor einem nicht fachmännischen Publicum in den wenigen zu Gebote stehenden Minuten entwickeln zu wollen, was man nun Kekulé eigentlich verdankt. Doch will ich es wenigstens anzudeuten versuchen, soweit es überhaupt möglich ist, ohne auf die Verdienste der Zeitgenossen Kekulé's um die Entwickelung der organischen Chemie ausführlich einzugehen.

Mit der Dalton'schen Atomtheorie haben die Chemiker bekanntlich die Vorstellung übernommen, daß die Materie aus Atomen besteht, von denen es soviel verschiedene Arten giebt, als wir chemische Grundstoffe unterscheiden. Durch Combination der verschiedenartigen Atome entsteht die endlose Zahl der chemischen

Digitized by Google

Verbindungen. Die meisten Stoffe der unorganischen Natur setzen sich aus verhältnißmäßig wenigen Atomen zusammen. Viel complicirtere Verhältnisse weisen die organischen Substanzen, die Verbindungen des Kohlenstoffes, auf. Für die Chemie handelt es sich darum, die Gesetze zu finden, nach denen die Atome Verbindungen eingehen.

Berzelius hatte nun das Zustandekommen der chemischen Verbindungen allein aus den elektrischen Eigenschaften der Atome und Atomgruppen, der Radicale, zu erklären versucht. Gemäß seiner Ansicht ziehen sich mit ungleichen elektrischen Eigenschaften begabte Atome an und es entsteht eine chemische Verbindung, deren Charakter wiederum durch ihre elektrischen Eigenschaften bedingt wird. Die Bildung sehr complicirter organischer Verbindungen zu erklären, reichte die Berzelius'sche Lehre von Anbeginn nicht recht aus. Seine Theorie kam bei den Chemikern aber ganz in — wie die Entwickelung der Dinge gezeigt hat nicht völlig gerechtfertigten — Mißkredit, weil man fand, daß sich in einer chemischen Verbindung z. B. der Essigsäure, ein electropositives Atom, der Wasserstoff, durch ein electronegatives, das Chlor, ersetzen läßt, ohne daß sich die gechlorte Essigsäure von der Essigsäure in ihrem wesentlichen chemischen Charakter unterscheidet. Man schloß daraus, daß die elektrischen Eigenschaften der Atome nicht maßgebend für das Zustandekommen und den Charakter einer organischen Verbindung seien und verzichtete zeitweilig ganz darauf, sich über den inneren Bau der Kohlenstoffverbindungen Rechenschaft geben zu wollen.

Inzwischen wuchs durch die Arbeit der Chemiker die Zahl der bekannten Kohlenstoffverbindungen ins Ungemessene an. Das Gebiet zu übersehen wurde immer schwieriger, denn man stand vor einem Chaos unendlich vieler einzelner Thatsachen.

In dieses zum ersten Mal Ordnung und Uebersicht gebracht zu haben, ist das Verdienst des Elsässer Chemikers Gerhard, dem Kekulé in Paris nahe getreten war. Gerhard zeigte, daß man die meisten, auch die organischen chemischen Verbindungen unter einige sehr einfache unorganische Typen unterordnen kann, nämlich: Salzsäure, Wasser und Ammoniak. Eine Erklärung, warum das möglich sei, hat er nicht gegeben und wollte er nicht geben. — Hier bewies Kekulé zum ersten Mal seinen Scharfblick. Er erkannte, daß den einzelnen Atomen eine verschiedene Bindungskraft anderen Atomen gegenüber zukomme. Das Chlor in der Salzsäure kann nur ein Wasserstoff-Atom binden, der Sauerstoff im Wasser zwei, Stickstoff im Ammoniak drei

Digitized by Google

und — das fand Kekulé auch gleich neu heraus — der Kohlenstoff kann vier Wasserstoff-Atome direct an sich ketten. Man kann also die Atome nach ihrer Bindungskraft oder Werthigkeit ordnen. Die gleichwerthigen Atome müssen dann natürlich Verbindungen von demselben Typus bilden. So wurde durch Kekulé die mechanische Gerhard'sche Typentheorie vergeistigt, indem er die Ursache der Erscheinungen klar erkannte. Gleichzeitig ging Kekulé weiter.

In Kohlenstoff-Verbindungen, welche mehr als ein Kohlenstoff-Atom enthalten, kommt die Vier-Werthigkeit des Kohlenstoff-Atoms nicht immer direct zum Ausdruck: sie erscheint nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten geändert und zwar immer vermindert.

Für diese Erscheinung gab Kekulé die folgende Erklärung: den Kohlenstoff-Atomen kommt vor allen anderen die Fähigkeit zu, sich mit einander zu verknüpfen, zu verketten. Dadurch verlieren sie einen Theil ihrer Verwandschaftskraft anderen Atomen gegenüber, aber zugleich werden sie befähigt, sehr große Moleküle aufzubauen und eine große Manigfaltigkeit der Combinationen zu erzielen: so erklärt sich der Reichthum der organinischen Chemie. Jedoch eine bestimmte Gruppe der organischen Verbindungen, die s. g. aromatischen, welche sich vom Benzol herleiten, fügten sich den angenommenen Gesetzmäßigkeiten nicht, zeigten überhaupt ein ganz eigenthümliches Verhalten. Auch dieses Räthsel erschloß sich Kekulé's Blick. In den gewöhnlichen organischen Substanzen, so nahm er an, sind die Kohlenstoff-Atome kettenförmig mit einander verknüpft. In Benzol und dessen Abkömmlingen sind sechs Kohlenstoff-Atome in eigenthümlicher Weise zu einem Ringe zusammengetreten.

Diese seine „Theorie der Benzolderivate", welche mit einem Schlage eine große Reihe von bis dahin unerklärlichen Thatsachen dem Verständniß nahe brachte, hat Kekulé wohl am berühmtesten gemacht. Die Zulässigkeit der Kekulé'schen Annahmen ist mehrfach angefochten, aber der Widerstand hat allmählich verstummen müssen. Zahllose Untersuchungen haben die Richtigkeit der Kekulé'schen Grundvorstellungen erwiesen.

So darf man denn sagen: Kekulé's schöpferischer Phantasie verdanken wir wesentlich die Anschauungen über den inneren Bau der Kohlenstoffverbindungen, welche die Neuzeit beherrschen. Kekulé ist der Schöpfer der Structurchemie. Er hat das Grundproblem gelöst vom Aufbau der complicirten organischen Stoffe.

In seinem mehrfach erwähnten Lehrbuch brachte er die orga-

Digitized by Google

nische Chemie zum ersten Mal in das System, welches sich bis heut bewährt hat und es thut der Bedeutung dieses Kunstwerks keinen Abbruch, daß es ein Torso geblieben ist.

Bei allen Formulirungen, die Kekulé gab, trat seine Gestaltungskraft, sein sicherer Blick hervor, vor allen Dingen aber auch das mächtige Bedürfniß nach klarer Anschaulichkeit. Hier regte sich der geborene Künstler, der Architekt. Es genügte ihm nicht, eine theoretische Vorstellung von der Verknüpfung der Atome gewonnen zu haben: er will diese Verknüpfung versinnlichen, sie im Raume sehen. So entstanden die Kekulé'schen Atommodelle. Sie sind zu einem unentbehrlichen Hülfsmittel für den Unterricht geworden. Und mehr. In ihrer letzten Form wurden in den Modellen die Bindungskräfte des als Kugel gedachten Kohlenstoffatoms durch Stifte markirt, welche die Richtung der vier Kohlenstoff-Valenzen bezeichnen sollten. Es ist dies das Modell, an welches die Anschauungen van't Hoff's über die räumliche Lage der Atome im Molekül direct angeknüpft haben.

Die Kekulé'schen Ideen haben der Chemie einen unerhörten Impuls gegeben. Sobald sich klare Vorstellungen über den innern Bau der Kohlenstoffverbindungen entwickelt hatten, war auch der Weg gezeigt zu ihrer künstlichen Herstellung. Es mußte sich nun herausstellen, ob gerade die von der Theorie vorhergesehenen Atomcombinationen sich verwirklichen ließen, nicht mehr und nicht weniger. Kekulé hat die Augen schließen können mit dem stolzen Bewußtsein, daß seine Theorie nirgends irre geführt hat. daß sie die Bahn frei gelegt hat für ungezählte Entdeckungen, Er hat gewissermaßen den Eingang geöffnet zu einer Schatzkammer, in die Tausende und Abertausende eingedrungen sind und noch eindringen, um die ruhenden Schätze zu heben.

Die Anerkennung für seine Leistungen ist Kekulé nicht versagt geblieben. Er war ausgezeichnet durch die Mitgliedschaft der meisten europäischen Academien, die Verleihung der Copley und Huygens Medaille, des bayr. Maximilian Ordens für Kunst und Wissenschaft, des preußischen Ordens pour le mérite und was der Ehren mehr sind.

Mit besonderer Genugthuung darf man aber auch verzeichnen, daß Kekulé's Verdienste voll gewürdigt sind von der chemischen Großindustrie. Es gereicht den Vertretern dieser Industrie, der Deutschland einen so erheblichen Zuwachs seines Nationalwohlstandes verdankt, zur Ehre und spricht für ihren reifen und einsichtsvollen Sinn, daß sie sich immer an erster Stelle befunden

Digitized by Google

haben, wenn es galt, den Mann zu ehren, der nie einen neuen Farbstoff oder ein Heilmittel oder sonst ein industriell verwerthbares Product dargestellt, der der Versuchung völlig widerstanden hat, zu technischen Unternehmungen in irgend welche directen Beziehungen zu treten. Die Techniker haben eben wohl verstanden, daß Kekulé's Geistesarbeit den Aufschwung auch der chemischen Praxis ermöglicht, jedenfalls auf das Wesentlichste gefördert hat. Und Männer der Praxis sind es gewesen, die veranlaßten, daß des großen Theoretikers geistvolle Züge von Künstlerhand fixirt wurden und die dann sein Bild der Nationalgallerie zuwiesen, um das Andenken an seine Persönlichkeit der Nation zu erhalten.

Die Arbeit der nächsten Generationen wird — wir wollen es hoffen und dürfen es erwarten — über die Lebensarbeit Kekulé's und seiner Schule hinauswachsen. Auch die Structurchemie — soviel ihr auch noch in der Gegenwart zu leisten geblieben ist — wird sich ausleben. Neue Ziele winken schon jetzt der chemischen Jugend und nur auf neuen Bahnen wird großer Fortschritt sich einstellen können. Aber in den Annalen der Wissenschaft wird der Name Kekulé sicherlich unvergeßlich eingeschrieben bleiben als eines jener Männer, welche der Chemie zu ihrer vollsten Entwickelung verholfen haben.

Digitized by Google

Die Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften hielt am 13. November die in den Statuten vorgeschriebene öffentliche Sitzung zur Erinnerung an ihren Stifter, König Georg II., ab.

Herr Fr. Merkel las folgende Rede.

Digitized by Google

Der in diese Tage fallende Geburtstag des Stifters der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften kann nicht besser begangen werden, als durch einen wissenschaftlichen Vortrag, welcher eine Frage von allgemeinem Interesse behandelt; denn mit seiner Stiftung wollte er eine Stätte ins Leben rufen, welche den Gelehrten unserer stillen Stadt Gelegenheit giebt, in edlem Wettstreit zu forschen und die Ergebnisse wissenschaftlicher Untersuchungen Gleichstrebenden bekannt zu geben. Wenn daher die Mitglieder der Gesellschaft zu ihren Sitzungen versammelt waren, haben sie unbekümmert um die draußen wehenden Stürme des Lebens bis heute nur die reine Wissenschaft gepflegt. Niemals wurde und wird in erster Linie gefragt: wozu ist eine Untersuchung nütze?, wozu kann man ihre Ergebnisse praktisch verwerthen? Wir leben hier nur der Forschung an sich; hat man die Wahrheit erst erkannt, dann bietet sie von selbst ihre Früchte, welche nun ungesucht und ausgereift der Welt in den Schooß fallen. So will auch das, was ich mir vorgenommen habe, Ihnen heute zu sagen, nur eine besonders interessante Frage der Naturforschung beleuchten, soweit es in einer kurzen Stunde möglich ist, die Frage:

Welche Kräfte wirken gestaltend auf den Körper der Thiere.

Ich werde mich dabei meinem Specialfach gemäß vornehmlich an die Wirbelthiere und den Menschen halten. Hoffentlich gelingt es mir, auch meinen nicht-naturwissenschaftlichen Zuhörern einigermaßen verständlich zu werden!

Digitized by Google

Man muß annehmen, daß sich die belebte Natur aus einfachsten Anfängen zu immer complicirteren und vollkommeneren Gestaltungen entwickelt hat und noch entwickelt. So lange eine Thierart unter äußeren und inneren Bedingungen lebt, welche ihr in jeder Weise zusagen, sind Gründe, die zu einer gewichtigeren Aenderung ihrer Organisation führen könnten, nicht vorhanden und es vererbt sich ihr Bau unverändert von Generation zu Generation fort, wenn schon die den Lebewesen innewohnende Variationsthätigkeit niemals völlig ruht und es bewirkt, daß ein Individuum dem andern derselben Art niemals in allen Stücken genau gleicht. Aendern sich aber die Lebensbedingungen soweit, daß sie in irgend einer Weise bedrohlich werden, dann müssen sich die Thierarten denselben entweder durch Entfaltung und energische Bethätigung ihrer Variationsfähigkeit soweit anpassen, daß ihre Existenzmöglichkeit erhalten bleibt, oder sie sind dem Untergange verfallen. Durch das Wechselspiel des conservativen Princips der Vererbung und des reformatorischen der Variation erklärt sich einerseits der unendliche Formenreichthum der Thier- und Pflanzenwelt, anderseits begreift man, daß es Arten giebt, welche seit ungemessenen Zeiträumen ihre alte Organisation beibehalten haben. — Mit einem solchen Gedankengang hat uns vornehmlich Darwin vertraut gemacht; er bildet einen Theil der bekannten von diesem Gelehrten aufgestellten Theorie. So durchsichtig danach die Sache aussieht, so möchte ich doch glauben, daß die Begriffe: Erblichkeit und Variabilität noch nicht erschöpfend genug sind. Es will mir scheinen, als könnten wir an der Hand der heute zur Verfügung stehenden Einzelkenntnisse noch weiter im Verständniß vordringen, was ich versuchen will, im Folgenden auszuführen.

Wir beginnen damit uns umzusehen, ob wir vielleicht schon in unserer unmittelbaren Umgebung Kräften begegnen, welche einen Einfluß auf die Gestaltung des Thierkörpers ausüben, und finden sogleich, daß unser eigner Körper solchen Einflüssen unterliegt. Können wir doch willkürlich und durch äußere Einwirkung Veränderungen desselben erzielen. So liebt es zum Beispiel bei uns bekanntlich das weibliche Geschlecht, die Natur durch das Schnüren zu verbessern; bei anderen Völkern ist es Mode, durch Binden oder Brettchen die Schädelform zu verändern, wieder andere bringen die Füße in eine Form, welche ihnen mehr zusagt, als die von der Natur gebildete. Neben solchen durch den Willen des Einzelnen gesetzten Veränderungen kommen auch überaus häufig nicht gewollte vor, wie z. B. die durch gewerbliche Thätigkeit

Digitized by Google

hervorgerufenen, welche einer habituellen übermäßigen Inanspruchnahme einzelner Körpertheile zuzuschreiben sind. Kennt doch Jedermann die Bäckerbeine und die Kellnerplattfüße. Auch rein physiologische Umwandlungen der Art werden beobachtet. Beim Neugeborenen ist die schlangenförmige Biegung, welche die Wirbelsäule des Erwachsenen zeigt, noch nicht vorhanden, sie entsteht erst, wenn sich das Kind aufrichtet und auf die Erhaltung des Gleichgewichtes bedacht sein muß; ohne die nach vorn convexen Krümmungen der Wirbelsäule an Hals und Bauch würde der Körper vorne übersinken. Bekommt die Wirbelsäule an einer Stelle eine pathologische Krümmung, dann nehmen die anderen Theile sofort eine compensatorische Kurve an, wie sie die Statik verlangt. In die gleiche Kategorie gehört die Thatsache, daß die in der Anlage symmetrische Form der Leber durch die Nahrungsaufnahme verändert wird. Der mit Nahrungsmitteln gefüllte Magen drückt von links her auf das Organ und bringt es dort zum Schwund. Es ließen sich auch allerlei Verschiebungen aufzählen, welche im Lauf des Wachsthums durch die Wirkung mächtigerer und selbstständigerer Organe auf schwächere und unselbstständigere entstehen. Ganz besonders augenfällig ist es, daß oft Geschwülste und dergleichen auf die gesunde Umgebung einen stark modificirenden Einfluß ausüben können.

All das Angeführte erklärt sich aus grob mechanischen Kräften, aus den Einwirkungen der Belastung, des Druckes und Zuges auf die Theile des Körpers. Nächst dem ist es eine hervorragend wichtige Eigenschaft der Körpertheile, daß sie bei starker Inanspruchnahme sich verstärken und vergrößern, bei aufgehobener Thätigkeit aber schwächer und kümmerlicher werden, kurz gesagt, daß sie die Fähigkeit besitzen, zu hypertrophiren und zu atrophiren. Ich erinnere nur an die Muskeln, von welchen Jedermann weiß, daß sie durch Uebung anschwellen. Auch die Schwielen der Hände sind für die Hypertrophie ein allbekannter Beweis; sie entstehen da, wo man sie braucht. Ein Geiger hat sie an den Fingerspitzen, ein Turner an der Grenze zwischen Fingern und Hohlhand und wenn ein hart arbeitender Matrose die Hand giebt, fühlt sie sich förmlich wie Holz an, weil die ganze innere Oberfläche zu einer einzigen Schwiele geworden ist. Auf der anderen Seite können die Muskeln in hohem Grade atrophisch werden, was man an einem Gliede beobachtet, bei dem durch ein steifes Gelenk die Muskelthätigkeit ausgeschlossen ist. Ja man sieht schon in den kurzen Wochen, in welchen eine Extremität nach einer Fraktur im Gypsverband liegt, die Muskeln in sehr bemerkenswerther Weise

Digitized by Google

schwinden. Wir sind auch bei diesen Vorgängen sehr wohl im Stande, den Grund einzusehen, liegt es ja schon in dem Wort hyper- und atrophisch, daß man an die gute und schlechte Ernährung der Körpertheile zu denken hat. Auf Reize pflegen diese meist durch vermehrten Blutzufluß und Säftestrom zu antworten, welcher seinerseits durch die Reizung der Gefäßnerven herbeigeführt wird. Nehme ich als Beispiel das Entstehen einer Schwiele. — Man rudert und findet, daß am Schlusse der Uebung die Innenfläche der Hände geröthet ist, besonders stark an Stelle der späteren Schwiele, weil diese Stelle ihrer Lage nach am stärksten gedrückt und gereizt worden ist. Die Zellen der Oberhaut werden durch den lebhaften Blutzufluß üppig ernährt und vermehren sich deshalb in der Tiefe schneller, als sie sich an der Oberfläche abstoßen. Sie schichten sich übereinander und die Schwiele ist da. Ein Beweis für die Richtigkeit dieser Erklärung liegt in der Beobachtung dessen, was vorgeht, wenn man die als Beispiel gewählte Thätigkeit übertreibt. Rudert man zu lange oder zu stark, dann veranlaßt man einen zu ausgiebigen Säftestrom nach der Oberhaut, die Zellen können die zugeführte Flüssigkeit nicht mehr bewältigen, sie werden durch sie auseinandergetrieben und es entsteht eine mit der Flüssigkeit gefüllte Blase. Sind aber durch geordnete Thätigkeit Schwielen stark und dick geworden, dann schützen sie wieder die unterliegenden Theile vor einem zu starken Druck und die Blutzufuhr vermindert sich soweit, daß die Schwiele stationär bleibt. Das gewählte Beispiel zeigt zugleich, daß die den Körper zusammensetzenden Gebilde in steter Wechselwirkung auf einander begriffen sind, daß sie regulatorisch und harmonisch in einander greifen, wie das wohlgeordnete Räderwerk einer Maschine und es ist klar, daß ein großer Theil der Uebung, Gewöhnung und Trainirung auf trophischen Vorgängen beruht. Ein Beweis dafür ist es, daß beim Uebertreiben der Körperübungen gerade das Herz leidet, das heißt der Centralpunkt der ernährenden Circulation.

Grob mechanische und trophische Vorgänge sind es, welche nach dem bis jetzt Gesagten ihren Einfluß auf den Körper auszuüben vermögen und betrachtet man die Sache genauer, dann kann man sogar nach vielen Seiten die ersteren Einflüsse noch einschränken und kann sagen, daß auch bei den mechanischen Einwirkungen in letzter Linie gar häufig trophische Effecte den Ausschlag geben, denn um die Veränderung eines Körpertheiles zu einer dauernden zu machen, ist es immer nöthig, daß sich seine Ernährungsverhältnisse modificiren, da nur durch sie eine Ver-

Digitized by Google

größerung oder Verkleinerung, eine Stärkung und eine Schwächung herbeigeführt werden kann.

Es wird Ihnen zweifellos auffallen, daß der Ausschlag, welchen die beschriebenen Einwirkungen geben, ein sehr geringer ist und daß durch sie der Körper in seiner Form nur recht wenig modificirt wird. Ganz natürlich! Denn bisher war nur vom fertigen Organismus die Rede, dieser aber ist in gewisser Weise erstarrt und läßt sich durch kein Mittel mehr in neue Formen gießen. Der Thon, aus welchem die Figur gebildet wurde, ist getrocknet; will man an ihr tiefer greifende Aenderungen anbringen, dann muß man dies früher thun, solange das Material noch weich und bildsam ist. Zu einer Zeit, in welcher alles im Werden begriffen ist, können die mechanischen und trophischen Einflüsse einen ganz anderen Ausschlag geben. Im Anfang ihrer Entwicklung stellen Muskelcomplexe, wie z. B. die Kaumuskeln und die Augenmuskeln kleine solide Knospen dar; nun verbinden sie sich mit der Umgebung und da diese im Lauf der Zeit Platz und Gestalt ändert, so werden die einzelnen Muskelpartieen hierhin und dorthin gezogen, so daß schließlich aus dem erst einfachen Complex auf rein mechanischem Wege einzelne Muskelindividuen werden, welche eine ganz verschiedene Faserrichtung und Funktion haben. Ein anderes Beispiel sind Nerven, welche durch Blutgefäße, die ihren Verlauf kreuzen, so verbogen und verzogen werden, daß sie ihre ursprüngliche Richtung ändern und gezwungen werden, geradezu hakenförmige Biegungen anzunehmen. Auf rein mechanische Weise erklärt sich auch die Form des weiblichen Beckens durch den Druck der Eingeweide, welcher auf demselben lastet.

Je weiter man zurückgeht, je näher man dem Anfang der Entwickelung kommt, um so einschneidender werden mechanische und trophische Einwirkungen. So hat Roux zu der Zeit, in welcher sich das Froschei in zwei Zellen getheilt hat, die eine mit einer erhitzten Nadel durchstochen und getödtet. Er hinderte dadurch die überlebende Zelle an einer ungestörten Entfaltung und brachte es dahin, daß dieselbe nur einen halben Embryonalkörper bildete, welcher erst im Lauf der Weiterentwickelung allmählich in das Gebiet der todten Zelle vordrang und sich unter Aufnahme des in ihr enthaltenen Nahrungstoffes zu einem ganzen Embryo completirte. O. Schulze konnte durch Aufhebung der Wirkung der Schwerkraft Froscheiern eine anomale Entwickelung aufzwingen, dasselbe gelang Dareste an Hühnereiern, welche er in fremdartige statische Verhältnisse gebracht hatte. Einen wie großen Einfluß die Ernährung in jenen ersten Zeiten hat, dies zeigen Experi-

Digitized by Google

mente von L. Gerlach. Derselbe schloß von Hühnereiern, die in der Entwickelung begriffen waren, den für die regelmäßige Ernährung so überaus wichtigen Sauerstoff zu einem großen Theil ab, indem er die Eischaale bis auf eine kleine freigelassene Stelle mit Firniß überzog; er erzielte dadurch vollkommen abnorme Keime. Auch ungleichmäßige oder abnorme Temperaturen haben einen so eingreifenden Einfluß auf die Ernährung, daß sie Mißbildungen hervorrufen können. Man kann also nach dem allen wohl die allgemeine Behauptung aufstellen, daß die erwähnten physikalischen Kräfte von höchster Wichtigkeit für die normale Ausbildung eines Geschöpfes sind. Druck, Zug, Schwerkraft, Wärme aber sind es nicht allein, welche tiefgreifende Wirkungen ausüben, sondern auch andere vorhin nicht mit Beispielen belegte physikalische Kräfte, wie Elasticität, Kohäsionskraft, neben der Wärme auch das Licht; besonders sind es auch chemische Umsetzungen, welche bei den trophischen Vorgängen eine ausschlaggebende Rolle spielen.

Viele Gelehrte sind nun der Ansicht, daß die Thätigkeit dieser physikalisch-chemischen Kräfte, welche von außen her auf den Körper und im Inneren von dessen Bauelementen wirken, genügen, um die Gestaltungen der belebten Welt zu erklären, denn es sind natürlich nicht nur die erwähnten Beobachtungen und Versuche mit ihren handgreiflichen Resultaten angestellt worden, sondern noch unendlich viele andere von feinster Art, welche alle die Wirkungen jener Kräfte erläutern und auf Tritt und Schritt in den kleinsten Theilen der Organismen erkennen lassen.

Sollen sie es aber allein sein, welche die Formen der organischen Welt hervorrufen, dann müssen diese Formen auch im Einzelfalle mit mathematischer Nothwendigkeit neben einander bestehen, auseinander hervorgehen und auf einander folgen, etwa so, wie man den Ausfall einer chemischen Reaction vorhersagen, oder beim Bau einer Maschine berechnen kann, wie sie später arbeiten soll. Ein Hühnerei z. B. müsste in jedem Stadium seiner Entwickelung einem anderen, gleich weit entwickelten in allen Stücken gleichen. Dies ist aber nicht der Fall, was durch eine lange Reihe von Beobachtungen erwiesen wird. Mehnert kommt am Schluß einer verdienstlichen Zusammenstellung zu dem Ausspruch: „Eine konstante Wechselbeziehung der Organentwickelung bei gleichen Embryonen besteht nicht. Der oft eklatante Mangel an Korrelationen der Organentwickelungen unter einander zeigt, daß ein jeder Entwickelungsvorgang eines Organes gewissermaßen ein selbstständiger Proceß ist. Die Entwickelung des Wirbelthierembryo besteht in einer Reihe neben einander

Digitized by Google

— nur durch phylogenetische Beziehungen geregelter — Einzelvorgänge. Bloß die Form und Lage eines einzelnen Organs kann durch die Umgebungsverhältnisse modificirt werden.“ Nicht einmal der letzte Satz braucht zuzutreffen, was zahlreiche teratologische Beobachtungen ergeben.

Wenn auch His in mehreren Abhandlungen darlegte, daß man die Formen, welche z. B. der Keim eines bebrüteten Hühnereies zeigt, mit gefalteten Lederstücken, mit Thon- oder Wachsplatten von ungleicher Dicke, auf welche mechanische Kräfte wirken, nachahmen kann, so zeigen anderseits Beobachtungen von Bonnet, Keibel, Fischel, daß die Schwankungen in der Ausbildung und Größe gewisser Organe bei gleichaltrigen Embryonen außerordentliche und bedeutende sind. Es sind da Widersprüche vorhanden, welche sich in ganz einfacher Weise nicht lösen lassen. Denn wenn Dinge, welche an sich einer einfachen mechanischen Erklärung zugänglich wären, vor sich gehen, ohne daß die mechanischen Prämissen gegeben sind, dann müssen wir nach anderen Kräften suchen, welche unser Verständniß fördern. Dieselben können nur innere, den Körpergebilden immanente sein, da sich die von außen wirkenden wie gesagt, als unzulänglich für eine Erklärung erweisen.

Bei ihrer Aufsuchung zögern wir nicht, uns sogleich an die letzte funktionelle Einheit des Körpers von Thier und Pflanze, zu wenden, da wir dort am ersten Aufschluß erwarten dürfen. Wir haben als diese Einheit ein kleines von einem Kern beherrschtes Stückchen Protoplasma (Körpereiweiß) anzusehen. Meist begnügt man sich, dasselbe Zelle zu nennen, doch ist Sachs völlig im Recht, wenn er sagt, daß die Zelle noch allerlei andere Dinge enthält oder doch enthalten kann, welche für die Lebensthätigkeiten irrelevant sind z. B. Fett oder Schleim oder Pigment und dergl. mehr. Er nennt daher das eigentlich functionirende Gebilde „Energide.“ Daß es erlaubt und geboten ist, sogleich auf diese Elementargebilde zurückzugehen, wird dadurch bewiesen, daß eine einzige Zelle im Stande ist, alle Lebensthätigkeiten zu entfalten; giebt es doch Lebewesen in großer Zahl, welche nur aus einer einzigen Zelle bestehen. Freilich setzt sich der Körper einer mindestens ebenso großen Zahl von Thieren und Pflanzen aus einer Anzahl von Zellen zusammen, welche nach Tausenden, nach Millionen und nach noch viel größeren Mengen zählen kann. Es wird nun eine zu erledigende Vorfrage sein, ob man in deren Zahl Unterabtheilungen zu machen hat, oder ob wir jeder Zellenergide die gleichen Grundfähigkeiten und -Eigenschaften zu-

Digitized by Google

schreiben dürfen? — Jedes mehrzellige Geschöpf, es mag aus so vielen Einzelzellen bestehen, wie es will, entsteht bei seiner Entwickelung aus einer einzigen Zelle, welche sich fort und fort theilt und bei jeder Theilung je eine Hälfte ihrer ganzen Substanz, ihres Kernes sowohl wie ihres Protoplasmas, an die beiden Tochterzellen abgiebt. Damit werden nothwendig die Kräfte und Eigenschaften der ursprünglichen Zelle an die Tochterzellen übertragen, so daß also virtute jede Zelle des ganzen Körpers der ursprünglichen befruchteten Eizelle gleich ist, von welcher sie in letzter Linie sämmtlich herstammen. Will man consequent sein, dann muß man jeder Zelle des Körpers die Fähigkeit zuerkennen, gegebenen Falles aus sich heraus einen neuen Organismus zu bilden. Daß dies nicht etwa in der Luft stehende Erwägungen sind, wird durch Experimente an sich entwickelnden Eizellen bewiesen. Die ursprünglich einfache Zelle theilt sich zuerst in zwei Zellen, deren jede wieder in zwei, in Summa also vier, aus diesen werden acht Zellen und so fort. Versucht man nun im Zwei- oder Vierzellenstadium die einzelnen Zellen von einander zu trennen, was bei niederen Thieren gelingt, dann sieht man in der That, wie jede Zelle für sich einen ganzen Embryo bildet, welcher sich von einem aus dem unversehrten Ei hervorgegangenen nur durch seine geringere Größe unterscheidet. Ferner findet man, daß — besonders im Pflanzenreiche — oft kleine Bruchstücke im Stande sind, sich zu wohl ausgebildeten Individuum zu regeneriren, was also beweist, daß diesen Bruchstücken ganz dieselbe Fähigkeit innewohnt, ein vollständiges Individuen zu bilden, wie der Eizelle. Bei niederen Thieren wird Aehnliches beobachtet. Daß bei höheren Thieren die Fähigkeit der Neubildung größerer Theile des Körpers sehr eingeschränkt ist, hat man nicht etwa so zu erklären, daß hier die Körperzellen die Eigenschaften der ursprünglichen befruchteten Eizelle gar nicht besessen hätten, sondern man muß vielmehr annehmen, daß in den hochdifferenzirten Geweben dieser Geschöpfe Umstände geschaffen worden sind, welche die Zellen *verhindern*, ihre ursprünglich vorhandenen und noch immer anwesenden Kräfte voll zu entfalten. Sieht man doch in pathologischen Fällen auch hier die Lebens- und Gestaltungskraft der Gewebe in oft ungeahnter Weise wieder aufleben.

Welches sind nun diese fundamentalen Kräfte des Lebens? Bei einer eingehenden analytischen Betrachtung bleiben ihrer nur zwei übrig: erstens eine *vegetative Kraft*, und zweitens eine *formative Kraft*, wie ich die beiden nennen will.

Die *vegetative Kraft* ist diejenige, welche das Leben an

Digitized by Google

sich aufrecht erhält, sie dient dem Stoffwechsel, sie ist es, welche das Wachsthum der Zellen, ihre Vermehrung besorgt, welche die Arbeitsleistung der Zellen in Scene setzt, ihr wohnt die Reizbarkeit inne und sie ist ganz wesentlich auf den Verkehr mit der Außenwelt angewiesen.

Die formative Kraft ist diejenige, welche die Gestaltung der lebenden Materie besorgt. In ihrer einfachen Aeußerung bildet sie die Gewebe des Körpers, in ihrer höheren Funktion ruft sie durch harmonisches Zusammenwirken der einzelnen Zellen die Organe, überhaupt die ganze Körperform hervor. Sie verkehrt mit der Außenwelt im wesentlichen nur durch Vermittelung der vegetativen Kraft.

Jede Zellenergide lebt und arbeitet, jede trägt in sich „das Muster des ganzen Organismus und besitzt die theilweise oder vollständige Fähigkeit das Muster wieder hervorzubringen“ (Minot).

Auf den ersten Blick könnte es schwierig scheinen, die beiden Kräfte, an denen das Leben hängt, überhaupt von einander zu trennen, denn die Bildung und Aufrechterhaltung der Körperform ist doch ohne vegetatives Leben, also ohne Wachsthum, ohne Zellvermehrung und Zellarbeit undenkbar. Dies ist gewiß richtig, wohl aber giebt es Fälle, in welchen man umgekehrt vegetatives Leben ohne geordnete Bildung finden kann. Es giebt Geschwülste, welche eine äußerst üppige Vegetationskraft entfalten, welche wachsen und immer weiter sich verbreiten, ohne daß doch eine irgendwie geordnete Form entsteht. In ihnen muß nothwendig die formative Kraft durch abnorme Einflüsse unterdrückt sein, so daß die vegetative Kraft des Protoplasmas sich ungezügelt entfalten kann. In anderen pathologischen Neubildungen geht die Unterdrückung der formativen Kraft nicht so weit, es kommt wohl zur Entwickelung von Geweben, von Bindegewebe, Drüsengewebe, Nervengewebe u. s. w., aber nicht zu geordneten Organbildungen. In einer dritten Gruppe ist der störende Einfluß noch geringer, in diesen Fällen, wie z. B. bei der Akromegalie, ist die formative Kraft im Stande, ihre Thätigkeit im Ganzen zu entfalten, die vegetative Kraft ist nur so mächtig geworden, daß sie die betroffenen im Uebrigen wohlorganisirten Körpertheile immer größer und größer werden läßt. Ueberhaupt spielt in allen hypertrophischen und atrophischen Zuständen die vegetative Kraft eine bestimmende Rolle, während dabei die formative in mehr indifferenter Weise nebenhergeht.

In welch' außerordentlicher Weise sich anderseits die formative Kraft geltend machen kann, beweisen die erwähnten Beob-

Digitized by Google

achtungen über Regeneration von Körpertheilen, ja ganzen Individuen aus kleinen Theilstücken. Daß auch sie relativ unabhängig von der vegetativen Kraft wirken kann, erweisen die Beobachtungen der nicht selten vorkommenden Asymmetrien. Stets sucht bei diesen die formative Kraft, ohne daß eine Aenderung in der Ernährung vorhanden zu sein braucht, auszugleichen und zu compensiren, wo es nur irgend möglich ist. Man beobachtet dies auch in Fällen, in welchen man an eine corrigirende Wirkung äußerer Kräfte nicht wohl denken kann.

Von den beiden Kräften ist die formative im Allgemeinen die stärkere, welche die vegetative in ihre Dienste zwingt, welche das Wachsthum und die Vermehrung der einzelnen Zelle und ganzer Zellkomplexe regulirt. Wehe dem Organismus, in welchem auch nur in einer einzigen Gruppe von Zellen die vegetative Kraft zu alleiniger Herrschaft kommt! die planlose Arbeit consumirt rasch und der ganze Organismus ist verloren.

Daß sich die beiden Kräfte des Protoplasmas bei der Arbeit im Einzelnen der gewöhnlichen physikalisch-chemischen Kräfte bedienen, um ihre Zwecke zu erreichen, versteht sich ganz von selbst und wir sehen ja, wie erwähnt, beim Wachsthum des Embryo's Effecte erzielt, welche sich in mechanischer Weise erklären lassen, man sieht das ganze Leben hindurch chemische Vorgänge wohlbekannter Natur sich abspielen. Diese Kräfte können dabei einen fördernden oder auch schädlichen Einfluß auf die beiden Grundkräfte ausüben, wovon die erwähnten Experimente an Frosch- und Hühnereiern den Beweis liefern.

Ich wiederhole also, daß von den beiden Grundkräften der lebenden Zellenergide die formative die stärkere und die eigentlich regierende ist und daß beide durch Einwirkungen physikalisch-chemischer Natur beeinflußt werden können. Am meisten und freiesten werden sich die Grundkräfte in solchen Zellenergiden vorfinden, welche am wenigsten solche Einwirkungen erlitten haben, welche am intactesten sind. Es sind dies die Generationszellen: Samen und Ei — und man sieht bei gewissen niederen Thieren, bei welchen die Verhältnisse besonders durchsichtig sind, wie gleich am Anfang der Entwickelung eines Individuums sich die Keimzellen, welche schon wieder für die nächste Generation bestimmt sind, separiren. Nußbaum, Weismann und andere meinen auch, daß nur diese Zellen die Keimfähigkeit beibehielten, während die anderen Zellen des Körpers (somatische Zellen) nur bestimmt seien, die Gewebe des Körpers zu bilden (Theorie der Continuität des Keimplasmas). Meine ganzen bisherigen Ausführungen thun dar, daß ich mich dieser An-

Digitized by Google

schauung nicht anzuschließen vermag. Wie rasch nach dem Eintritt in die Entwickelung sich die Einflüsse der Ernährung, der topographischen Lage und dergl. geltend machen, geht daraus hervor, daß ein Ei, welches noch im Vierzellenstadium im Stande war aus jeder einzelnen Zelle ein ganzes Individuum entstehen zu lassen, dies im Achtzellenstadium schon nicht mehr vermag. Je weiter sich die Zellen zu speciellen Zwecken ausbilden, um so mehr zeigt sich die formative Kraft „gebunden", was dadurch illustrirt wird, daß niedere Thiere mit wenig gesonderten Geweben und Organen in weit höherem Maaße die Fähigkeit haben, bei Verletzungen aus dem Vorhandenen Verlorengegangenes wieder zu ersetzen, wie höhere mit ihren fein ausgearbeiteten Körpergebilden. Aeußere Einflüsse, so will ich sie kurz nennen, können also die formative Kraft der Zellenergiden beeinflussen und sind in der Lage, wenn sie nur in geeigneter Weise einwirken, Modificationen der Gestalt und Organisation eines Geschöpfes hervorzurufen; und es ist klar: je unberührter die beiden Grundkräfte einer Zellenergide sind, um so nachhaltiger und maßgebender werden sich solche Einwirkungen äußern können. Wir sehen deshalb auch, daß sehr niederstehende Organismen nicht allein, wie schon erwähnt, besonders regenerationsfähig, sondern auch besonders modulationsfähig sind und daß bei höher stehenden die erste Zeit der Entwickelung die geeignetste ist, solchen äußeren Einflüssen eine weittragende Wirkung zu gestatten. Für eine Variirung der Körperform der einzelnen Individuen kommt noch ein weiterer wichtiger Faktor hinzu, welcher sich bis hinunter in die einfachsten Geschöpfe nachweisen läßt, nämlich der, daß für die Anregung der Entwickelung zwei Eltern nöthig sind, sei es daß dies für die jedesmalige Entstehung eines Einzelindividuums gilt, sei es daß durch deren Zusammenwirken jedesmal eine kürzere oder längere Reihe von Generationen hervorgerufen wird. Die Beschaffenheit der Energiden dieser beiden Eltern ist aber niemals völlig gleich; wenn sich dieselben nun in dem neu keimenden Organismus mischen, dann bewirken sie in den Theilen, in welchen die Grundkräfte gleich gerichtet sind, eine Verstärkung ihrer Gestaltung und Eigenschaften bei dem Nachkommen, oder sie bringen da, wo die formative Kraft des einen Erzeugers siegt, die des andern unterliegt, größere oder kleinere Variationen hervor. Nun muß man sich aber klar machen, daß es sich jedesmal nicht blos um die Erbschaft der beiden Eltern handelt, sondern auch um die Erbschaften all der Generationen, die diesen vorausgegangen sind. Man kann sich die Sache etwa unter folgendem Bild vorstellen: Die formative Kraft der einzelnen Ahnen eines Geschöpfes gleicht

Digitized by Google

kleinen Quellen, welche von allen Seiten zusammen kommen; sie sind so schwach, daß geringe Störungen genügen, um eine einzelne derselben zu verstopfen und verloren gehen zu lassen. Haben sich aber ihrer viele in gleich gerichtetem Lauf zu einem größeren und immer größeren Fluß gesammelt, dann ist an eine Abdämmung nicht mehr zu denken. Von allen Seiten kommen vielleicht neue Nebenflüsse dazu, während vom ursprünglichen Wasser ein Theil versickert oder verdunstet und ganz verschwindet. Stellt man sich die Sache so vor, dann kann man sich auch erklären, wie oft der Enkel weniger dem Vater als dem Großvater gleicht und wie gelegentlich die Eigenschaften und Formen weit zurückliegender Geschlechter in einem Nachkommen wieder auftauchen (Rückschlag.) Es braucht nur eine geringe Beimischung in dem Strom der formativen Kraft, welche sonst ohne Einfluß nebenher läuft, durch günstige Nebenbedingungen veranlaßt, wieder stärker hervorzutreten. Ein Beispiel mag zeigen, wie etwa die Umwandlung einer Thierspecies vor sich gegangen sein mag. Ein Thier sucht sich seine Nahrung in der Erde und gräbt zu diesem Zweck mit den vorderen Extremitäten emsig. Die Palmarfläche wird schwielig, die ganze Hand durch trophische und mechanische Reize breit und plump, wie bei einem Handarbeiter. Die formative Kraft wird im Einzelfall kaum merklich beeinflußt. Nun geschieht aber durch viele Generationen hindurch immer das gleiche, die kleinen Quellen der Einzelfälle wachsen zum Fluß heran, die formative Kraft ist durch cumulirte Vererbung von den Ahnen beider Seiten her soweit modificirt und einseitig verstärkt, daß sie nun bei jedem neuen Individuum ohne Weiteres schaufelförmige Vorderfüße erzeugt. Da diese aber integrirende Theile des Körpers sind und diese letzteren wieder sich gegenseitig beeinflußen, und in ihrer Bildung harmonisch in einander greifen, wie das Räderwerk einer Maschine, so ist allmählig das Armskelet, sind die Muskeln der Thätigkeit angepaßt und das Thier kann seine Vorderextremitäten zuletzt kaum mehr zu etwas anderem brauchen, wie zum Graben. Es hat deshalb seine Thätigkeit ganz in den schützenden Boden hinein verlegt und lebt in Gängen, in welche niemals das Licht des Tages scheint. Die Augen werden nicht mehr gebraucht, sie atrophiren im Wechsel der Generationen und bilden zuletzt kleine kaum stecknadelkopfgroße Organe, welche nur äußerst unvollkommen — wenn überhaupt — funktioniren. Die kleinen Quellen waren immer spärlicher und spärlicher geflossen, und der ursprüngliche Antheil an dem Fluße versickert mehr und mehr; man glaubt den Zeitpunkt schon absehen zu können in welchem er ganz verschwunden sein

Digitized by Google

wird. Sie werden erraten haben, daß mein Beispiel vom Maulwurf genommen ist, bei welchem wir die formbildende Kraft durch die äußeren Einflüsse des Gebrauches und der Ernährung an dem einen Organ verstärkt, an dem anderen geschwächt sehen.

Diese äußeren Einflüsse müssen aber so langsam und allmählig wirken, wie in dem angezogenen Fall. Es muß der formativen Kraft Zeit gelassen werden, sich ganz allmählig an die geänderten Verhältnisse zu gewöhnen. Will man sie brüskiren, dann wird dies stets mißlingen. Noch niemals ist bei uns Europäern ein Kind mit der Wespentaille vieler erwachsener Frauen, bei den Chinesen ein solches mit den verkrüppelten Füßen der dortigen Frauen geboren, niemals kommt ein normaler Knabe mit der Anlage zu kurzem Haarwachsthum zur Welt, trotzdem daß sich die Männer immer und immer wieder die Haare abschneiden. Man sieht daß alle Beharrlichkeit bei einem fertig ausgebildeten Organismus nicht ausreicht, auch wenn sie Jahrhunderte und Jahrtausende anhält.

Eine recht interessante Frage, welche nach der Kenntnißnahme von den beiden Zellkräften sofort auftauchen muß, ist die: Wo finden sich dieselben localisirt? Durchdringen sie die Energide ganz und gar, oder müssen wir sie an eine bestimmte Stelle derselben verlegen. Sachs denkt daran, daß die formative Kraft, (seine Gestaltungsenergie) in das Chromatin, eine gewöhnlich im Zellkern gelegene Protoplasmamodification zu verlegen sei. Eine solche Annahme scheint eine gewisse Berechtigung zu haben; denn erstens sieht man, daß der Vater zur Bildung des Nachkommen fast nur Chromatin beisteuert und zweitens weiß man, daß Protoplasma, welches von dem Kern getrennt wird, die Fähigkeit jeder Weiterentwickelung einbüßt. Letztere Thatsache ist kein zwingender Grund, denn umgekehrt sterben auch Kerne, welche man ganz von Protoplasma entblößt, ab. Gerade so wenig wie das Herz ohne Körper und der Körper ohne Herz existiren kann, so ist es auch im Kleinen in der Zelle; Kern und Protoplasma gehören eben zusammen. Aber auch der erstere Grund ist nicht stichhaltig, das Spermatosoma ist als solches überhaupt nicht entwickelungsfähig, in ihm ist die Substanz der Zelle auf das kleinst mögliche Maaß reducirt, gewissermaßen eingedickt, und es muß immer erst durch Completirung von den Reservestoffen des Eies her ergänzt werden, ehe es in die Entwickelungsthätigkeit eintreten kann. Ich möchte die Meinung vertreten, daß die oft so complicirten Zellstructuren secundären Zwecken dienen, während die beiden Grundkräfte gleichmäßig die ganze Masse der Energide durchdringen und auch in jedes neue Theilchen, welches bei der

Digitized by Google

Stoffaufnahme hinzukommt, eindringen wie ein Ferment. Man kann wohl kaum zu einer anderen Annahme kommen, denn jedes kleinste Theilchen der Energide vegetirt, hat seinen Stoffumsatz und versucht weiter zu wachsen. Jedes Theilchen muß auch formative Kraft und zwar dieselbe, wie jedes andere besitzen, da bei der geordneten und harmonischen, auf ein Ziel gerichteten Thätigkeit großer Zellkomplexe, ja sämmtlicher Organe des Körpers, jede Zelle in allen ihren Theilen das ihrige zur Erzielung des gemeinsamen Endresultates thun muß. Ein Beweis für die gleichmäßige Verbreitung der in Rede stehenden Kräfte scheint mir auch in der Erblichkeit erworbener Mißbildungen zu liegen. Ein Mensch, dessen Vorfahren ganz wohlgebildet waren, wird z. B. mit sechs Fingern an jeder Hand geboren, es hat also die formative Kraft eine Störung erlitten zu der Zeit, in welcher sich die Hände bildeten. Würde nun nicht diese modificirte Kraft alle Energiden gleichmäßig durchdringen, auch die Generationszellen, aus welchen sich die Nachkommen entwickeln sollen, dann könnte man nicht verstehen, wie diese letzteren wieder sechsfingerig würden, und wie sich eine derartige Mißbildung hartnäckig oft viele Generationen hindurch erhält, bis sie endlich durch die Einwirkung der Einheirathung normaler Leute allmählig besiegt wird und erlischt.

Wenn ich vorhin das Bild von einem Ferment gebraucht habe, so ist dies eben nur ein Bild, denn wir wissen in der That nicht, welcher Art die beiden Kräfte der lebenden Materie sind. Sachs denkt an eine eigenthümliche Bewegungsform der Moleküle des Protoplasmas, und wenn dies auch viel für sich hat, so kann es sich doch ebenso gut um etwas ganz anderes handeln. Trotz unserer Unkenntniß aber brauchen wir keineswegs jenes fatale „Ignorabimus!“ zu wiederholen, welches vor 25 Jahren ein resignirter Naturforscher ausrief. Ostwald hat in seiner Rede auf der Lübecker Naturforscherversammlung gezeigt, wie sehr jener Forscher im Unrecht war und ich hoffe von meinen Ausführungen, daß sie Ihnen gezeigt haben möchten, daß man vor dem Versuch in das Problem des Lebens einzudringen nicht zurückzuschrecken braucht, und daß man sich nicht zu resigniren hat, schon vor der Schwelle für immer zurückgewiesen zu werden. Daß wir diese Schwelle freilich noch nicht überschritten haben, dies verkennt gewiß Niemand, der sich mit diesen interessantesten und schwierigsten Kapiteln der Biologie jemals beschäftigt hat; dringen wir aber nur in ruhiger und umsichtiger Forschung weiter vor, dann wird es nicht fehlen!

Digitized by Google

Verzeichnis der neugewählten Mitglieder der Kgl. Gesellschaft.

Die Gesellschaft wählte zu ordentlichen Mitgliedern in der philologisch-historischen Klasse

am 1. Mai 1897

Herrn Georg Kaibel hier,

am 17. Juli 1897

Herrn Richard Pietschmann hier.

Die allerhöchste Bestätigung dieser Wahlen durch Seine Majestät den König erfolgte am 31. Mai und am 19. August 1897.

Am 17. Juli 1897 erwählte die Kgl. Gesellschaft zu korrespondirenden Mitgliedern

in der mathematisch-physikalischen Klasse

Herrn Wilhelm von Bezold in Berlin,

in der philologisch-historischen Klasse

Herrn Max Rieger in Darmstadt.

Digitized by Google

Ihrem auswärtigen Mitgliede, Herrn Theodor Mommsen in Charlottenburg sendete die Kgl. Gesellschaft zu seinem achtzigsten Geburtstage folgende Adresse:

Verehrter Herr College!

An dem Tage, da Nahe und Ferne mit festlichen Wünschen vor Ihnen erscheinen, dürfen wir nicht fern bleiben, die wir in mehr als einem Sinne das Recht haben Sie den Unseren zu nennen, Alle als den Genossen unsrer Gesellschaft, aber die Einzelnen aus eignem Gefühl, heiße es Bewunderung, Pietät, Freundschaft, Liebe. Nicht Glück zu wünschen kommen wir (was ließe sich der Summe Ihres Lebensglücks hinzu denken?), wir kommen zu gratuliren im römischen Sinne, das heißt Ihr Glück zu preisen und ein gutes Omen an Ihrem Geburtstagstische zu sprechen.

Wir reden nicht von Ihren Werken. Die Arbeit Ihres Lebens liegt vor den Augen der Welt. Wer sich mit Recht und Verfassung, Geschichte und Kultur der römischen Welt bis tief ins Mittelalter hinein befaßt, der weiß daß Sie seinem Weg die Richte geben; wenn er die Geschichte seiner Wissenschaft kennt, so weiß er daß Ihr Geist die Brücken gebaut und die Wege durch den Fels gebrochen hat, auf denen Philologie, Geschichte und Rechtsgeschichte sich begegnen und zur Einheit gelangen konnten. Nicht nur die Wissenschaft rühmt sich Ihrer Werke. Wenn einmal die Geschichte die Summe dessen ziehen wird, was dies halbe Jahrhundert für die deutsche Litteratur geleistet hat, so wird Ihr Name in vorderster Reihe stehn. Wie Ihr Geist so Ihre Hand. Für ein Jahrhundert liegt das Material bereit, zu dessen Bereitung Sie die Arbeit organisirt und wie Herakles unter den Sterblichen mitgearbeitet haben.

Nicht nur die Fülle Ihrer Thaten bedenken wir heut; mit ihnen verbunden ist die sittliche Kraft, deren Wirkung alle verspürt haben, die einmal gemeinsame Arbeit in Ihren Kreis geführt hat. Der Muth, der keiner Arbeit ausweicht, die Demuth, die

Digitized by Google

keine Arbeit verschmäht, der Fleiß, der keine halbe Arbeit kennt, die Pflichttreue, die zuerst sich selbst opfert, die Wahrheitsliebe, die nur durch Arbeit zum Ziele zu gelangen denkt — daß in den unscheinbaren Gelehrtentugenden die ganze Kraft und Gewähr der Forschung liegt, haben Unzählige aus Ihrem Beispiel gelernt und werden Unzählige aus Ihren Schriften lernen. Wie der römische Feldherr, der alle seine Schlachten gewonnen hatte und in allen zugleich sein tapferster Soldat gewesen war, so blicken Sie auf die lange Strecke durchlaufenen Weges zurück.

Sie sitzen nicht mit Ihren achtzig Jahren auf einem Ehrensessel der Wissenschaft und nicken mit ambrosischen Brauen. Die Hallen der Wissenschaft kennen Ihren Tritt wie vor vierzig Jahren und jede frisch herankommende Generation lernt ihn kennen. Sie halten gute Polizei in den Gebieten, über denen Sie walten, und Jahr um Jahr beleben Sie den Gang der Wissenschaft durch neue Werke, die das Leben eines Andern auszufüllen hinreichen könnten. Noch steht Ihnen die Sonne hoch und Historie und Philologie brauchen noch nicht die Zeit zu fürchten, da sie einmal ohne Ihre lebendig wirkende Gegenwart werden leben müssen. Möge die Zeit ferne und das kommende Jahrzehnt ein leuchtender Abend Ihres Lebens sein.

Göttingen, den 27. November 1897.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Digitized by Google

Preisaufgabe
der
Wedekindschen Preisstiftung
für Deutsche Geschichte.

Der Verwaltungsrath der Wedekindstiftung macht hierdurch wiederholt gemäß den Ordnungen der Stiftung vom 14. März 1896 § 12 die Aufgabe bekannt, die für den Zeitraum 1896—1901 unterm 14. März 1896 gestellt ist.

Der Verwaltungsrath verlangt:

eine archivalisch begründete Geschichte der innern Verwaltung des Kurfürstenthums Mainz unter Emmerich Joseph (1763—1774) und Friedrich Karl Joseph (1774—1802). Besonderer Werth wird auf die Ermittlung der Theilnahme von Johannes Müller gelegt.

1. **Form und Einsendung der Bewerbungsschriften.** Bewerbungsschriften müssen vor dem 1. August 1900 an den Direktor des Verwaltungsraths der Stiftung eingesandt werden und aller äußern Zeichen entbehren, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist ihr ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich befindet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

2. **Preisgericht.** Das Preisgericht besteht aus dem Verwaltungsrathe der Stiftung und sovielen von ihm aus den übrigen Angehörigen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, den ordentlichen, den auswärtigen Mitgliedern und den Correspondenten, hinzu erwählten anerkannt sachkundigen und unparteilichen Männern, daß die Gesammtzahl sieben ist. Die Mitglieder des Preisgerichts können nicht an der Bewerbung Theil nehmen. Die übrigen Mitglieder der Königlichen Gesellschaft dürfen sich wie jeder andere um den Preis bewerben.

Digitized by Google

3. **Urtheil.** Das Urtheil des Preisgerichts wird am 14. März 1901 in einer Sitzung der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften bekannt gemacht und in deren „Nachrichten" in der Abtheilung: Geschäftliche Mittheilungen veröffentlicht.

4. **Preis.** Der Preis beträgt 3300 Mark und muß ganz oder kann gar nicht zuerkannt werden. Ist der Verfasser der Preisschrift bereits verstorben, so fällt der Preis seinen Erben zu.

Der Verfasser der gekrönten Schrift oder dessen Erben werden noch besonders durch den Direktor von dem ihnen zugefallenen Preise benachrichtigt und können diesen bei der Königlichen Universitätscasse zu Göttingen auf Anweisung des Direktors gegen Quittung erheben.

5. **Druck der Preisschrift.** Die gekrönte Schrift geht in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselbe einer Buchhandlung in Verlag geben oder auf Kosten der Stiftung drucken lassen.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschließlich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Kapitale der Stiftung zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Gesellschaft auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Gesellschaft fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser oder, falls er nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll sodann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder falls er verstorben ist, für dessen Erben und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Gesellschaft festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

6. **Freiexemplare.** Von den Preisschriften, die die Stiftung herausgiebt, erhält der Verfasser zehn Freiexemplare, der Verwaltungsrath ebenfalls zehn zu freier Verfügung.

7. **Zurückforderung nicht gekrönter Schriften.** Die Ver-

Digitized by Google

fasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Direktor den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderuung erloschen.

Göttingen, den 10. December 1896.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

Digitized by Google

Bericht
über eine Reise durch Columbien und Venezuela

von

Prof. Dr. Otto Bürger,
Privatdozenten in Göttingen.

I. Im Westindischen Archipel.

Seit Herbst 1895 hatte ich für eine Reise in die columbianischen Anden gerüstet, welche dem Studium wirbelloser Land- und Süsswasserthiere mit besonderer Berücksichtigung ihrer vertikalen Verbreitung gewidmet sein sollte.

Nachdem mir sowohl die Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin als auch die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen namhafte Unterstützungen zugesichert hatten, durfte ich Ende Sommer 1896 an die Abreise denken.

Ich brach unter besonders günstigen Auspicien auf, denn ein junger Landwirt, welcher zu Göttingen außer Fachstudien lebhaft zoologische Liebhabereien pflegte, wünschte sich mir anzuschließen und schiffte sich mit mir am 13. Sept. an Bord der „Valdivia", eines Dampfers der Hamburger Packetfahrt, ein.

Wir verließen Hamburg abends. Die Lichter von Blankenese waren die letzten heimathlichen Scheidegrüße, der folgende Morgen fand uns auf hoher See.

Am 16. September landeten wir in Havre, und am 1. October befanden wir uns nach glücklicher Fahrt im Bereich des Westindischen Archipels.

Der Tag war herrlich, der Himmel wolkenlos blau, und jedes der Eilande, an denen wir vorüberfuhren, deuchte uns so überaus malerisch, daß wir am liebsten schon jetzt begonnen hätten, die uns begegnenden Bilder mit der Camera festzuhalten.

Gegen Mittag ankerten wir in dem schönen Hafen von St. Thomas, welcher von der gleichnamigen, amphitheatralisch an grünen Bergen aufgebauten Hauptstadt umrahmt wird.

Digitized by Google

Wir hatten Zeit genug, um an Land zu gehen, und da wir begierig waren, eine Stichprobe auf die Tropenfauna zu machen, nahmen wir Netz und Ketscher mit uns. Im Westen tritt an die Hafenbucht ein Wäldchen von Palmen heran, welches viele kleine Brackwasser-Tümpel beschattet. In ihnen wimmelt es von Krebsen, und auf dem sandigen Boden schreckten wir mit jedem Schritt Eidechsen auf. Uns waren sie zu flink zum Greifen, aber einige Negerknaben, welche bald neugierig herbeiliefen, wußten sie sehr geschickt und sicher mit Schlingen aus Graßhalmen zu fangen. Wir erstiegen auch noch die nächsten Hügel, und mit Sonnenuntergang waren unsere Sammelbüchsen ziemlich gefüllt.

St. Thomas ist heute gegen früher eine stille Stadt, denn es hat aufgehört der Stapelplatz für die westindischen Inseln zu sein, seitdem die größeren eigene direkte Verbindungen mit Europa oder Nordamerika besitzen. Viele Waarenhäuser stehen leer und sind im Verfall begriffen. Die Insel selbst ist wenig fruchtbar.

Es war Nacht, als wir wiederum der „Valdivia“ zusteuerten. Das Meer leuchtete, so daß die Ruder weiß erglänzten, und die Fische, welche uns begleiteten, silberhell schimmerten.

Den ganzen folgenden Tag fuhren wir an Portorico entlang, dessen Gebirgscontouren uns reiche Abwechslung gewährten.

Am 3. October mit Sonnenaufgang lagen wir vor St. Domingo. Die Küste fällt völlig steil ab und macht den Eindruck einer 10 — 15 m hohen Mauer. Wir sehen über sie hinweg auf eine ausgedehnte Ebene, welche in weiter Ferne durch die imposanten Gebirge von Haïti abgeschlossen ist. Die Stadt tritt unmittelbar an die Küste heran, die alten, massiven spanischen Forts contrastieren seltsam mit den luftigen Bretterwohnungen der farbigen Bürger, welche mich lebhaft an die Buden erinnerten, die sich in manchen Städten die Einwohner zur Zeit des Schützenfestes auf ihrer Festwiese zum vorübergehenden Aufenthalt aufschlagen.

Wir gewannen den Zugang zur Insel durch den Rio Ozama mittels Boot erst nach langer mühsamer Fahrt, da die Brandung eine überaus starke ist. Dann durchschritten wir die Stadt nach Norden zu und gelangten hier in eine Gartengegend, welche an üppiger Fruchtbarkeit wohl ihresgleichen sucht.

Auch die Thierwelt habe ich, soviel sie sich in wenigen Stunden dem Auge erschließt, nur an wenigen anderen Orten in solch bunter Reichhaltigkeit wieder gefunden. Fast unter jedem Stein haben sich Gehäuse- und Nacktschnecken zurückgezogen; wo sich ein morscher Baumstamm vorfindet, bildet er, wenn er nicht von

Digitized by Google

Ameisen occupirt ist, die Wohnung von Krebsen, unter denen uns besonders einige Einsiedlerkrebse auffielen, welche in Häusern mariner Schnecken staken, die sie sich dreiviertelstundenweit vom Strande geholt haben mußten. Die Sträucher waren mit zahlreichen Insecten besetzt, und fortgesetzt kreuzten unseren Pfad prächtige Schmetterlinge.

Wie oft und schmerzlich habe ich an diese Fülle zurückgedacht, die wir so wenig ausbeuten durften, wenn mich später die Umstände zuweilen Tage lang an Orten festhielten, wo die Fauna aus einigen Schaben zu bestehen schien!

Was in St. Domingo an Bauwerken hervorragend ist, stammt aus spanischer oder französischer Zeit. Wir weilten auch in der Cathedrale am Grabe des Columbus, freilich mit geteilter Andacht, da unser priesterlicher Mentor unsere historischen Bedenken wegen der wirklichen Ruhestatt der Gebeine des großen Entdeckers nicht zerstreuen konnte.

Nunmehr nahm unser Schiff einen fast genau südlichen Curs und am 3. Tage, nachdem wir St. Domingo verlassen hatten, tauchten, über die Wolken hinaus ragend, in starren, zackigen Umrissen schwarzblau die Häupter der Cordilliere von Venezuela auf. Gegen Abend lagen wir dem Festlande bei La Guayra, diesem landschaftlich wunderbaren Hafen, gegenüber.

Noch traf die Sonne die weißgetünchten niedrigen Häuser mit mit den platten Dächern, die wie Schwalbennester an die steilen Bergwände angeklebt erscheinen und sich am schmalen Strande hinziehen eine einzige nach dem Meere offene Straße bildend.

Wir verfolgen den Saum der Küste weit nach Osten. Etwa eine halbe Stunde entfernt schiebt sich das zerfallene Gemäuer eines palastartigen Gebäudes ins Meer hinein vor und darüber hinaus eine kleine Ortschaft, von Bäumen und Sträuchern umhegt; erst in blauer Ferne hemmt den Blick ein schroffes Vorgebirge. Im Westen der Stadt begleitet ein Hain von Cokuspalmen den Strand. Die Gipfel der Berge streifen die Wolken. Die Abhänge der Gebirge sind fast kahl. Nur übermannshohe Cacteen bilden Gruppen; indes aus den Schluchten quillt üppiges Buschwerk hervor.

La Guayra ist einer der heißesten Plätze Westindiens. Aber obwohl am anderen Tage die Sonne mit voller Glut sich entfalten konnte, trat ich einen Spaziergang am Strande entlang an. Ich ertrug die Hitze wunderbar gut. Was mich jedoch deprimierte, war die trostlose Armut an Insecten und sonstigen mir am Herzen liegenden Geschöpfen. Die Hitze läßt sie nicht aufkommen. Es

Digitized by Google

ist zu trocken. Auch unter Steinen und in den Spalten der Felsen erhält sich die Feuchtigkeit nicht. Es fehlt auch vollständig an zartblättrigen Gewächsen. In dem spärlichen Schatten, welchen die Cokuspalmen spenden, wird das Thierleben kaum reicher.

Das bewog mich den zweiten Tag, welchen wir noch in La Guayra verbringen mußten, Carácas zu besuchen.

In kaum zwei Stunden befördert uns die Bahn, eine englische Gründung, nach der 900 m hoch gelegenen Hauptstadt hinauf. Welch wunderbare Fahrt! Viermal windet sich der schmale Schienenstrang um Vorgebirge herum, und ebenso oft eröffnet sich uns wieder, immer höher ansteigend, die Aussicht aufs Meer. Dann dringen wir ins Gebirge hinein. Auf schmalen Saumpfaden gleiten wir an seinen steilen Abhängen hin und rollen donnernd über Brücken, die enge, oft unabsehbar tiefe Schluchten überwölben. Wir befinden uns inmitten einer grandiosen Gebirgsscenerie. Die Gebirgshänge sind in mittlerer Höhe mit dichtem Gestrüpp bekleidet. Die Büsche strecken ihre oft blütenvollen Zweige fast bis in unsere Fenster, aus den Abgründen streben riesenhafte, schlanke, weißrindige Baumstämme mit dünn belaubten Kronen empor, und an den steilsten und sonnigsten Hängen erhebt sich der gewaltige Sänlencactus. Wo sich ein Wärterhäuschen befindet, ist ein kleines Gärtchen angelegt, und, notdürftig von einem Rinnsal bewässert, gedeihen darin einige Bananen. Oefters kreuzen wir einen Pfad, den alten Aufstieg, der auch heute noch nicht verlassen ist, denn wir begegnen Karavanen von schwerbeladenen Maulthieren.

Die Aussicht auf das Plateau von Carácas öffnet sich plötzlich, und ehe wir noch Zeit finden, uns in sie zu vertiefen, sind wir am Ziele angelangt.

Carácas ist die prächtigste Stadt, welche ich in Südamerika kennen gelernt habe. Wohl wiegen in der Peripherie die einstöckigen Häuser aus ungebranntem Lehm vor, aber meist haben sie einen hellen Anstrich und erscheinen sauber gehalten; im Centrum indessen, im Bereich der Plaza Bolívar überrascht uns eine ganze Reihe stilvoller und imposanter Paläste, deren Facaden aus weißem Sandstein oder selbst Marmor abends, wo ich sie im vollen Mondlicht sah, geradezu zauberhaft wirkten.

Es giebt einen Hügel in der Nähe des Bahnhofes, welcher eine Kirche trägt und parkartige Anlagen, dessen Besuch mir wegen eines zoologischen Gartens, der dort im Entstehen begriffen ist, empfohlen wurde. Ich habe ihn bestiegen, freilich ohne etwas Menagerieartiges entdecken zu können, dagegen wurde ich durch

Digitized by Google

den wundervollsten Blick über die weitausgedehnte Stadt belohnt. Sie liegt fast völlig eben, in ihrer Entwicklung nach Osten strebend, wo ein breites fruchtbares Thal sich meilenlang ausdehnt. Prächtig nehmen sich auch von unserem erhöhten Standpunkte die öffentlichen Bauten und die vielen Kirchen aus, aber sie vermögen unser Auge nicht abzuhalten, immer wieder zu der gewaltigen Gebirgscoulisse hinüber zu schweifen, welche das Meer verdeckt. Sie und das Gewirr von Bergzügen im Süden bestimmen dem Character von Carácas, der mir in allem Sonnenglanze ein düsterer schien.

Ich stieg auch noch ein wenig die nordwärts gelegenen Höhen hinan. Sie sind im ganzen kahl und von wenige Meter breiten aber 10 bis 15 Meter tiefen Schluchten mit völlig senkrechten Wänden durchrissen, die im Augenblick kein Wasser führten. In manchen, grabenartig flacheren hat sich eine üppige Vegetation entwickelt, und aus diesen und einer Caffeeplantage, die sich in der Nähe der Stadt an einem Bache ausdehnt, gewann ich auch eine kleine zoologische Ausbeute.

Gerne hätte ich meinen Weg von Caràcas nach Valencia fortgesetzt, um eine der bedeutendsten deutschen Unternehmungen, die Bahn, welche beide Städte verbindet, kennen zu lernen. Sie soll das Großartigste sein, was an Gebirgsbahnen in Südamerika geleistet ist, und nicht allein ihre kühne Ausführung im ganzen wird gerühmt, wo man hinhört, sie hat sich einen Namen wesentlich mit durch die formgefällige und heitere Anlage der den Schienenstrang begleitenden Bauten — auch der geringsten — gemacht. Dieser Zug des Deutschen, auch im Nebensächlichen noch etwas zu leisten, war dem Südamerikaner zwar ein wenig verblüffend, aber er lernte ihn schätzen.

Als ich Carácas verließ, erfüllte mich Bewunderung für den Mann, welchem die Hauptstadt fast allein ihr heutiges Aussehen verdankt. Mögen ihre Bewohner die Denkmäler geschleift haben, welche sich ihr langjähriger Dictator und Präsident Guzman Blanco nach Despotenart vorsorglich selbst errichtete, sein Andenken wird unvergeßlich bleiben in den pomphaften Bauten, die uns entzückten, und vor allen in der günstigen Entwicklung des Wohlstandes, die seine liberalen Grundsätze und vor allen Dingen seine Maßregeln für eine Sanirung der Finanzen einleiteten, die in der in Südamerika einzig dastehenden Vollgültigkeit des Geldes für den Fremden freilich herbe zum Ausdruck kommt.

Ueber Nacht hatten wir Puerto Cabello erreicht. Die Gebirge weichen einige Kilometer vom Strande zurück, der mit

Digitized by Google

dichtem Buschwerk bedeckt ist, daß sich in Mangrovendickicht ins Meer hinein fortsetzt.

Unserem Ankerplatz gegenüber liegt der öffentliche, wohlgepflegte Garten, den wir durchschreiten, um in die Stadt zu gelangen, in welcher der Handel eine viel größere Entwicklung genommen hat, wie in La Guayra, wo ihn Carácas festhielt. In den dem Hafen benachbarten Straßen von Puerto Cabello grenzt Store an Store, und die vielen ausländische Namen tragenden Firmenschilder sprechen für ihre Bedeutung.

Puerto Cabello ist so heiß wie La Guayra, vielleicht aber noch ungesunder als dieses, da das gelbe Fieber nur selten ganz erlischt. Deshalb haben sich die Europäer eine Villenkolonie etwa 6 km vom Hafen entfernt am Fuße des Gebirges gegründet, wohin sie sich nach des Tages Arbeit und Hitze allabendlich zurückziehen. Es ist das liebliche St. Esteban. Ich machte mich nachmittags dahin auf, um für die Nacht die Kühle des Urwaldes, die mich dort umfangen sollte, zu genießen.

Man durchschneidet Puerto Cabello, welches tief gebaut ist, und tritt in eine Ebene hinaus, in der nur hartblättriges und stachliches Gestrüpp gedeiht. Hin und wieder gaukelt ein unserem Citronenfalter ähnlicher Schmetterling oder eine Danais an uns vorüber, oder ein schwirrendes Geräusch lenkt unseren Blick zu einem Blütenstrauch, vor dessen Blumenkelchen ein Colibri sich sekundenlang in der Schwebe hält, Eidechsen und Heuschrecken huschen über den Weg, aber sonst herrscht dieselbe Armut an Thieren, wie am Strande von La Guayra.

Ein durchdringender Geruch kommt uns an, und rauschend fliegt ein Schwarm schwarzer Vögel zu einem Baume auf; wir sind bei den Schlächtereien angelangt, welche von Hunderten von Aasgeiern (Gallinazos) auf Abfälle controliert werden.

An dem Hügel, welchen wir bald hinansteigen, die Straße nach Valencia einschlagend, die St. Esteban durchschneidet, lehnt der Friedhof; wir ruhen an seiner Pforte aus, wo schon Wanderer sich niedergesetzt haben. Es ist wiederum ein köstlicher Ort zum Träumen. Kein Vogelschrei unterbricht die feierliche Stille, und auch unsere Genossen pflegen ganz der Ruhe, um sich für das kurze, aber schattenlose Wegstück, das sie noch von der Stadt trennt, zu stärken. In der Ferne glitzert das Meer, und die Ebene, in welcher sich die Stadt behaglich ausdehnt nimmt sich mit ihren Palmengruppen reizvoll und einladend aus, aber uns erinnern die unabsehbaren Gräberreihen in unserem Rücken an das tödliche Gift, das sie aushaucht. Nach einer ge-

Digitized by Google

ringen Steigung fällt unser Weg in ein Thal ab, und mit einem Male ist das Vegetationsbild ein anderes. Die Agave und der Cactus sind verschwunden. Ueppig grüne Hecken, von Winden durchwuchert, begleiten den Pfad und umhegen Felder von Reis und Mais. Weichen wir vom Wege ab, so gerathen wir in sumpfiges Terrain, bis uns ein breiter Bach zur Umkehr zwingt. Aus Beständen von lichtgrünen Bananen und dunklen Caffeebäumen lugen die Gehöfte des Tropenbauers hervor: luftige Hütten, mit Palmenblättern und Rohr gedeckt und vergittert. Kleine, magere, schwarze Schweine tummeln sich mit braunen, nackten Kindern und einem Volk von Hühnern vor dem pfortenlosen Einlaß.

Um uns fliegt und kriecht es. Wo wir das saftige Laub schütteln, fallen in unseren Fangschirm Käfer, Wanzen, Heuschrecken, Schaben, Tausendfüßler, Spinnen und Schnecken, und unter Steinen und moderndem Holz ziehen wir Würmer hervor.

Im Sammeleifer hatte ich nicht bemerkt, daß die Sonne inzwischen tief gesunken war. Da kreuzte schon der Abendbote unter den Morphiden, die blaue Kaligo, meinen Weg. Ich beschleunigte meine Schritte. Mit der Dämmerung trat der Weg in den Wald ein, und im Zwielicht erreichte ich Villen mit prachtvollen Gärten, in Ausschnitten des Urwaldes so versteckt gelegen, daß auch die benachbarten dichte Baummassen scheiden. Es ist St. Esteban. Ich fragte mich nach dem Hause des Agenten der Hamburger Packetfahrt, um mich bei meinen Landsleuten nach den Hotelverhältnissen zu erkundigen. Es gab kein Gasthaus, und ich ließ mich nicht lange nötigen, über Nacht Gast des Herrn Tams zu bleiben. Der Abend auf der Veranda war köstlich. Der Urwald begann sein tausendstimmiges Concert, in dem das schrille Lärmen der Cikaden mich nur in der ersten Viertelstunde etwas erregte. Herr Tams war so freundlich, mich die Anfangsgründe Südamerikanischer Lebensweisheit zu lehren.

St. Esteban ist wiederholt von Naturforschern aufgesucht worden und bietet namentlich für den Lepidopterologen ein überaus reiches Feld, welches Herr Starke, ein eingeborener Deutscher, seit Jahren ausbeutet. Aber auch für Geschöpfe, welche stete Feuchtigkeit lieben, sind günstige Existenzbedingungen vorhanden, da ein nie versiegender Bach Wald und Ort durchfließt. Mit günstigem Erfolge sind hier Fledermäuse, Vögel, Schnecken und Spinnen von Specialisten in den letzten Jahren gesammelt worden, und jüngst war ein Forscher hier anwesend gewesen, um die Pipa dorsigera zu studieren.

Ermüdende Ausmärsche oder Ritte fallen fort. Verläßt man

Digitized by Google

die Wohnung, so tritt man in den Urwald, in dessen Schatten man für Stunden auf der Straße nach Valencia, ins Gebirge aufsteigend, wandern kann.

Am folgenden Morgen kehrte ich wiederum zu Fuß nach dem Hafen zurück, und abends brachen wir nach Curaçao auf. Wir lernten eine ziemlich flache und sehr trockene Insel kennen, welche ihren Wohlstand, den die Hauptstadt, Willemstadt, verrät, die unverkennbar holländisches Gepräge besitzt, vornehmlich ihrem Schmugglergewerbe nach Venezuela verdankt.

Den Zoologen überrascht die ungeheuere Menge von Pupa, welche überall am Gestrüpp der niedrigen Hügel haften, die vom Strande aufsteigen. Sie hielten ihre Sommerruhe.

II. Von Barranquilla nach Honda.

Zwei Tage später grüßten uns die Schneegipfel der Sierra Nevada von Santa Marta, und nach einer Nacht sahen wir uns am 14. October der columbianischen Küste bei Sabanilla, unserem vorläufigen Endziel, gegenüber. Sie überraschte uns durch ihre Lieblichkeit. Eine Hügelkette senkt sich zum Meere hinab, die einen üppigen Wald trägt, in dem frische Wiesen eingestreut sind. Das mannigfache Grün des Tropenwaldes tritt in dem hellen Morgensonnenschein prächtig hervor.

Wir nahmen herzlichen Abschied von dem Schiffe, das uns vier und eine halbe Woche beherbergt hatte, und noch am selben Morgen führte uns eine Eisenbahn nach dem einige Stunden entfernten, am Magdalena gelegenen Barranquilla.

Sabanilla ist kaum mehr als ein geographischer Begriff, denn es wird nur durch wenige Lehmhütten repräsentiert. Die eigentliche Hafenstadt ist Barranquilla, welche sich trotz ihrer vom Meere abgerückten Lage — der Zugang durch den Magdalena hat sich fortgesetzt ungünstiger gestaltet — zur commerciell bedeutendsten überhaupt von Columbien entwickelt hat.

Der Schienenstrang führt zunächt am Meere entlang, und wir sehen, wie der Wald des Strandes sich in Mangrovendickicht fortsetzt, dann dringen wir tiefer in den Wald ein, welcher öfters in Weiden verwandelt ist, die sorglich durch Gitter umfriedigt sind. Sie nähren einen spärlichen Rindviehbestand. Einige Riesen von Eidechsen fliehen aufgescheucht von den Geleisen, und Schmetterlinge begleiten unseren Zug, gelegentlich in unser Abteil hinein flatternd.

Digitized by Google

Zur Zeit des zweiten Frühstücks (Almuerzo) erreichen wir Barranquilla und werfen uns in einen der vielen an dem primitiven Bahnhof bereitstehenden Fiaker nach dem „Hotel Suiza“ fahrend, das von Schweizer Damen geführt wird.

Wir nahmen das Mahl ein, welches so etwa nach europäisch-columbianischer Art bereitet war, und an dem uns das Beste der große Fächer dünkte, welcher der internationalen Tischgesellschaft Kühlung zuführte. Am meisten überraschte uns der Nachtisch: Chokolade mit ziemlich frischen Käseschnitten. Der Kenner taucht dieselben in das sehr süße Getränk ein.

Dank der freundlichen Hilfe, welche uns das deutsche Haus leistete, bei welchem wir durch die deutsche Bank accreditiert waren, erledigten sich unsere geschäftlichen Angelegenheiten rasch und zufriedenstellend. Obwohl nur 150 kg Passagiergepäck zollfrei sind, sofern es sich nicht um Waaren handelt, wurde mir auch ein bedeutendes Uebergewicht nicht berechnet, und schließlich auch der Import meiner Büchse gestattet, obwohl im allgemeinen jede Waffeneinfuhr verhindert wird. Es ist dies eine sehr streng durchgeführte Maßnahme der herrschenden clerikalen Regierung, die mir gegenüber wohl nur infolge der Empfehlungen nicht zur Geltung kam, mit denen ich mich bei dem columbianischen Generalkonsulat in Hamburg versehen hatte.

Schon am folgenden Tage sollte die „Barranquilla“, ein Dampfer, der sich eines besonders guten Renommees erfreute, den Magdalena hinaufgehen und ich beschloß sofort, ihn zu benutzen, da ich mir um Barranquilla herum keine bedeutenden zoologischen Erfolge versprach. Indessen war ich im Zweifel, wie weit ich gehen sollte, und zog, wo immer möglich, Erkundigungen über einen Platz ein, der am mittleren Magdalena gelegen, sich durch waldige Umgebung, leidlich gesundes Klima und die Möglichkeit einer bescheidenen Unterkunft und Verpflegung für meine zoologischen und menschlichen Bedürfnisse eigne. Leider waren die Auskünfte derart widersprechend und ungenau, daß ich es für das Beste hielt, fürerst soweit wie möglich, nämlich bis Honda in das Land einzudringen.

Barranquilla ist heiß, aber trotz seiner niederen Lage gesund. Vielleicht verdankt es diesen Vorzug dem Sande, in dem man noch ebenso schuhtief in den Straßen watet, wie zu den Zeiten von Thielmanns und Hettners.

Die Stadt macht trotz ihres bedeutenden Handels, und trotzdem sie sogar von einer Pferde- oder richtiger Maulthierbahn durch-

Digitized by Google

zogen wird, einen stillen Eindruck. Wir vermissen ein Straßenleben, Schaufenster und Restaurants.

Am Marktplatz ragen einige stattliche massive Bauten mit deutlich romanischen Anklängen aus spanischer Zeit auf; hier hat einst ein Springbrunnen inmitten überaus zierlich abgezirkelter Blumenanlagen geplätschert, die nun, da sie verwildert sind, um so zerzauster aussehen. An den Straßen wechseln Häuser und mit Schilf gedeckte Hütten. Jene sind gelegentlich zweistöckig oder zeigen einen besonderen Schmuck in ein paar korinthischen Pilastern, welche die breite Pforte einfassen. Wohlig wirken die großen Bäume, welche vor vielen Wohnungen stehen und den Straßen öfters den Anstrich einer Allee geben.

Den Abend verbrachten wir im Deutschen Club, wo wir Gelegenheit hatten, die jungen Mitglieder der starken deutschen Colonie kennen zu lernen. Eine heitere Tafelrunde bei Schach und Scat und Löwenbräu; wie in der Heimat!

Mit einer Präcision, wie ich sie nicht erwartet hätte, sammelte die „Barranquilla“ ihre Passagiere genau zur anberaumten Stunde durch einen heulenden, langgezogenen, mehrfach wiederholten Pfiff.

Unser Consul hatte die Freundlichkeit, uns an Bord zu geleiten und vor allem das Verladen meiner Sachen zu beaufsichtigen. Ich hatte, um nicht auf offenem Deck schlafen zu müssen, zu meiner Fahrkarte I. Cl. noch den Besitz einer Cabine hinzuerkauft und war nun nicht allein in der glücklichen Lage, über ein Waschgeschirr verfügen zu dürfen, sondern auch mein wertvollstes Gepäck sicher unterbringen zu können, eine Fürsorge, die dringend geboten ist, weil zumal nachts beim Ausladen Verwechslungen häufig sein sollen, und es auch in diesen Gegenden, wo eine schwarze Mischrasse vorherrscht, an Langfingern nicht fehlt.

Bis zum Flußdampfer hatte mir mein Reisegenosse das Geleite gegeben, nun aber mußte er direct nach Europa zurück, da ihm seine übele Gesundheit die Weiterreise verbot. Schwindelanfälle, welche sich bei ihm im Westindischen Archipel mehrfach wiederholt hatten, veranlaßten uns, in Curaçao einen Arzt zu konsultieren, der dem jungen Mann dringend Umkehr anempfahl, und, so leid es mir that, es blieb nichts anderes übrig, als zu gehorchen.

Um 10 Uhr schlugen die Schaufeln des großen Hinterrades, welches unseren Dampfer treibt, auf die Fluten, wir fahren der Mitte des Stromes zu und gewinnen einen Ueberblick auf Barranquilla und seine Landschaft. Die weite sumpfige Sandebene ist

Digitized by Google

mit Gebüschen bedeckt, in denen Cokospalmen anmutige Gruppen bilden. Diesen Character bewahrt sie bis über die Mündung des Canca hinaus, welche wir erst am 2. Tage erreichen, in den Loba, einen Seitenarm des Magdalena, einlenkend, da das Hauptbett im Versanden begriffen ist.

Die Ufer sind niedrig, der Fluß ist reich an Inseln, welche mit dichtem Gestrüpp bewachsen sind. Noch wälzt der Magdalena seine gelben Wasser, auf denen schmutzige Schaumballen und Colonien breitblättriger Wasserpflanzen treiben, träge dahin.

Viel Augenweide ist fürerst nicht vorhanden; vom Gebirge sind nur an hellen Tagen die weißen Gipfel der Sierra Nevada von Santa Marta zu sehen; das war uns nicht beschieden. Nur hin und wieder taucht eine Hütte auf, und fährt unser Schiff nahe am Ufer hin, so sehen wir, daß es ein ärmlicher Bau ist, aus Lehmwänden und einem Palmenstrohdach. Eine kleine Bananenanpflanzung, einige Hühner und schwarze Schweine bilden den Reichtum ihrer Bewohner, deren jüngere nackt umherlaufen.

Auch die Häuser der Städte, welche wir berühren, selbst die von Magangué, zeichnen sich nur durch einen weißen Anstrich vor den vereinzelten Hütten aus, aber in allen erhebt sich inmitten der niedrigen Wohnungen der Menschenkinder um so mehr dominierend, groß und massiv die Kirche, streng und starr in ihren Formen, Denkmäler aus spanischer Zeit.

Wir versäumen nichts, wenn wir jetzt unser Schiff studieren. Es ist ein zweistöckiges Haus, das auf einem sehr flachen, etwa 7 m breiten und 40 m langen Kahn ruht. Der zweiten Etage ist noch ein kleiner Pavillon aufgesetzt, der Sitz des Steuermanns. Das zweite Stockwerk wird jederseits durch eine Reihe von Cabinen eingefaßt, zwischen denen in der Mitte Raum für einen sehr breiten Gang geblieben ist, welcher das offene Vorder- und Hinterdeck verbindet. Das Schiff ist deutsche Arbeit, das bezeugen auch die vielen Oeldruckbilder, welche den Gang zieren, Reproductionen z. B. des Salontirolers von Defregger und der Vautier'schen Tanzstunde.

Auch eine Alpenscenerie prangt hier, aber nirgends ist etwas Columbianisches oder nur Tropisches dargestellt. Das Vorderdeck dient uns am Tage zum ständigen Aufenthalt, hier ist es trotz der Schornsteine, welche es durchbrechen und des Dampfkessels, der gerade darunter ruht, am luftigsten. Das untere Stockwerk ist an den Seiten völlig offen und birgt die Maschinen und das Heizmaterial und dient außerdem als Laderaum. Zwischen den Gütern können es sich die Passagiere II. Cl. bequem machen.

Digitized by Google

Es wird nur mit Holz geheizt, das gewöhnlich zweimal am Tage vom Ufer aus ergänzt wird, wo es bis Honda die Ansiedler als ansehnlichen Nebenverdienst bereit halten.

Die Aufenthalte, welche das Verladen und besonders die häufigen Holzentnahmen verursachten, boten mir Gelegenheit, täglich einige Male sammeln zu können, und ferner war in dem oft morschen Holze, welches aufgestapelt wurde, mancher Fang an Käfern, Scorpionen und sogar Schlangen zu machen. Auch die auf dem Flusse treibenden Pflanzen lohnten eine Untersuchung ihres Wurzelwerkes. Oberhalb der Mündung des Cauca sind sie übrigens vollständig verschwunden.

Am 3. Tage wechselt die Landschaft ihren Character, wir treten in den Urwald ein. Rechts und links begrenzen den Strom nunmehr hohe, grüne Mauern, in denen wir selten eine Lücke gewahren. Wir mühen uns anfangs vergeblich, in dem Dickicht Gewächstypen zu unterscheiden. Aber allmählich löst es sich ein wenig auf. Wir erkennen als Säulen des Urwaldes Baumriesen, unseren Eichen nicht unähnlich, mit silberfarbener Rinde, die weithin leuchtet. Am Ufer zeigen sich Boskette von Bambus, es sind schlanke, oft über 10 m hohe Stämme, welche bei zierlicher Verzweigung ein überaus zartes, helles Laub besitzen, dann folgen Gebüsche lanzettblättriger Platanillos und dazwischen niedrige Palmen mit langen Wedeln, deren Ansatz fast bis zum Boden niederreicht. Aber überall bilden Schlinggewächse ein unentwirrbares Geflecht, bald überschwere Perücken erzeugend, welche sich bis zum Wasserspiegel niedersenken, bald graziöse Guirlanden, die sich von Baum zu Baum ziehen. Aber weit über das Walddickicht hinaus, alles überragend, sind andere Palmen aufgeschossen, deren Kronen frei über dem Urwald zu schweben scheinen.

Das Auge weidet sich an dem mannigfachen Grün, aber vergebens sucht es nach Blütenbüscheln. Erst später sollte ich erfahren, daß der Urwald auch Blüten erzeugt und sogar mehrere Perioden der Blüte hat.

Nunmehr bot auch das Thierleben Unterhaltung. Der Fluß ist reicher an Sandbänken (Playas) geworden, und ihre kahlen, oft mehrere Morgen große, Flächen sind der Lieblingsaufenthalt des Spitzkrokodiles (Crocodilus acutus), vom Eingeborenen „Kaiman“ genannt. Die columbianischen Passagiere vergnügen sich damit, sie mit Revolvern vom Schiffe aus zu beschießen, freilich mit sehr geringem Erfolg. Auch das tödlich getroffene Krokodil wälzt sich noch in die Fluten, um in ihnen zu verenden. Wir haben verschiedene Male Kadaver derselben treiben sehen; sie waren mit

Digitized by Google

Aasgeiern besetzt. Die Gesellschaft dieser Riesenreptile — les extrèmes se touchent! — bilden anmutige, weiße Reiher, die sich in ihrer unmittelbaren Nähe aufpflanzen oder einherstolziren.

Vom Walde her erschallt das rabenartige Krächzen von Papageien, die in manchen Bäumen zu mehreren Dutzenden hocken und in Zügen oder paarweis hoch in den Lüften, ewig geschwätzig, den Fluß kreuzen. Die herrlichsten unter ihnen sind die Arakangas mit leuchtend-roter Brust und blauen Flügeln.

Nur einmal trafen wir auf eine Schaar von schwarzen Brüllaffen, welche sich in einem weitverzweigten Baum dicht am Ufer verteilt hatte, aber ein besonders seltener Anblick waren zwei anscheinend noch junge Tapire, welche auf einer Blöße weideten und uns nahe herankommen ließen.

Der Strom ist reißender geworden, sein Bett wird für den Schiffer gefährlicher wegen der treibenden Baumstämme und der wechselnden Untiefen; wir fahren nur noch am Tage und streifen häufig eine Sandbank, was uns das Knattern des Schiffsbodens, das Stoppen und tastende Suchen nach anderem Curse verräth.

Die Nacht verbringen wir da, wo wir uns gerade bei Einbruch der Dunkelheit befinden. Taue halten das Schiff an einem Urwaldstamme fest, Schwärme von Mosquitos umtanzen uns, eine größere Art macht sich durch ein Summen bemerkbar, eine andere heftet sich lautlos an uns fest und saugt sich blitzschnell so voll, daß sie zerdrückt einen dicken Blutstropfen hinterläßt. Wir verscheuchten sie einigermaßen mit Rauchen, denn noch ist es zu früh, uns unter das Mosquitonetz, welches unser Lager beschirmt, zu verkriechen; und zu genußvoll; denn köstliche Kühle weht von den fernen Bergen ins Magdalenenthal, der Himmel erglüht in fortgesetztem Wetterleuchten, das Concert der Cikaden hat begonnen, in das hier auch die dumpfen Rufe unzähliger Unken einfallen. Ein paar Tiplen, eine Art Laute, klingen aus dem unteren Raume zu uns herauf, Schiffsknechte greifen monotone Accorde, eine treffliche Begleitung der gleichförmigen Musik des Urwaldes.

Am 6. Tage erreichten wir Puerto Berrio, wo der Weg nach Medellin abgeht, dessen Anfang eine kurze Bahnstrecke bildet. Puerto Berrio bietet wahrscheinlich den günstigsten Aufenthalt zwischen Barranquilla und Honda. Auf einer Anhöhe präsentiert sich uns am Flußufer ein breites, zweistöckiges Haus mit großen Lettern als „Hotel Francese“, also hier muß zu leben sein, und für meine Zwecke schien mir auch nach dem mehrstündigen Examen, welches ich anstellen konnte, die hügelige, waldige und buschige

Digitized by Google

Umgebung günstig. Fieberfrei ist der Ort nicht, aber wo fände man einen solchen in diesen Niederungen?

Von der Mündung des Rio Sagomosa über die Mündung des Rio Nare hinaus befinden sich Ansiedlungen fast durchgehends nur auf dem linken Ufer des Flusses, während am rechten der Urwald fast nirgends gelichtet ist. Diese Erscheinung wird wohl durch die Nachbarschaft der Carare, eines noch völlig wilden, uncivilisirten, kriegerischen Indianerstammes erklärt, der sich vom Magdalena besonders im Gebiet des Rio Carare bis nach Bucaramanga im Staate Santander an den Westabhängen der Ostcordilliere erhalten hat.

Etwa seit Puerto National, wo die Straße nach Ocaña abgeht, einem 300 m hoch in der Ostcordilliere gelegenen Orte, der früher durch sein angenehmes Clima berühmt war, jetzt aber wegen gelben Fiebers gemieden wird, sind uns die Gebirgsketten so nahe gerückt, daß sie an klaren Tagen als dunkelblaue Massen unseren Horizont begrenzen. Unmittelbar an den Strom treten sie indes erst am vorletzten Tage unserer zehntägigen Flußreise heran. Damit wechselt die Vegetation vollständig. Der Urwald hat aufgehört, niedriges Strauchwerk ist an seine Stelle getreten, oft aber sind die steilen Abhänge nur mit einer Grasnarbe bekleidet, und aus Spalten wuchern Cacteen und Aloe hervor. Die Hänge der mächtigen Gebirgsmassen sind nackt.

Der Strom wird stark eingeengt, die Sandbänke verschwinden, der Lauf wird reißender und die Sonne sengt uns in dem rings abgeschlossenen Thale.

Wir begrüßen es darum als eine Erlösung, daß wir am 25. October in Yeguas anlangen, von wo uns eine Eisenbahn von 25 km Länge, der Anfang einer Bogotábahn, die schon seit 12 Jahren auf ihre Fortsetzung wartet, nach Honda befördert, das etwas weiter aufwärts am Magdalena gelegen ist.

Unterhalb von Honda befinden sich Stromschnellen, welche auch von kleineren Fahrzeugen nur schwer überwunden werden. Oberhalb von Honda ist der Strom noch bis Irardot bei günstigem Wasserstande für Dampfer mäßigen Umfangs schiffbar.

Wir hatten die Strecke von 1050 km zwischen Barranquilla und Honda vergleichsweise schnell zurückgelegt. Fahrten von 13—15 Tagen werden als günstig angesehen; der niedrige Wasserstand, welcher im Februar 1897 herrschte, hielt Reisende, welche nach Bogotá wollten, vier Wochen auf dem Fluße fest.

Wenn ich an Honda zurückdenke, so fühle ich eine unendliche Hitze, bewege mich auf holprigen Straßen, aus denen mir

Digitized by Google

Schmutz und eine enorme Anzahl Bettler zudringlich grinsend entgegenstarren.

Wie freundlich einladend grüßten die roten Dächer seiner weißen Häuser, teilweise an Hügeln sich übereinanderreihend, zu uns herrüber als wir neugierig uns aus den Coupéfenstern legten, um die erste größere Stadt des inneren Columbiens zu schauen.

Die Gebirge bieten einen prächtigen Hintergrund, Palmen und Bäume mit dichten Laubkronen treten überall zwischen den Wohnungen hervor und unmittelbar am Fuße der Stadt braust der jetzt hochangeschwollene Magdalena vorüber.

Honda ist eine alte spanische Gründung, und, ehemals von den Vizekönigen allzeit bevorzugt, ist ihr das Glück auch in den Verhältnissen der neueren Zeit treu geblieben, und sie blüht — ein seltener Fall in Columbien — seit Jahrhunderten bis auf den heutigen Tag, denn der gesammte Handel des Staates Tolima und des andinen Teils von Cundinamarca fließt über Honda. Für Bogotá ist Honda das wichtigste Depot, und jedes Haus hat hier seinen Commissionär. Tolima wird direct von Honda versorgt, und ist durch seinen bei dem enormen Consum des Landes immer noch sehr gewinnbringenden Tabakbau, seine ausgedehnten Caffee-, Cacao- und Zuckerrohrpflanzungen und vor allem seinen Reichtum an Edelmetallen einer der absatz- und verbrauchfähigsten der Republik.

Honda ist eine Goldgrube, und darum prävalirt hier wahrscheinlich so bedeutend unter den Europäern der Engländer. Das Deutsche Element ist nur durch einen Mann, den wackeren Herrn Schöpp, repräsentirt, der mir ein treuer Führer und Berater geworden ist.

Auf dem Wege nach dem „Hotel America", wo ich Quartier nehmen wollte, mußte ich über eine Brücke, welche über einen breiten und tiefen Nebenfluß des Magdalena führt. Die letzten 5 m sind eingestürzt, und seit Monaten besteht die Verbindung hier aus einigen schmalen Brettern, die mit Eisenschienen beschwert sind. Ich habe diese Strecke stets nur kriechend überwinden können. Das war ein Vorgeschmack columbianischer Zustände.

In Honda gedachte ich, länger Station zu machen, um die Fauna der tierra caliente im Magdalenengebiete zu studieren. Der plötzliche Wechsel der Vegetation unterhalb Yeguas, hatte mich mit Besorgnis betreffs der Reichhaltigkeit der niederen Thierwelt erfüllt, indes tritt der Wald in Parcellen schon zwischen Yeguas und Honda wieder auf, und auch das Buschwerk erwies sich nicht

Digitized by Google

so arm an Thieren, wie mich meine Erfahrungen in La Guayra uud Puerto Cabello vermuten ließen.

Indessen ist der Aufenthalt in einer Stadt selbst von der Ausdehnung von Honda der langen Wege ins Freie halber, die Zeit und Kräfte nutzlos verzehren, nicht günstig, und ich folgte gerne der Einladung eines Landsmannes, ihn auf seine in der Anlage begriffene, eine knappe Tagereise westlich von Honda mitten im Urwald gelegene Goldmine zu begleiten.

III. Die Goldmine Purnio.

Wir brachen am 28. Oct. auf, und ich bin bis zum 21. Nov. der Gast des Herrn Voigt gewesen, des hilfreichsten Freundes, welchen ich auf meiner Reise gewonnen habe.

Das Gebiet der Mine dehnt sich am Purnio, einem kleinen Nebenfluße des Magdalena, aus, der zwischen Conejo und Yeguas in diesen einmündet. Es umfaßt 57 qkm, welche mit goldhaltigem Alluvialschotter in einer Mächtigkeit von 3—10 m bedeckt sind, der sich von einem vom Purnio durchschnittenen, 280 m hochgelegenen Plateau bis auf die angrenzenden bis zu 400 m ansteigenden Höhen hinaufzieht. Das Gold wird gewaschen. Vorerst war man noch an der Arbeit, einen Canal von 10 km Länge, welcher meist durch Urwald führt, auszubauen, um eine Wasserkraft mit so starkem Gefälle zu gewinnen, daß sie gegen die Schottermassen gerichtet, täglich 700—1000 cbm Gestein zu lösen vermöge. Bei einer solchen Arbeitsleistung wird auch noch ein sehr bedeutender Gewinn erzielt, wenn man, wie Herr Voigt, nur für 1 M. Goldgehalt auf ein cbm rechnet. Dem Waschen im kleinen auf dem flachen Holzteller habe ich öfters zugeschaut, denn es war ein überraschender Anblick, wenn durch ein geschicktes letztes Schwenken der tiefschwarze Satz von feinkörnigem Magneteisen, der nach dem Fortschwemmen des gröberen Gesteins übrig bleibt, entfernt wurde, und alsdann blanke Goldflitterchen erschienen.

Die Ansiedlung bestand nur aus zwei leicht aus Holz zusammengeschlagenen und mit Palmblättern gedeckten Wohnungen, von denen die höher auf dem Plateau liegende den Herren, nämlich zwei Ingenieuren, einem deutschen Geologen und zeitweilig auch mir, die andere tiefere den Arbeitern (Peonen) Obdach bot.

Der nächste Ort ist Victoria, 760 m hoch in der Centralkordilliere gelegen und in einem Ritt von 4 Stunden von uns zu erreichen.

Digitized by Google

Das Plateau ist in eine Weide umgewandelt, welche den Maulthieren, Pferden und der Kuh, die uns jeden Morgen Milch spendet, — d. h. wenn sie kommt — Nahrung gewährt. Zwischen dem hohen Grase blühen Mimosen und verbenenartige Gewächse, allerhand Büsche bilden in ihnen Bosketts, und einige einsame Cecropien erinnern daran, daß auch hier sich einst der Urwald ausdehnte. Gegen Südwesten fällt das Plateau ziemlich steil zum Purnio ab, sonst geht es in den Urwald über, welchen wir vom Hause in etwa 5 Minuten erreichen. Wir folgen der Anlage des Canals, an der sich ein Pfad hinzieht. Erst vor Jahresfrist ist der Wald rings umher ausgebrannt, das hat indes die Lebenskraft der Bäume nicht gestört, sondern nur das Schlingwerk vernichtet, welches inzwischen aber schon wieder üppig wuchert, uns jedoch vorläufig noch erlaubt, auch ohne das große Messer (Machete) vom Wege abzuschweifen.

Trotzdem wir uns noch in der Regenzeit befinden, welche in dieser Gegend zweimal jährlich 3 Monate (September bis November und März bis Mai) andauert, haben wir viele sonnige Stunden und selbst ganz wolkenlose Tage, da die Hauptgüsse nachts erfolgen. Alle Bedingungen sind günstig, das Thierleben zu studieren, und täglich streifte ich umher mit den verschiedenartigsten Fanggeräten und Sammelutensilien ausgerüstet.

Wie ganz anders ist die Wirklichkeit als die Phantasie sie ausmalt! Es ist Morgen; die Sonne strahlt hell, und tausend Reflexe durchleuchten den Wald mit seiner unendlichen Fülle glänzender Blätter. Aber sie erweckt kein lautes Leben außer einigen Vogelstimmen in den höchsten Baumwipfeln und lockt auch nur wenige Geschöpfe ans Tageslicht hervor. Einige Schmetterlinge, besonders einige kleine Heliconiden mit stark durchsichtigen Flügeln fliegen umher, Wespen umkreisen uns, seltener summt ein Käfer vorüber, und verlieren wir uns tiefer in den Wald, so wird es noch stiller und scheinbar leerer an Geschöpfen. Und dennoch wimmelt es massenhaft von Thieren um uns her, wo wir auch unseren Fuß hinsetzen, aber sie halten sich verborgen, und es dominirt so kolossal eine einzige Familie, wie wir es in unserer Heimat nirgends kennen. Die Beherrscherin des Urwaldes ist die Ameise. Ueberall durchschreiten sie das welke Laub am Boden, die meisten Sträucher sind von ihnen voll, und in langen Tunnels, welche sie sich in unendlicher Mühsal aus feiner Erde an Baumstämmen hinauf gebaut haben, steigen sie zu deren Laubkronen empor, um mit Blattstücken beladen, die sie absägten, wieder herabzukommen und ihrem Bau zuzueilen.

Digitized by Google

Andere Thiere halten sich noch verborgener. Unter loser Rinde und morschen Baumstämmen, Laub und Steinen, in den Achselhöhlen welker Palmenblätter, in den tütenförmig zusammengerollten jungen Blättern der Platanillos, in den Blüten von Heliconien und Araceen müssen wir sie aufstöbern. Aber nur ein geringer Prozentsatz dieser Schlupfwinkel birgt Würmer, Schnecken, Tausendfüßler, Krebse oder Spinnen und Käfer, meistens haben auch von ihnen Ameisen Besitz ergriffen, von denen es bekannt ist, daß sie nur wenige unscheinbare Geschöpfe neben sich dulden. Am meisten scheinen Ameisen ständige Feuchtigkeit zu scheuen, und deshalb sind die Ränder der Bäche für uns am ergiebigsten, von denen dem Purnio in nächster Nähe verschiedene zufließen.

In den kleineren Zuflüssen fanden wir überdies verschiedenartige Gehäuseschnecken, und im Purnio haben wir an seinen tieferen Stellen mit großem Erfolge mit Dynamit gefischt. Die Fische werden durch die Patronen, welche unter Wasser explodieren, betäubt und dann von tauchenden Burschen heraufgeholt.

Käfer, Wanzen, Cikaden, Heuschrecken und andere Insecten habe ich in großer Fülle von zartblättrigen Sträuchern, vorzugsweise Solanaceen herabgeschüttelt, welche hier überaus üppig und artenreich entfaltet sind. Selbst diese einfache Jagdmethode erheischt einige Vorsicht. Wir müssen uns einigermaßen geräuschlos nahen, sonst lösen sich die Insecten ab und lassen sich zu Boden fallen, eine von ihnen sehr beliebte Zuflucht.

Nicht selten begegnen wir Leguanen, die träge auf einem Zweige hocken und erst fliehen, wenn wir Anstalten machen, sie zu greifen, oder entdecken in ihrem Versteck Schlangen, eine bunte „Corall“ oder die sehr gefürchtete schwarzbraune „Mapanā“. Am Bache scheuchte ich einige Male zierliche Eidechsen auf, welche über dem Wasserspiegel hinflohen, darüber hinweg tänzelnd wie über eine Eisfläche. Dasselbe Kunststück bringen gewisse langbeinige Spinnen fertig.

Meine Thätigkeit wurde durch viele der Peone und besonders den englischen Ingenieur wirksam unterstützt, indem sie mir manchen schönen Fund zutrugen.

Die Tage auf der Mine sind mir die liebsten in Columbien gewesen, und die Erinnerung an sie kann mir auch der Fieberanfall nicht trüben, der mich in der letzten Woche aufs Lager warf oder an den Stuhl auf der sog. Veranda fesselte. Da ließ ich mir von der „Muy“, einer Art Auerhenne, Gesellschaft leisten, die in freiwilliger Jungfräulichkeit oder Witwenschaft, „quien sabe?“, ihre Tage in unserem Culturkreis zuzubringen, dem Leben im

Digitized by Google

Urwalde vorgezogen hatte, oder beobachtete ein kleines Bisamschwein, einen Findling, welches den Küchenjungen Schritt für Schritt begleitete, sich mit Vorliebe an seinen nackten Füßen scheuernd, und sah auf die Gallinazos, die mißmutig auf einem Pfahle saßen, da erst in ein paar Tagen wieder geschlachtet wurde. Ich fand, daß Herr Voigt recht hatte, ihre Köpfe erinnern an die Häupter englischer Richter in Allongeperücken. Oefters erschien ein Albino unter ihnen, vom Volke „König der Gallinazos" genannt.

Die Arbeiter der Mine waren Antioquenier, forsche, sehnige Jünglinge und Männer, welche sich niemals von ihrem Machete und einer Seitentasche trennen. Ein Junge bekommt bei ihnen erst eine Seitentasche, dann ein kleines Machete und später ein Hemd. Die Antioquenier gelten als heißblütige und rauflustige Gesellen, die keine Angst vor Blut haben; und ihre gebildeteren Elemente genießen in ganz Columbien den Ruf zäher und gewinnsüchtiger, aber zuverlässiger Geschäftsleute. Es giebt keinen größeren Unterschied als den zwischen einem Arriero von Bogotá, dessen Verstand allemal, wenn er über 16 Jahre hinaus ist, in Chicha unterging, und einem aus diesen Landstrichen, dem Muster von Aufgewecktheit.

Am 21. Nov. brach ich wieder nach Honda auf, freilich noch matt, aber hochgehalten von dem Wunsche, einige tausend Meter höher und damit in kältere Climate zu gelangen.

Drei Arrieros, Maximiliano, Seraphim und Juan, gaben mir das Geleite bis Honda, und der letztere sollte mir nach Bogotá hinauf folgen. In dieser klangvollen Gesellschaft habe ich Honda so leicht und wohl erreicht, daß ich mich sofort an ein gründliches Packen und die Spedition der ersten Sendung in die Heimat begeben konnte, und mich schon der 24. Nov. zum Aufstieg in die Ost-Cordilliere gerüstet fand.

IV. Aufstieg von Honda nach Bogotá.

Die Reise von Honda (200 m)[1]) nach Bogotá (2600 m) ist fast noch ebenso beschwerlich wie vor 15 Jahren, wo sie Hettner machte und später eingehend schilderte, denn nur auf der Savanna von Bogotá, kommt uns eine Bahn bis Facatativá entgegen; bis dahin müssen wir 3 Tage bald bergauf, bald bergab reiten, der entscheidende, gleichmäßige Anstieg erfolgt erst am 3. Tage.

1) Die Höhenangaben gebe ich nach A. Hettner's Karte zu seinen Reisen in den Columbianischen Anden. J. Perthes, Gotha 1888.

Digitized by Google

Um 2 Uhr nachmittags schwang ich mich auf mein Maulthier, nach Landesbrauch mit weiten, weißen Ueberhosen (Zamarros) und einem hellen Umhängetuch (Ruana) überkleidet, einen letzten, prüfenden Blick auf die voluminöse Carga werfend, die leider aus zahlreichen, ungleichen Stücken bestand, welche sich schwer im Gleichgewicht auf dem Rücken des Lastmaulthieres arrangieren ließen.

Mehr Vertrauen als die gemieteten Cargamaulthiere flößte mir mein kräftiges, mittelgroßes Reitmaulthier ein, welches ich durch Vermittlung eines Landsmannes für 500 Mk., wie die Zeit lehrte, billig gekauft hatte.

Gleich bei Honda geht's über einen Nebenfluß des Magdalena, welchen wir durchwaten müssen, und danach trägt uns eine Fähre zum rechten Ufer des Magdalena hinüber. Hier durchreiten wir zunächst zwei elende Dörfer und bemühen uns, die schon gründlich in Unordnung geratene Carga von neuem zu componieren; ich beginne zu ahnen, daß mein Juan zwar ein ehrlicher, brauner Geselle ist, aber von der Fertigkeit eines Arriero wenig versteht. Denn fortgesetzt schwanken und verschieben sich die Lasten derartig, daß es alle fünf Minuten Verzüge giebt. Ich beschließe, Juan und die Carga sich selbst zu überlassen, um nicht außer mir zu geraten, was die Sache nur verschlimmert haben würde, da Juan, wie alle columbianischen Burschen, auf eine kräftige Ansprache wahrscheinlich ohne jedes Widerwort höflich grüßend nach Hause umgekehrt wäre.

Der Weg führt in den Urwald hinein, und nach einer Stunde befand ich mich am Rio secco, der im Augenblicke aber übervoll von braunen Fluten war, sodaß ich beim Durchreiten nur den Sitz trocken behielt. Alsdann beginnt der Anstieg. Auch dieser Pfad, zweifelsohne der am meisten begangene der Republik, ist wie die meisten columbianischen Wege nur zum Reiten geeignet, und nur das Maulthier oder das einheimische Pferd schreitet sicher auf der verwahrlosten Straße hin, jede bessere Stelle erspähend. Aber trotzdem sinkt unser Thier oft tief in Schlamm ein, oder es muß eine Reihe in Fels ausgetretener Stufen überwinden, was es auf- und abwärts sprungweise vollbringt, sodaß wir, gestoßen und durchrüttelt, froh sind, wenn wir eine Weile das holprige Pflaster unter uns haben, worin sich an besonders abschüssigen Wegstellen mit tonigem Boden eine Staatsfürsorge bekundet hat.

Ich ritt völlig allein; aber die columbianischen Straßen sind im allgemeinen nicht so einsam, wie man denkt, und vor allem der Weg nach Bogotá ist belebt. Züge von leeren Maulthieren kommen

Digitized by Google

mir in wilder Jagd entgegen, die Arrieros rasen, auf den stärksten sattellos reitend und sie nur mit einem Lasso lenkend, hinter ihnen, übermütig schreiend, einher; sie wollen nach Honda, um beladen dieselbe Straße in einigen Tagen wieder hinauf zu ziehen. Dann bieten sie ein anderes Bild. Fluchend und peitschend keuchen sie hinter den schwerbeladenen Thieren, von denen manches über 3 Ctr. trägt, die steilen Hänge hinauf, mit einem keifenden „Macho“ oder „Mula“ und fortgesetzten „Carachos“, zu denen die Peitsche den Takt schlägt, Thiere aufjagend, die matt in die Knie gesunken sind, oder bald hier, bald dort eine Last zurechtschiebend. Die Lastmaulthiere laufen fast stets ohne Leitseil.

Auch einer lustigen Kavalkade von Damen und Herren begegnete ich, die jedenfalls auf der Reise nach Europa begriffen waren. Und dann lassen die vielen Ansiedlungen, Haciendeu und Posadas, welche den Weg begleiten, das Gefühl der Vereinsamung nicht aufkommen. Mir wurden sie freilich bald ein Greuel, denn mein Maulthier hatte bei jedem Hause das unbezwingbare Gelüste einzukehren, so daß ich die erbittertsten Kämpfe mit seinem Eigenwillen zu bestehen hatte. Es muß zweifelsohne früher einen immer durstigen Reiter gehabt haben, der die Trinkgelegenheit, die in der That jedes Haus bietet, reichlich wahrzunehmen liebte.

Mein Ziel war die 1000 m hoch gelegene Posada „El Consuelo“, berühmt wegen ihres angenehmen Climas und der verhältnismäßig guten Verpflegung. Ich hatte es mit Juan verabredet.

Aber schon ließen sich Vogelstimmen hören, die ich als sichere Vorboten der Dämmerung kennen gelernt hatte, und große, das Tageslicht scheuende Krebse flohen von den Bachufern zurück, und meine Herberge wurde mir noch als sehr weit bezeichnet. So überraschte mich die Nacht, die nicht einmal sternenklar war. Wir passierten einen Abgrund, ich sah nichts mehr und fühlte nur das Wasser, welches mein Thier aufspritzte. Dann blieb es stehen und war mit Nichts aus der Stelle zu bringen, denn es wollte trinken. Mit schlimmen Befürchtungen löste ich tastend das Zaumzeug, ich hatte notdürftig gelernt, damit zu manipulieren, und wäre auch am Tage damit zurechtgekommen, freilich jetzt hoffte ich bei seiner Wiederanlage nur noch auf ein Wunder. Und es kam, nachdem ich mich minutenlang mit dem störrischen Thiere und den verwickelten Zaumketten abgemüht hatte, — ich stand mitten im Bache — in Gestalt eines Reiters auf einem Schimmel. Der erlöste mich aus der peinvollsten Situation, in der ich mich je in Columbien befunden habe. Keine Carga, keine Posada und ein Maulthier, über das man im Begriff ist,

Digitized by Google

die Gewalt zu verlieren, das war ein vielversprechender Reiseanfang.

Mit meinem Retter gelangte ich um 7 Uhr in der ersehnten Herberge an. In der Thüre erschien mit Lichtern ein hoher, stattlicher Greis, Don Clemente Mejia, würdig, der Herr in einer Posada zu sein, die sich „der Trost“ nennt.

Meine Carga erschien erst am folgenden Morgen, aber ein Thier war nicht fähig, die Reise fortzusetzen, und Juan mußte umkehren, es in Honda beim Verleiher gegen ein gesundes umzutauschen; er versprach mir noch am selben Tage abends wieder einzutreffen, was bei der Schnelligkeit, mit welcher diese Burschen laufen, gut möglich war. Indessen sah ich ihn erst nach vier Tagen wieder, ein Fieberanfall hatte ihn in Honda festgehalten.

Ich harrte natürlich in Consuelo und übte mich in Geduld, von der man in Columbien sagen kann, sie ist Geld.

Uebrigens hatte es das Schicksal mit uns gut gemeint, ja ich glaube, ich würde mich jeden Tag wieder nach Consuelo verbannen lassen, denn die Landschaft ist zauberhaft. Durch einen Ausschnitt, welcher durch Palmen und Bambus umkränzt wird, blicken wir in ein breites, üppig grünes Thal nieder, in dem wir die Serpentinen des Magdalena meilenweit nach Süden verfolgen. Wir hören sogar, obwohl wir uns 800 m über dem Flusse befinden, das Pfeifen der kleinen Dampfer, die aufwärts nach Ambalema wollen. Vor uns entfaltet sich die Centralcordilliere in grandioser Mächtigkeit, denn über die staffelweis von Thale aufsteigenden grünen und blauen Gebirgscoulissen ragt breit und massig der schneebedeckte Ruiz empor. Glänzend weiß leuchtet sein ewiger Schnee in der Tropensonne, sich grell abhebend gegen die Schatten, welche die schroffen, nackten, aus den Schneegefilden vorspringenden Felswände werfen. Das Haupt des Ruiz erinnerte mich an die Jungfrau, wie sie sich von Interlaken aus zeigt.

Die Umgebung des Hauses, hinter dem ein Garten und eine ausgedehnte Weide nicht fehlt, der felsige Saum der Straße und die nahen Bäche erwiesen sich auch für meine Studien günstig. Und schließlich bot Don Clemente, ein columbianischer Protestant und durch und durch Liberaler, mir viel Interesse und Belehrung.

Von Consuelo steigen wir bis 1380 m hinan und gelangen auf ein überaus blütenreiches Plateau, von dem wir wieder abwärts nach Guaduas (1000 m) müssen. Ich habe auch in diesem freundlichen und ziemlich sauberen Landstädtchen übernachtet, von dem der besonders steile Aufstieg auf die nächste Cordillierenkette anhebt. Das Maulthier klettert nun geradezu.

Digitized by Google

Das dauert bis zu der 1500 m hochgelegenen, reinlichen Posada „El Vergel", von der aus wir in etwa 20 Minuten den noch 200 m höheren Alto del Raizal erklimmen und ein herrliches Gebirgspanorama genießen, das der Ruiz abschließt. Unmittelbar vor uns erhebt sich ein noch höherer Gebirgszug. Wir kreuzen, abermals einige hundert Meter niedersteigend, ein enges Thal und überwinden ihn in einer Höhe von 1900 m. Ein langwieriger Abstieg läßt uns erst gegen Abend das nur 800 m hoch gelegene Villeta erreichen, in dem wir übernachten; aber von unzähligen Ratten wurden wir fortgesetzt aufgescheucht, und zogen es vor, schon morgens zwischen 4 und 5 Uhr unseren Weg fortzusetzen, obwohl es noch dunkle Nacht war. Von nun ab stiegen wir fortwährend. Zuerst zieht sich unser Weg am Rio Negro hin, in den wir fast senkrecht hinabschauen, sodann steigt er, von Urwald eingefaßt, an einem Bergrücken empor, auf dessen schmalem Plateau Chimbe (1700 m), ebenfalls Posada, gelegen ist.

In etwa fünf Stunden sind wir aus der Tierra caliente, in welcher wir uns noch in Villeta befanden, in die Tierra templada hinaufgestiegen. Das kommt hier in der Vegetation auffallender als an anderen Orten zum Ausdruck. Indem nämlich gewöhnlich der Urwald der Tierra caliente in Urwald der Tierra templada übergeht, merken wir erst allmählich einen Unterschied in der Vegetation, welcher vornehmlich durch das Zurückweichen der Palmen und das massenhafte Auftreten riesiger Baumfarren markant wird. Beim Anstieg nach Chimbe indessen lassen wir, die Tierra templada erreichend, den Wald hinter uns und gelangen auf Höhen, deren ausgedehnte Abhänge in nichts anderes als niedrige Adlerfarren gehüllt sind. Die Grenze würde ziemlich scharf sein, wenn nicht in feuchten und geschützten Schluchten der Wald der heißen Zone weit in die Tierra templada hinauf sich vorschöbe. Wir befinden uns hier in der Gegend der besten Caffeeplantagen.

Schon gegen Mittag treten wir bei Agua larga (2200 m) in die Tierra fria ein, und in den ersten Nachmittagsstunden passieren wir, 2755 m, hoch die Randgebirge der Savanna von Bogotá.

In einigen Stunden erreichen wir nach kurzem Abstieg und einem Ritt durch die Savanna Facatativá (2580 m), von wo wir am folgenden Morgen, die Bahn benutzend, nach Bogotá aufbrechen.

V. Bogotá und nächste Umgebung.

Bogotá (2610 m) dehnt sich am Fuße der am steilsten und mächtigsten aufsteigenden östlichen Randgebirge der Savanna aus.

Digitized by Google

Es ist im Wetterwinkel der Savanna gelegen. Ueber Bogotá hängen oftmals finstere Wolken, wenn sonst die weite Ebene im Sonnenschein strahlt, und selbst die drei Monate regenlose Zeit, welcher sich die Savanna jährlich erfreut, sind in Bogotá noch durch eine Anzahl Tage unterbrochen, wo es mieselt oder wie mit Mollen gießt.

Mittags pflegt es an sonnigen Tagen in Bogotá so heiß zu sein, daß man sich scheut, über die Straße zu gehen, nachts giebt es nicht selten so starke Fröste, daß die auf der Savanna vielfach angebauten Kartoffeln erfrieren. Die hohen Berge habe ich wieholt in einem leichten Schneemantel gesehen.

Unser Wohlbefinden wird anfangs auch durch die dünne Luft beeinträchtigt, aber wenn wir uns auch mit Herz und Lunge angepaßt haben, werden wir das Clima von Bogotá bald satt und vertauschen es lieber mit der Glut der Tierra caliente, zumal das Fieber, welches von der Mine her noch im Körper haftet, in der kalten Region sich viel stärker erneuert, als es begonnen hatte.

Bogotá als Stadt kann für uns keinen besonderen Reiz haben. Es ist ziemlich genau in Blöcken aufgebaut; im Centrum herrschen zweistöckige Häuser vor, von denen ein jedes einen Balkon besitzt, in der Peripherie giebt es fast nur einstöckige. Läden mit Schaufenstern besitzen nur einige europäische Geschäfte, und überall verrät die Decoration wenig Fleiß und Geschmack.

Hervorragende Gebäude giebt es wenige. Die Kirchen zeigen denselben Baustil wie sonst im Lande: Die breite Facade, der romanische Nischen und Fenster einiges Leben verleihen, schließt mit einem griechischen Giebelfelde ab und wird nur wenig von ein paar Türmen überragt, die sie unmittelbar begrenzen. Mitunter fehlt der eine Turm, aber diese Abwechslung ist wohl nur auf Geldmangel zurückzuführen.

Der imposanteste Profanbau ist das Parlamentsgebäude an der Plaza Bolívar, leider eine Ruine, denn in dem Lichthofe, in welchen wir vom Platze aus hineinblickten, dem einzig Anziehenden an dem Steinkoloss, sind viele Säulen zertrümmert. Auch das Theater macht Eindruck, und es ist schade, daß es versteckt in einer engen Straße, dicht von Häusern eingeschlossen, nicht zur Geltung gelangt.

Die Verpflegung ist in Bogotá keineswegs derart, wie man sie in einer Stadt von 100 000 Einwohnern erwarten möchte. Man pflegt in einem Hotel Wohnung mit voller Pension zu nehmen und nach einigen Wochen infolge der Monotonie des Küchenzettels und der eigentümlich gleichförmigen Zubereitung, welche uns die

Digitized by Google

wenigen Gerichte kaum von einander unterscheiden läßt, allen Appetit zu verlieren. Es giebt freilich einige leistungsfähigere Speiserestaurants, aber deren Benutzung hat unfehlbar die Exclusion aus dem Hotel zur Folge. Eine englische Pension, welche bisher den Fremden die angenehmste Unterkunft gewährte, ging während meines Aufenthaltes in Bogotá ein, so daß die Concurrenz noch geringer, und selbstverständlich Menu und Fürsorge nicht besser wurde.

Wird man es müde, zu Hause zu frieren, so ist man in einigen kleinen Kneipen willkommen, wo Landsleute Kopp'sches Bier verschenken. Das ist ein von Deutschen in Bogotá erzeugtes Getränk, welches im Bereich der Cordilliere von Bogotá lebhaften Zuspruch findet. Namentlich die hellen Sorten sind unseren norddeutschen Bieren an Güte sicher gleich zu stellen, und dem Unternehmen ist im Interesse der columbianischen Bevölkerung nur Glück zu wünschen, da die Ausbreitung des Bieres dem Consum der, durch ihren Fuselölgehalt verderblichen, Chicha entgegenwirkt.

Das europäische Element ist in Bogotá verhältnismäßig schwächer als in anderen Orten Columbiens vertreten und numerisch auffällig gering im Vergleich zu Carácas. Es wird das auf den Mangel eines Großhandels in Bogotá zurückzuführen sein, welcher sich infolge seiner ungünstigen Verkehrslage nicht entwickeln konnte. Die kolossalen Frachten lassen niemanden die Aufstapelung großer Waarenmassen riskieren. Das Detailgeschäft und das Handwerk wird überwiegend von Einheimischen besorgt.

Die Deutsche Colonie, welche man etwa auf 40 Erwachsene schätzt, die zum größten Teil ein Junggesellenleben führen, gewann diese Stärke erst seit der Gründung der Brauerei durch eine Frankfurter Firma Kopp, welche alle dirigierenden Stellen in ihrem Betriebe mit Deutschen besetzt hat. Neuerdings wird das deutsche Element noch einen bedeutenden Zuwachs durch die Gründung einer Glasfabrik erhalten haben, zu welcher sich die genannte Firma aus Mangel an Flaschen gedrängt sah.

Seit Jahrzehnten floriert in Bogotá bereits eine deutsche Hutmacherzunft, welche vornehmlich die Anfertigung von Cylindern pflegt, welche die besseren Bogotaner nur beim Schlafengehen ablegen. Ferner erfreuen sich einige deutsche Manufacturgeschäfte eines alten Renommees, auch ein deutscher und einige schweizer Juwelierläden vermögen erfolgreich mit einheimischen zu concurrieren, und ein hannoversches Ehepaar betreibt gewinnbringend Kunstgärtnerei, da mit Bouquets und einzelnen Schnittblumen großer Luxus getrieben wird. Eine einzige weiße Camelienblüte z. B. kostet

Digitized by Google

8 Mark, dabei gedeiht die Camelie prachtvoll und blütenreich im Freien. Diese porzellanhafte Blüte ist das stereotype Geschenk des Bräutigams an seine Verlobte. Früher war auch ein Apfel zulässig, seit aber dessen Preis auf etwa 1 Mark gesunken ist, wurde er aus der Liste der sonntäglichen Aufmerksamkeiten verbannt.

Die europäischen Exporthäuser erhalten in Bogotá durch ihre Agenten Musterlager. Das sind Ausstellungen aller denkbaren Gebrauchs- und Luxusgegenstände, welche sich in geräumigen Sälen, geschmackvoll arrangiert, ausbreiten. Hier lernt der bogotanische Kaufmann das Neueste des europäischen Marktes kennen, und in diesen permanenten Ausstellungen wetteifern die europäischen Staaten mit einander und noch mit Nordamerika an Geschmack und vor allem auch in der Billigkeit.

Der Absatz deutscher Waaren ist in Columbien in stetem Zunehmen begriffen. In manchen Branchen z. B. den, wie für das innere Columbien geschaffenen, unzerbrechlichen Emaillewaaren besitzt Deutschland geradezu das Monopol. Sehr schwierig scheint es um das Fortkommen deutscher Handwerker in Bogotá zu stehen; eingewanderte Schuhmacher haben trotz der hohen Preise des Schuhzeuges nicht bestehen können; in den letzten Jahren haben aber Sattler, welche in der Polsterung von Möbeln und besonders decorativen Arbeiten Geschick besaßen, gute Existenzen errungen.

In den Sommermonaten Dezember bis März werden die ständigen Agenten durch Reisende vermehrt, von denen es gelegentlich selbst in dieser unzugänglichen Höhe wimmelt.

Bogotá besitzt einen deutschen Club, indessen vereinigt er nur einen Teil der Landsleute, was einerseits seinen Grund in der sehr verschiedenen Stellung und Bildung der in Bogotá ansässigen Deutschen hat, dann aber auch auf die deutsche Uneinigkeit zurückzuführen ist. Unsere Vertretung gipfelt augenblicklich in dem Ministerresidenten Herrn Dr. Lüehrssen, welcher mich mit offenen Armen empfing.

Irgendwo habe ich einmal von Bogotá als der Stadt der Trauer gelesen, und das trifft insofern zu, als die Tracht der Bevölkerung so düster wie bei einem Begräbnis ist. Frauen und Jungfrauen, ja selbst halberwachsene Mädchen lassen sich öffentlich nur im tiefsten Schwarz blicken, das Haupt mit einem schwarzen Tuch umhüllt. Der Herr trägt tagtäglich den schwarzen, langen Schoßrock und schwarzen, sorgfältig geglätteten Cylinder, selten ein helles Beinkleid; bei einiger Kälte einen dunklen Ueberzieher nach gewöhnlichem Schnitt oder den weiten, schwarzen, spanischen Mantel, der ihm dann ganz und gar den Totengräbertypus verleiht.

Digitized by Google

Der „kleine Mann“ ist im Zeuge nicht minder schwarz; an die Stelle des Rockes ist eine tiefdunkele Ruana getreten, die seltsam mit dem weißen, sehr hohen und breitrandigen Panamahut contrastiert, der den kurzgeschorenen Dickkopf des mehr oder minder reinen Chibchaabkömmlings, vom Europäer oder Bogotaner spanischen Blutes als „Indio“ bezeichnet, allgemein krönt. Ernst wie das Kleid ist meist die Miene. Niemals ist mir ein solch stereotyper Ausdruck verhaltenen Schmerzes entgegengetreten als bei dem Bogotaner Peon, in dem das indianische Blut sich am reinsten erhalten hat. Wie oft habe ich mir das Hirn zermartert nach Einfällen, um ein Lächeln in dem Gesicht eines solchen 18jährigen Burschen zu erzeugen, dessen finsterer Ausdruck mir in der tagelangen Einsamkeit, die ich meistens mit ihm verbringen mußte, qualvoll wurde. Mein Witz war meist ohnmächtig. Nur mit ihresgleichen tauen sie ein wenig auf, gegen den Europäer aber, einerlei, ob es sich um den frisch zugereisten Fremdling handelt, oder die Kindeskinder ihrer Tyrannen, scheint ihr Haß ein instinktiver, ein ererbter Zug geworden zu sein, denn von ihrer tragischen Geschichte sollen sie, die in völliger Unbildung aufwachsen, nichts mehr wissen.

Der Señor verfügt im Verkehr über das verbindlichste Lächeln, welches die Señora teilt; und die Señorita lacht sogar und weiß ihre Augen auch auf der Straße in dem düstern Kopftuchrahmen gut zu gebrauchen, am besten freilich, wie man sagt, in der Kirche.

Die Kirche sollte das Wahrzeichen von Bogotá sein. Das erste, was wir von den fernen westlichen Grenzbergen der Savanna, einen Tag vor unserer Ankunft sahen, waren die, von der sinkenden Sonne beleuchteten, weißen Kapellen Monserrate und Guadalupe, die auf den steil im Rücken der Stadt abfallenden, gleichnamigen, noch um 500 m höheren Bergen erbaut sind. Gebimmel empfängt uns, wann wir auch tagsüber eintreffen, und allezeit pilgert man in die unzähligen Kirchen, bis in die Nacht hinein. Fragen wir jemanden, wo er wohnt, so nennt er eine Kirche, wo er seine Kinder eventuell unterrichten läßt, in der Regel ein geistliches Seminar oder einen Convict. Unzählige geistliche Orden haben in Bogotá eine Heimat gefunden, nachdem sie von Venezuela, Brasilien und Ecuador vertrieben wurden; Priester sind Minister oder deren Vertreter und Berater; Columbien ist die letzte Hochburg der Clerikalen im nördlichen Südamerika, und seit über einem Jahrzehnt befinden jene sich im vollen Besitz des Regimentes, das sich auf ein anscheinend ganz gut geschultes und wohl ge-

Digitized by Google

haltenes Heer stützt, dessen Hauptmacht in der Hauptstadt liegt und hier dem Volke in jedem Monate einmal, die Straßen mit aufgepflanzten Seitengewehr durchziehend, vorgeführt wird.

Aber was ist die Folge gewesen? Die Volksbildung hat solche Rückschritte gemacht, daß man keinen Burschen in irgend ein Haus schicken kann, da er nicht einmal die Hausnummer zu entziffern versteht. Die deutschen Volksschullehrer, welche Anfang der achtziger Jahre die liberale Regierung vor ihrem Sturtze engagiert hatte, sind längst entlassen. Auch die Universitätslehrer sind Priester oder deren Kreaturen; und wirtschaftlich geht das Land seinem Ruin entgegen; der Golddollar ist verschwunden, auch Silbergeld fehlt fast völlig, und das Papiergeld steht bedeutend unter der Hälfte seines Nominalwertes.

Bereits am ersten Nachmittage machte ich mich auf, um ein wenig die Umgebung von Bogotá kennen zu lernen. Ich wandte mich nach dem, eine kleine Stunde nordwärts gelegenen Chapinero, dem Versailles der columbianischen, Paris so gern imitierenden Hauptstadt. Ach, dies armselige Oertchen, dem nur die Häuser einiger Fremden, die hier Villegiatur halten, etwas Ansehen geben! Selbst seine Kirche ist zerfallen; das halbe Dach fehlt, und viele der romanischen Bogen sind eingestürzt.

Wo nicht Häuser die vernachlässigte Fahrstraße begrenzen und einen freundlichen Blick durch ihre Vorgärten gewähren und allerlei Betrachtungen wecken durch die verheißungsvollen Aufschriften, welche sie tragen wie „Concordia, Paz, Abundancia“ oder „Leipzig“, wird sie von hohen Lehmmauern eingefaßt, die unseren Augen nur Ausschau auf die Berge gestatten, die auch heute, an einem sonnigen Tage, oftmals von Wolken gestreift werden.

Hinter Chapinero gewinnen wir einen erhöhten Standpunkt. Die Mauern begrenzen Weiden, Potreros. Die ganze, Quadratmeilen umfassende Hochebene von Bogotá darf man einen riesigen Potrero nennen. Es ist eine Grasfläche, die aber nie zu üppiger Entfaltung kommt, da jeder Halm von den überzahlreichen Maulthieren, Eseln, Pferden oder Ochsen im Sprießen abgefressen wird. Weit zerstreut liegen Hacienden, deren in der Ferne einladend sich präsentierende, weiße Gebäude von Gruppen hoher Eucalyptus dürftig beschattet werden. Hier giebt es auch Ackerbau. Besonders Gerste, Weizen und Kartoffeln bedecken große Felder.

Sonst ist die Savanna kahl, und nur, wo ein Wasser fließt, schoß Buschwerk auf von Weiden, riesigen Solanaceen und dichtem Brombeergerank, in dem es allezeit blüht und reift.

An einer solchen Stelle rasten und sammeln wir. Von den

Digitized by Google

Büschen schütteln wir gelegentlich zahlreiche grün oder grünlichgraue Frösche herunter, die für die Savanna in hohem Maaße typisch sind, unter Steinen finden wir sehr große, schwarze, ungeflügelte Orthopteren, riesige Forficuliden und Staphyliniden, kleine graue und schwarze Nacktschnecken und gelegentlich auch eine schwarz und orange gezeichnete Schlange. An den Brombeerblüten summen Dipteren vorüber, wie wir sie noch nicht so bunt und dichtpelzig gesehen haben, an den niederen Blütenkräutern der Savanna, vornehmlich Euphrasiumarten, fangen wir die sehr kleinen, dunkelfarbigen, nur dieser Hochebene eigentümlichen Pieriden und auch Lycaeniden.

Bei unserer Heimkehr erzeugt die Sonne schon lange Schatten, aber die mit den Kapellen gekrönten Berggipfel bestrahlt sie mit vollem Glanze, und wunderbar klar erkennen wir sogar noch das Kreuz der Kapellen, obwohl sie uns nicht größer erscheinen wie Häuschen aus einer Kinderspielschachtel. Das Farbenspiel wechselt in der Stunde vor Sonnenuntergang fortwährend. Zuerst sind die Berge wie broncirt, dann violett und schließlich schwarzblau. Um 6 Uhr umpfängt sie die Nacht. In unserem Gedächtnis steigt ein anderes Bild auf, das wir zur gleichen Stunde oft von der Via Tasso oder Camaldoli in uns aufgenommen haben, der Vesuv und die sorrentinische Halbinsel, in dieselbe Farbenpracht gekleidet. Aber hier kam zur Farbe ein duftiger Schmelz; in unseren Tropenhöhen indessen, in der reinen, dünnen Luft fehlt die Gazewolke, und auch die dunklen Töne wirken völlig rein und darum bei aller Pracht kühl.

Der liebste und gewinnbringendste Spaziergang war mir das Boqueron des Rio San Francisco, ein tief zwischen Monsuerrate und Guadalupe einschneidendes Thal. Der Weg führt sanft ansteigend an einem cypressenreichen Landsitze vorbei, wohin sich einst Simon Bolívar vorübergehend zurückgezogeu hatte, und windet sich, hinter einer Mühle in das Thal eindringend, als schmaler Saumpfad an dem schnellen, kaskadenreichen Bache entlang. Von hieraus erblicken wir in hellen Morgenstunden am westlichen Horizonte die weißen Häupter des Ruiz und Tolima.

Das Thal wird schon nach einer Viertelstunde so verengt, daß nur Bach und Weg Platz haben, und die Berge steigenfast so steil wie Mauern himmelhoch an. Eine üppige Strauchvegetation begleitet uns, wir dürfen sagen, aus der Savanna hierher, aber sie klettert kaum einige Meter an den Bergeshängen hinauf. Diese tragen die Flora des Páramo, welche sich von derjenigen der Savanna, der Tierra fria stark unterscheidet und scharf abgrenzt.

Digitized by Google

In das Boqueron dringt auch die Fauna der Savanna hinein, aber sie ist hier viel reicher entwickelt. Fast unter jedem Steine treffen wir überdies schwarze Molche an und verschiedene Arten dunkelfarbiger Frösche und Kröten, von denen eine ihren Laich noch mit sich herumschleppt, während sich schon Larven entwickeln; damit zusammen ist eine dunkle, gelbzehige Eidechse häufig, welche im Gegensatz zu ihren flinken Verwandten aus den heißen Zonen sich äußerst träge verhält. An den Bergeshängen stöbern wir kleine, braungelbe Scorpione auf, und die Sträucher sind reicher an den verschiedensten Insecten als in der Savanna selbst. Auch die Schmetterlinge und Dipteren haben sich vermehrt.

Bogotá liegt an der Grenze von Tierra fria und Páramo. Dort herrscht ein Clima und eine Vegetation, wie etwa in unseren Mittelgebirgen, hier entschieden in beiden alpiner Character. Aber die Grenze ist schärfer wie bei den übrigen Zonen in den Anden und kommt vor allen Dingen auffallend zum Ausdruck durch bestimmte für die beiden Regionen typische Gewächse. In der Savanna ist es der rote Fingerhut, welcher so dicht und blütenvoll wuchert, daß er an den Bergeshängen der Tierra fria geradezu einen roten Saum als Grenze schafft. Den Páramo kennzeichnet der Frailejon, eine Composite, welche einen Wirtel von silberglänzenden, wolligen Blättern auf einem öfters mehrere Fuß hohen Stämmchen trägt, sodaß diese Staude wie eine Palme aus dem Liliputanerreich aussieht. Aus der Krone schießen in den ersten Monaten des Jahres eine Reihe gelber Blütendolden auf. Fingerhut und Frailejon schließen sich aus.

Nirgends habe ich ein solches Blühen gesehen wie im Bereich des Páramo. Die lederblättrigen Sträucher, welche oft auch durch die rostfarbene Unterseite ihrer Blätter an unsere Alpenpflanzen erinnern, sind übersäet mit weißen, gelben, rothen oder blauen Blütenrispen und- Dolden. Den Boden, der oft morastig ist, bedeckt grünes oder weißliches Moos; verschiedenartige Farrenkräuter bilden niedrige Gebüsche, Bärlappe umsäumen des Weges Kante, Orchideen mit zarten, weißen Blüten, blaue Genzianen und zarte Lobelien und kurzgestielte, stark behaarte Hieracien sprießen überall.

Der Páramo beginnt fast unmittelbar über Bogotá und culminirt in dem bis zu 3600 m ansteigenden Páramo de Cruz Verde, welchen wir mehrmals übersteigen mußten, um in die östliche Tierra caliente zu gelangen. Er reicht abwärts an verschiedenen Punkten, welche man, nordwärts nach Zipaquirá reisend, berührt, bis in

Digitized by Google

die Savanna hinunter, sodaß sein vertikales Verbreitungsgebiet in der Umgebung von Bogotá etwa 1000 m umfaßt. Wo die Cordillieren höher sind, tritt er an die Schneegrenze hinan.

Ganz im Gegensatz zu dem reichen Pflanzenleben ist die Fauna arm und verborgen. Alles verkriecht sich; Cikaden, Käfer, Wanzen und Fliegen haben sich unter Steine zurückgezogen, nur sonnige Mittage locken sie hervor. In seinen höchsten Regionen aber sind Kröten und Frösche noch reichlich vertreten. An der unteren Grenze des Páramo trifft man unter morschem Holz und Steinen oft sehr zahlreich Landplanarien und Landblutegel an, zusammen mit riesenhaften Regenwürmern, großen Nacktschnecken, verschiedenen, sehr dünnwandigen Gehäuseschnecken, kleinen, schwarzen Caraben und Spinnen.

Das Clima des Páramo ist unwirtlich. Naßkalte Winde fegen über ihn weg, Wolken umhüllen ihn oft tagelang, und einige Male sah ich die Berge über Bogotá fast bis zur Savanna hinab beschneit.

Aber trotzdem ziehen sich die Ansiedlungen, den Pfaden folgend, fast bis in die Paßhöhen hinauf, freilich sehen sie überaus ärmlich aus, denn in diesen Höhen gedeiht das Getreide kümmerlich, und nur der Anbau der Kartoffel wirft einigen Gewinnst ab. Doch ist die Landwirtschaft bei den meisten Nebensache, die Eremiten des Páramo rechnen auf den ewig chichadurstigen Peon oder Arriero der Savanna; und in der That, so viele es von jenen giebt, man trifft fast bei allen mit einigen Savannesen zusammen, die gerade die Totuma umgehen lassen.

Der Aufenthalt in Bogotá ermöglichte mir, auf halbtägigen Touren die Fauna zweier Zonen, der Tierra fria und des Páramo zu studieren; und um in die heißen Zonen zu gelangen, ist nur ein Ritt von 1—3 Tagen notwendig; in dieser Zeit stiegen wir westlich oder östlich tief in die Tierra caliente des Stromgebietes des Magdalena oder des Orinocco nieder.

Deshalb war Bogotá für mich das best gelegene Standquartier. Ich habe es bis Ende März 1897 beibehalten.

VI. Reisen in der Cordilliere von Bogotá.

Mitte Dezember verließ ich zum ersten Male Bogotá, um wiederum die westliche Tierra caliente aufzusuchen. Mein Endziel war die berühmte, natürliche Brücke von Pandi; auf dem Wege dahin wollte ich auch den Wasserfall des Tequendama besuchen und mich längere Zeit in Fusagasugá (Tierra templada) aufhalten.

Digitized by Google

Wir ritten in südwestlicher Richtung zunächst stundenlang in der Savanna.

Endlich ist der Sommer auf der Hochebene eingezogen, wir dürfen den wasserdichten Cautchu mit der leichteren Ruana vertauschen. Die Sonne vergoldet die Gerste, welche auf großen Feldern reift; Kartoffeln blühen, und wo wir einem Weidengebüsch nahe kommen, hören wir muntere Vogelstimmen. Wir haben Hochsommer, und in der Heimat, der wir beim Anblick unserer lachenden Umgebung gedenken, ist's Winter. Aber da rüstet man nun schon zum Weihnachtsfeste und bedarf des Sonnenscheins zur Freude nicht.

Gegen Abend gelangte ich am Fuße der südlichen Randgebirge der Savanna an, denn ich hatte meine Richtung inzwischen verändert, und fand bei Tierra negra, einem Complex ziemlich dürftiger Häuser, Posada im „Hotel Colombia", einer der besten Herbergen, die ich kennen gelernt habe, trotzdem für sämmtliche Gäste — und wir waren nachts sicher ein Dutzend — nur ein einziges Waschgefäß und ein Handtuch existierte.

Von hier aus wollte ich am folgenden Morgen den Wasserfall besuchen, und es hieß sehr früh aufstehen, da das imposante Bild sich gegen 9 Uhr zu verschleiern pflegt. Wir brachen noch bei Dunkelheit auf und lenkten mit Sonnenaufgang in das Thal des Rio Bogotá oder Rio Funza ein, welcher den als Tequendama bezeichneten Fall bildet. Wir mußten in diesem Thale noch fast 2 Stunden reiten, die uns bei seiner bald wilden, bald lieblichen Natur einen hohen Vorgenuß gewährten. Der Fluß, noch wasserreich, braust donnernd in seinem Felsenbette dahin, gewaltige Blöcke umtosend und oft schon Fälle bildend; dann erweitert er sich zu einem See, dann wieder verschwindet er in einer Felsschlucht. Die Vegetation ist üppig und blütenreich, und freundliche Haciendeu grüßen uns, aus lichtem Grün mit ihren weißen Mauern hervorleuchtend. Oefters begegnen wir schweren, mit Steinkohle beladenen Ochsenkarren, denn dies Thal ist reich an diesem wertvollen Mineral.

Etwa eine Viertelstunde vor unserer Ankunft am Fall hören wir sein Donnern. Ich ritt über ihn hinaus an den Bergen empor, wo sich mir, wie ich vermutet hatte, eine vollständige Aussicht auf den Fall bot. Der Fluß tritt aus einem überaus schmalen Felsenthor heraus und stürzt dann senkrecht über 140 m in die Tiefe. Noch war kein Nebelwölkchen aufgestiegen; ich vermochte die weißen Wassermassen bis in den Abgrund zu verfolgen, wo sie sich in einem Riesentopfe sammeln und ihren Lauf zum Mag-

Digitized by Google

dalena fortsetzen. Die Vegetation ist noch üppiger geworden, überall bekleidet sie die Bergwände, welche den kühnen Salto begrenzen. So fehlt es auch nicht an einer prächtigen Staffage. Später besuchte ich die Schwelle des Falles. Hier hatte sich bereits ein lustiges Völkchen von Burschen und Mädchen eingefunden, die trotz des Donners der Wasser auf dem Tiple klimperten. Wie mir gesagt worden war, hüllte sich der Fall mit der höher steigenden Sonne vollständig in Nebel.

Am folgenden Tage passierte ich 2800 m hoch die Randgebirge der Savanna und gelangte dann, absteigend, fortwährend im herrlichsten, namentlich an Baumfarren reichen Urwalde trabend, nachmittags in Fusagasugá an. Hier ging es verhältnismäßig lebhaft zu, da viele Familien aus Bogotá zur „Sommerfrische" eingetroffen waren. Der Bogotaner liebt es nämlich, die einzigen Monate, wo es schön in seiner Stadt ist, in der Tierra templada oder caliente zu verbringen, namentlich, um zu baden. Ein bevorzugter Badeort ist Fusagasugá, wo man auf- oder absteigend Bäder von der verschiedensten Temperatur haben kann. Das Bad ist der Fluß, wo er einem dazu am geeignetsten erscheint.

Fusagasugá liegt auf einer der großen Mesas, welche so characteristisch für die Cordillieren sind. Sie ist von Weiden überzogen; an den hohen Gebirgen aber, welche die Mesa begrenzen, steht überall dichter Wald, der beim Orte in Gesträuch übergeht. Hier (1700 m) habe ich am eingehendsten in der Fauna der Tierra templada sammeln können.

In Fusagasugá erlebte ich das eigenartigste Weihnachtsfest. Am heiligen Abend drang in meine stille Herberge so lautes Lärmen von der Plaza her, daß ich mich neugierig aufmachte, um mich von der Ursache zu unterrichten. Der kolossale Platz, an dessen einer Seite sich, wie immer, die Kirche erhebt, war ganz erfüllt von Volk, auf das viele Pechfackeln, die an festgerammten Stäben um den ganzen Platz herum angebunden waren, einen roten Schein warfen. Von der breiten Treppe vor der Kirche schossen fortwährend Raketen auf. Da aber brach in der Volksmasse eine mächtige Bewegung los, ein Rennen und Kreischen erhob sich, und wie Dämonen erschienen glühende Häupter mit licht brennenden Hörnern. Es waren Burschen, welche in Ochsenfellen staken und Ochsenschädel mit Hörnern trugen, die, mit Werg und Harz ausgestopft und nun in Brand gesetzt, ihnen das Aussehen von Teufeln gaben. Rücksichtslos drangen sie besonders in die Gruppen der Mädchen und Frauen ein, und ich war in steter Verwunderung, daß sie scheinbar nichts an Kleidern entflammten und sengten. Mir wurde

Digitized by Google

es dennoch unheimlich, und ich folgte gern der Einladung der Gebrüder Arbelaiz in ihre Tienda, wo ich die langen Abende bei ihrem Doppelspiel von Mandoline und Tiple, die sie meisterhaft beherrschten, zu verträumen pflegte.

Aber es wartete unserer noch ein höherer Genuß. Auf 9 Uhr hatte eine Bande Seiltänzer und Luftgymnastiker ihre Productionen zur Erbauung der christfrohen Einwohner unsres Andenstädtchens angekündigt. Und siehe, es war ganz so wie bei uns; und hätte nicht das südliche Kreuz über die Dächer der Nachbarhäuser geblickt, und wären uns nicht die endlosen, gereimten Reden fremdartig gewesen, die ein zierlicher Knabe von der Bühne her als Vor- und Zwischenspiel an das Publikum hielt, das ihn oft und lebhaft beklatschte, so wäre die Illusion vollends geglückt. Nur eine Nummer war mir neu, aber durchaus dem columbianischen Geschmack für alles, was knallt und brennt, angemessen.

Ein altes Indioweib von ausgesuchter Häßlichkeit, aber verblüffender Geschicklichkeit im Seiltanzen nimmt mitten auf dem Seile in einem hochlehnigen Sessel Platz, an dem uns allerlei Gerank auffällt. Die Musik — übrigens von entsetzlicher Qualität — beginnt piano eine gefühlvolle Weise, und mit einemmale kracht und zischt es, und der ganze Sessel sprüht von Flammen, Schwärmern und Raketen. Das Indioweib aber sitzt wie gebannt und läßt den Höllenregen ohne Bewegung über ihre nackten Schultern und Arme ergehen. Ein fanatischer Beifallssturm lohnt ihren Heroismus.

Das war die Glanznummer der heiligen Nacht zu Fusagasugá.

Am folgenden Morgen ging das Krachen im Orte unentwegt fort. In der Kirche wird gebetet und gepredigt, und eine, wie mir schien, sogar schöne, ein wenig leidenschaftliche Streichmusik zur höheren Feier veranstaltet, und vor den offenen Thüren, unmittelbar vor der heiligen Schwelle auf der Treppe lassen Burschen ungezählte Schwärmer und Raketen verpuffen und schleudern Knallerbsen. Dabei scheint die Sonne am wolkenlosen Himmel.

Am 2. Weihnachtstage brach ich nach Pandi auf, welches nur noch 940 m hoch liegt. Bis zur natürlichen Brücke kam ich auf 780 m herab.

Die natürliche Brücke, welche seit langem durch eine künstliche überbaut ist und über eine etwa 80 m tiefe und an dieser Stelle nur etwa 12 m breite Schlucht mit senkrechten Felsen hinüberführt, verdankt, wie Hettner meint, eingekeilten Felsmassen ihren Ursprung. Ich habe den gleichen Eindruck gewonnen.

Digitized by Google

Unsere Bewunderung und unser Erstaunen gilt der Schlucht, diesem engen, düsteren Abgrunde, aus dem der Spiegel eines Flusses unheimlich herauf glänzt, und das häßliche Geschrei unzähliger Vögel, der Guácharos (Steatornis caripensis), emporgellt, die in der Tiefe ihre Nester haben.

Die zweite Sehenswürdigkeit, welche Pandi besitzt, ist ein riesiger Felsblock, welcher einen nahen Hügel krönt, an dem, wie das Volk sagt, „Hieroglyphen der Indianer" sich befinden. Gemeint sind die indianischen Ureinwohner. Die „Hieroglyphen" am Fels zu Pandi sind rot gemalt und machten auf mich den Eindruck sehr einfacher Ornamente, wie man sie eingraviert auf den Spinnwirteln findet, welche die alten Indianer in großer Anzahl hinterlassen haben.

Am Sylvestertage erreichte ich wieder die Savanna von Bogotá. Schon beim Passieren der Randgebirge machte sich bei mir das Fieber bemerkbar, von dem ich nichts im heißen Lande gespürt hatte, und auf der Savanna angelangt, mußte ich in einer kleinen Posada Zuflucht und Erholung suchen.

Diese Erscheinung hat sich bei mir in der Folge noch öfters wiederholt.

Den Januar benutzte ich zu einer Reise in die Llanos, die man nur von Dezember bis März unter günstigen Witterungsverhältnissen besuchen kann, da der Regen östlich von der Cordilliere nur diese 4 Monate aussetzt.

Der Weg führt über den Páramo. In einer Höhe von 3200 m reiten wir durch den engen Paß, durch den naßkalte Nebelwolken jagen. Noch ist die östliche Tierra templada in Dunst gehüllt, aber nach einem steilen Abstieg haben wir sie schon nachmittags erreicht; ein wolkenloser Himmel spannt sich über uns, Orangen, brechendvoll von Früchten, hängen ihre Zweige über unseren schmalen Pfad, der von Fuchsiengebüschen eingefaßt ist, und unsere Maulthiere schwelgen abends in frisch geschnittenem Zuckerrohr. Wir übernachten in Caquezá (1630 m) und setzen am nächsten Tage unseren Weg im engen Thale des Rio Negro fort, aber nicht in der Tiefe, sondern hoch oben an gewaltigen Bergeshängen auf einem Saumpfade, der nur eben erlaubt, daß sich 2 Reiter ausweichen können. Stundenlang reiten wir an Abgründen hin, die sich jäh neben uns 200—300 m tief aufthuen. Wir verlassen uns auf den sicheren Gang unseres Thieres, denn den Rand des Weges schützt nichts als hier und da ein Agave. Auf der anderen Seite steigt der Felsen senkrecht empor. Aufmerksam lauschen wir auf die Hornsignale, welche die Treiber der Ochsen-

Digitized by Google

herden abgeben, die in dieser Zeit massenhaft von den Zuchtplätzen der Llanos auf die Savanna zum Verkauf getrieben werden, denn wir müssen uns alsdann eine breitere Stelle, eine natürliche Nische suchen, um den Thieren sicher ausweichen zu können.

Die Berge sind nur mit einer niedrigen Grasnarbe bedeckt, und oftmals tritt das nackte Erdreich zu Tage. Wir umreiten den über 3600 m hohen Páramo von Chingasa, dessen Gipfel in Wolken gehüllt sind.

Am dritten Tage erreichen wir die Tierra caliente und treten nun in den üppigsten Urwald ein. Zahlreiche Bäche fallen in Cascaden von den steilen Bergeshängen herab und netzen die üppiggrünen Wedel von Palmen und herrlichen Farnen. Philodendren klimmen in den Bäumen empor, und Araceen und Heliconien blühen in niegesehener Menge. Das feuchte Gestein ist dicht mit zarten, moosartigen Pflanzen überzogen. An einer sonnigen Stelle blühen feuerrot Amaryllis. Nirgends sah ich ein solches Leben von Schmetterlingen der verschiedensten Arten. Immer von neuem schreckt der Huf des Maulthieres den prachtvollen, blauen Morpho achilles auf. Und außerdem regt es sich überall in den Zweigen von Vögeln. Hier ist die Heimat vieler der farbenschönsten. Und auch nachts entfaltet die Thierwelt ihre Pracht. Zahllose Lampyriden irren umher, und zwischen den Bäumen schießen riesige Schnellkäfer, wie Raketen glühend, empor, so leuchtkräftig sind die beiden Leuchtorgane, welche sie besitzen.

Gegen Abend des 3. Tages erblickte ich die Llanos durch eine Schlucht. Eine Stunde später lagen sie im Dämmerscheine in ihrer Unendlichkeit vor mir, da ich noch einmal fast 1000 m über ihnen auf dem Alto de Buenavista nächtigte.

Am folgenden Morgen erreichte ich das freundliche und auch saubere Villavicencio (440 m), eine jüngere Stadt, die von einer Parklandschaft umgeben ist. Von hieraus machte ich einen kleinen Abstecher in die Llanos, von denen uns noch der Waldsaum des Rio Ocoa trennt, und kehrte eine Woche später nach eifrigem Sammeln denselben Weg nach Bogotá zurück, um noch einmal eine Stelle zu sondieren, an der ich einen Peripatus gefunden hatte. Leider blieb mein erneutes Suchen ohne Erfolg.

Im Februar überschritt ich noch einmal die südlichen Randgebirge, den Páramo de Cruz verde 3550 m hoch über Ubaque passierend, um die kleine, aber sehr tiefe Lagune von Ubaque (2100 m) zu studieren und bei La Union (1590 m) am Rio Negro nochmals im Bereich der östlichen Tierra templada zu sammeln

Digitized by Google

und auch zum Páramo von Chingasa aufzusteigen. Auf dieser Tour holte ich mir eine schwere Dysenterie, welche mir erst im März erlaubte, meine Touren wieder aufzunehmen. Ich wollte noch einmal in die westliche Tierra templada, in der faunistisch viel gerühmten Gegend von Muzo oder Pacho sammeln und den heiligen See der Chibchas, die Lagune von Fúquene, besuchen. Unser Weg führt nordwärts über die Savanna; wir können fast eine halbe Tagereise mit der Bahn (bis Cájica) zurücklegen und wenden uns dann über Zipaquirá, welches berühmt durch seine Salinen ist, den nördlichen Randgebirgen zu mit ihrem ausgedehnten etwa 3200 m hohen Páramo.

Schon am 2. Tage haben wir mit Einbruch der Nacht Susa (2560 m) erreicht, wo wir Quartier nehmen, um Ausflüge nach der nur $^3/_4$ Stunden entfernten Lagune zu machen.

Der Pfarrer des Ortes, an den ich empfohlen war, besorgte mir einen guten Bootsmann, mit dessen Hilfe ich meine Fischerei, die namentlich dem Auftrieb galt, besorgen konnte.

Die Ufer der flachen Lagune, welche in geringer Entfernung rings von Bergen eingeschlossen ist, sind sumpfig und mit Schilf bewachsen. Treiben wir der Mitte zu, so hören größere Pflanzen völlig auf, wir vermissen auch Tange, aber es sind Millionen winzig kleiner, grünlicher Algen vorhanden, welche namentlich in einer Tiefe von $^1/_2$ m gedeihen und dem Wasser eine gelblichgrüne Färbung verleihen.

Auch der Strand der Lagune war reich an allerhand niederen Thieren.

Die Landschaft mit der Lagune macht einen melancholischen Eindruck.

Ueber Zipaquirá ritt ich später nach Pacho, einem lieblich gelegenen Orte, wo ich die reichste Insectenwelt der von mir besuchten westlichen Plätze der Ostcordilliere fand.

Nach Bogotá zurückgekehrt durfte ich nun an einen Wechsel meines Standquartiers denken. Ich beschloß, dasselbe nach Venezuela nach St. Esteban zu verlegen, hierhin aber über Trinidad zu gehen, also zur Rückreise Meta und Orinocco zu benutzen.

Meine Erfahrungen über die Verbreitung der niederen Thiere hatten mich bisher gelehrt, daß Savanna und Páramo eine ziemlich in sich abgeschlossene Fauna besitzen, und daß die Formen der heißen Zonen östlich und westlich des Kammes der Ostcordilliere sich sehr ähnlich sind, dieselbe aber ihre reichste Entwickelung nach den Llanos zu erfahren hat.

Digitized by Google

VII. Von Bogotá nach Trinidad.

Am Dienstag nach Palmsonntag verließ ich Bogotá, um die Reise nach dem atlantischen Ocean anzutreten. Ich wollte den Meta und Orinocco hinunterfahren, ging aber, ziemlich schlecht unterrichtet über die Reisegelegenheiten dieses langen Weges, fort, denn in Bogotá konnte ich keine sicheren Auskünfte erlangen.

Das mir bekannte Villavicencio war mein nächstes Ziel. Den ersten Tag gab mir ein Landsmann aus Bogotá, Herr Schmidtgen, das Geleite.

Meine Carga hatte ich soweit reduciert, daß sie ein Maulthier tragen konnte, aber dennoch war ich bei der Gefährlichkeit und Enge des Weges in großer Sorge, ob wir sie wohlbehalten das Gebirge hinunterbrächten.

Der Weg hatte sich seit den 3 Monaten, wo wir ihn zuletzt passierten, ungünstig verändert. Die im Gebirge schon hereingebrochene Regenzeit hatte verheerend eingewirkt, ihn stellenweise mit Felsengeröll bedeckt und starke Rutschungen veranlaßt. Mehrere Brücken waren völlig vernichtet, sodaß wir zu weiten Umwegen gezwungen waren, oder sie waren so defect geworden, daß wir es nicht wagen durften, das Maulthier sammt Carga hinüberzuführen, sondern es entlasten mußten, jedes Gepäckstück einzeln befördernd.

Indessen besaß ich selbst ein gutes Pferd, welches überdies so gute Freundschaft mit dem Lastmaulthier pflegte, daß dieses immer so eiligst als möglich ihm zu folgen suchte, was denn auch den Burschen in Trab erhielt. Dem habe ich es zuzuschreiben, daß ich mein nächstes Ziel trotz der ungünstigen Jahreszeit ebenso glücklich und schnell wie das erste Mal erreicht habe.

Von Villavicencio aus sollte ich mich der Post anschließen, welche alle 10 Tage von Bogotá nach Orocué abgeht. Ich wechselte die Thiere und erhielt nun statt des Pferdes ein Reitmaulthier, denn in den Llanos wird den Maulthieren mehr noch als im Gebirge der Vorzug gegeben, und nahm einen neuen Arriero an.

Wir sollten bis zum Rio Humea, einem Nebenfluß des Meta, reiten, wo wir in Puerto Canal ein Boot treffen würden, das uns in etwa 4 Tagen nach Orocué am Meta brächte.

Wiederum überschritt ich den Rio Ocoa, der nun aber so hoch angeschwollen war, daß die Carga halb ins Wasser eintauchte. Riesige Fischottern spielten unter lautem Geheul am Ufer und ließen sich durch unsere Karawane nicht verscheuchen, die sich

Digitized by Google

durch einen Peon nebst seiner Gattin Antonia noch vergrößert hatte. Im Walde jagten wir einen Trupp Bisamschweine vom Wege fort. Nach einer Stunde gelangten wir in die Grasebene, die schon saftig grün erschien und im Frühlingskleide prangte, das ihr der erste Regenmonat angelegt hatte, auch Blumen, weiße Lilien und Aarongewächse, verschiedene blaue Papilionaceen und rötliche Mimosenblüten hervorzaubernd. In dem hohen Grase weideten Rudel von Rehen. Dieser liebliche Anblick versöhnte uns einigermaßen mit der Sonne, die heute glühendheiß aus wolkenlosem Himmel auf uns niederbrannte.

Gegen Abend erreichten wir unsere Herberge „Los Pavitos". Unsere Wirte waren sehr dunkelfarbige Mischlinge, welche außer einer Anzahl ihnen ähnlichen Nachkommen einen etwa 6jährigen weißen Sohn, einen Albino, besaßen — mein Arriero begrüßte ihn als Caquita — dessen zarte, weiße Haut und hellflachsfarbenes Haar in seiner Umgebung besonders auffällig wirkte. Der kleine Kerl war sehr lichtempfindlich und schien auch auf die Stiche der Mosquitos besonders stark zu reagieren. Die Post war schon angelangt, sie bestand zu meinem Erstaunen nur aus einem halbwüchsigen Burschen, und einem mit allerhand Bündeln bepackten Lastthier.

Unser Quartier fanden wir unter einem Palmendache. Seitenwände fehlten. Das Bett trug ich in Gestalt meiner Hängematte mit mir, die ich nahe am Rande des Daches aufhing. In ihr verbrachte ich die Vorabendstunde und die Dämmerung. Die Ebene, in welche wir hinausblicken, schließt am Horizonte mit einem Waldstreifen ab, der sich an einem Fluß entlang zieht. In der Nähe ist spärliches, sehr lichtes Buschwerk aufgeschossen, an das sich große, weiße Laubfrösche anklammern, und auf dessen Zweigen Libellen sich niederlassen. Nicht ferne von uns erhebt sich malerisch eine Palmengruppe. Sonst aber bedeckt die Ebene langes Gras. Noch herrscht tiefe Ruhe, aber gegen Abend vernehmen wir aus verschiedenen Richtungen das Brüllen von zahlreichen Ochsen, welche sich unserem Gehöft nähern, um in seiner Nähe die Nacht zu verbringen und zuvor begierig das Salz zu lecken, welches auf einigen Steinen als Lockmittel ausgestreut ist. Den Tag über weiden sie bald in jener, bald in dieser Richtung meilenweit entfernt. Der Sonnenuntergang war köstlich, obwohl sich der Himmel im Westen bezogen hatte; denn zwischen den Wolken schossen die glühenden letzten Strahlen empor und warfen ihr Licht auf die Palmenwipfel und die Wasser des Sumpfes, in denen sie sich spiegelten.

Ich wäre gerne, um der Hitze zu entgehen, in den ersten

Digitized by Google

Morgenstunden weitergeritten, und die Post und mein Arriero hatten die besten Vorsätze, aber ich durfte froh sein, sie mit Sonnenaufgang reisefertig zu haben. Freilich die Tropenglut sollten wir, zwei Mittagsstunden abgerechnet, die wir in Barrancas, einer Hacienda, rasteten, den ganzen Tag ohne Milderung wiederum auskosten, denn kein Wölkchen erschien am Himmel, und Wald durchritten wir nur auf wenige Minuten bei Flußübergängen. Die Metallbeschläge am Sattelzeuge waren zum Verbrennen heiß geworden. Man glaubte schier ersticken zu müssen, denn kein Lüftchen regte sich. Kein unnützes Wort kam mehr über unsere Lippen. In den Grassteppen begegnen wir nur einigen Rudeln von Rehen, wo aber ein Sumpf sich befindet, tummeln sich unzählige Reiher und Enten, und in den Wipfeln der Palmen, die hier zerstreute Gruppen bilden, hocken Papageien und Pfefferfresser. Nur wo Wasser steht oder fließt, entfaltet sich in den Llanos ein reicheres Thier- und Pflanzenleben. Fast eine halbe Stunde vor Puerto Canal nahm uns der Wald auf, der hier noch dichter aufgeschossen ist, als an den Abhängen der Ostcordilliere über Villavicencio. An einigen Baumriesen hingen zahllose Nester von Webervögeln. Sie waren an den äußersten Spitzen der peripheren Zweige befestigt. In der Ferne hörten wir wiederum das Brüllen von Fischottern. Es schallte vom Rio Humea her, den wir, vollständig ermattet, erreichten.

Hier lag das Boot bereit, und mit dem Aufgang des Mondes, nachts gegen 11 Uhr, stießen wir vom Ufer ab. Ich hatte zuerst nichts als ein paar Bretter als Lager und ein Theertuch als Dach, aber ich schlief, trotzdem es mir auch an Platz zum Ausstrecken gebrach, sofort ein und erwachte erst im Rio Meta, wo wir bei Cabuyaro Station machten, und mich der freundliche Alkalde mit einem gewählten Desayuno wieder auffrischte.

Nach 3 Tagen und 4 Nächten erreichten wir Orocué.

Es war die Reise von Puerto Canal bis Orocué meine abenteuerlichste. Ein kleines Boot, auf dem schon gewaltig breiten Meta, gerudert von zwei Indios und gesteuert von einem Mulatten, die Zurüstungen zu der Morgen- und Abendmahlzeit irgend wo am Ufer, und die Mahlzeiten selbst, getrocknetes, übelriechendes Fleisch, schlecht gekochte Yucca und Cassabe, und das Rasten für ein paar Nachtstunden auf irgend einer Sandbank: das alles war so romantisch, wie wir es als Knaben in irgend einem Indianerbuche gelesen haben. Die Landschaft ist noch unberührter als am Magdalena. Nur selten tritt die Grasebene bis an die Ufer heran, die sonst überall dichter, üppiger Wald begrenzt, in dessen Bestande Palmen

Digitized by Google

eine vorwiegende Rolle spielen. Ausgedehnte Playas schieben sich reichlich in den Fluß vor, aber das Krokodil ist auf ihnen viel seltener als im mittleren Magdalena. Dagegen treffen wir auf Scharen von Reihervögeln. Wir sind froh, im Laufe des Tages wenigstens eine Ansiedlung begrüßen zu können, wo Indios mit viel schwarzem Blut, Rindvieh und Geflügel züchtend, im Schatten eines kleinen Bananenhaines und einiger Mangobäume ihr anscheinend so idyllisches Dasein führen. Sie laden uns freundlich ein, in ihrer Hängematte Platz zu nehmen, und eine Schaale schwarzen Kaffees wird uns immer zu Teil. Beim Abschied handelte ich ein paar Hähnchen ein, um etwas Abwechslung in unser Mahl zu bringen.

In Orocué traf ich einen Landsmann, Herrn Franzius aus Bremen, dessen Existenz mir schon in Bogotá bekannt geworden war. Er gestattete mir gerne, meine Hängematte unter seinem Dache auszuspannen. Herr Franzius ist seit 6 Jahren in dem weltentlegenen Orocué als Exporteur und Importeur und Kaufmann ansässig.

Orocué ist ein recht armseliger Ort mit ungefähr 400 Seelen, der seit etwa 30 Jahren besteht. Seine Bedeutung liegt in seinem Import an europäischen Waaren in die Llanos bis Villavicencio und dem Export von Naturproducten, wie Häuten (Ochsen-, Reh- und Tigerfellen), Caucho (Gummi vom Gummibaum), Carafia, einem Harz, Copaivabalsam (aus dem Arbole de Acete de Palo gegen Gonorrhoea), Sarsaparilla, einer Liane, (Extract gegen Syphilis) und feinen Reiherfedern und auch einigen Kunsterzeugnissen der benachbarten Piapoco- und Guahiboindianer, unter denen die Chinchorros (Hängematten) den ersten Rang einnehmen.

An dem Handel sind außer unserem Landsmann ein Franzose, Bonnet, der aber sein Hauptgeschäft in Bogotá hat, und ein Venezuelaner, Ramon Real, beteiligt. Durch Herrn Bonnet wurde vor einigen Jahren mit erheblicher Unterstützung der columbianischen Regierung eine Dampferverbindung stromabwärts mit Ciudad Bolívar ins Leben gerufen. Sie wird durch einen einzigen kleinen Hinterraddampfer, der stolz „Libertador“ getauft ist, unterhalten. Der „Libertador“ geht bei günstigem Wasserstande sogar bis in den Humea hinauf. Etwas später ließ sich auch Ramon Real einen noch kleineren Dampfer bauen, „Boyacá“ genannt, der nun dem „Libertador“ Concurrenz macht. Mit einem dieser beiden Fahrzeuge hoffte ich meine Reise fortsetzen zu können. Freilich war fürerst günstiger Wasserstand abzuwarten.

Meine Muße in Orocué benutzte ich, meine Sammlung mit

Digitized by Google

Vertretern der Llanos zu vervollständigen und Ethnographica von den Guahiboindianern zu erwerben, welche Orocué oft besuchten. Diese Indianer, welche sich südlich bis zum Rio Vlichada ausdehnen, sind noch völlig wild und gehen meist, abgesehen von einem dürftigen Schurze, nackt. Es sind gar keine üble Gestalten, und auch ihre Gesichtszüge haben mich keineswegs abgestoßen. Civilisierter sind die namentlich im Flechten von Tellern geschickten Piapoco.

Manche Tage waren völlig heiter, an anderen goß es fast ununterbrochen Regen in Strömen. Inzwischen begann im Urwald eine gelbe Blütezeit, und überall sah man Bäume so voll von gelben Blüten, wie bei uns im Frühling den Goldregen.

Vor dem Dorfe war ein Prachtbaum, welcher im lebhaftesten Feuerrot strahlte. Er besaß fast nur Blüten, die den Papilionaceentypus zeigten. Man nannte ihn dort „Josephine". Schon begannen die Mango zu reifen, und nun, im ersten Drittel des Maies, stieg der Meta immerwährend, so daß täglich mehr Playas versanken, und die Felsenriffe, „Arecifres", die sich im Fluß absetzen und aus einem eisenhaltigen Ton bestehen, immer tiefer untertauchten, zum Verderben der Schiffer.

Der „Boyacá" trat zuerst die Reise an, und ich zögerte nicht, obwohl er der kleinere und minder comfortable war, ihn zu benutzen, zumal mir die einzige Cabine, welche sonst der schwarze Capitain innehatte, zugesichert wurde.

Die Landschaft verändert sich erst nach einigen Tagen nahe der Mündung des Meta, wo vor uns jene Gebirge auftauchen, welche namentlich das rechte Ufer des Orinocco fast bis nach Ciudad Bolívar begleiten. Es sind Hügelketten, aber unserem nunmehr schon an die endlose Ebene gewöhnten Auge erscheinen sie am Horizonte als recht imposante Erhebungen. Am 4. Tage nach unserer Abreise von Orocué fahren wir in den Orinocco ein und dicht an den Hügelketten entlang, welche in ihren dichten Bewaldungen einen anmutigen Anblick gewähren. Häufig begegnen uns aber auch nackte, rundlich abgeschliffene, riesige Felsenmassen, und mitunter sehen wir einen solchen Block mit einer Anzahl großer Felskugeln gekrönt, so daß er den Eindruck eines Cyclopendenkmals macht. Ein anderes Mal glauben wir, cyclopische Mauern vor uns zu haben.

Am 6. Tage unserer Reise gabelt sich der mächtige Strom, und wir biegen in den linken Seitenarm ein, welcher sich zu einem Engpaß von kaum 100 m Breite gestaltet, der durch weit in den Fluß vorspringende Felsmassen begrenzt wird. Aber über alle

Digitized by Google

sind die hier ungestüm dahinschießenden Fluten des Stromes schon hinweggerauscht, denn immer ist ihre Form abgerundet. Es kann uns dies nicht wundern, steigt doch der Orinocco bei Ciudad Bolívar, welches wir am nächsten Tage erreichen sollten, schon normalerweise um 40 m.

Die Gegend am unteren Meta ist noch weniger von civilisierten, d. h. spanisch redenden und katholisch getauften Menschen besiedelt als sein oberer Lauf. Hier herrschen, wie auch zunächst unterhalb der Metamündung am Orinocco, noch die Indianer, von denen uns aber auch nur zwei Ansiedlungen vom Fluß aus zu Gesicht gekommen sind.

Vor Ciudad Bolívar liegen am Orinocco einige Städte, von denen ich in einer, Caicara, es ist eine Districtshauptstadt, das elendeste Oertchen, das mir überhaupt zu Gesicht gekommen ist, kennen lernte. Ueberall Schmutz und Zerfall!

Die Reise von Orocué nach Ciudad Bolívar machten wir in nur 7 Tagen; stromaufwärts braucht unser Dampfer mindestens die doppelte Zeit. Ein Segelboot (Lancha) würde uns aber erst in 3 Monaten diesen Weg gegen den Strom vollenden lassen.

Die Temperatur war fortgesetzt schwül und schwankte am Tage zwischen 23—28° R. Das Wasser maß im Orinocco 22° R. dicht hinter dem Eintritt des Meta. Es ist etwas reiner als das kühlere Metawasser. Beides tranken wir nach einigem Sichabsetzenlassen aus Tongefäßen, worin es sich noch merklich abkühlte, ohne daß wir Nachteile verspürten. Der Wald nimmt am Orinocco weit oberhalb Ciudad Bolívar einen anderen Character an, indem die sonst hoch über ihn hinausragenden Palmen völlig verschwinden. Ueber dem Flusse schweben zahlreiche, große, weiße Möven mit schwarzen Flügelspitzen, und aus den Fluten springen von Zeit zu Zeit hellschimmernde Delphine auf.

Ciudad Bolívar liegt unmittelbar am Orinocco und ist an einer mäßigen Anhöhe amphitheatralisch aufgebaut. Am Fluß führt eine breite Straße entlang, welche uns durch ihre vielen, großartigen Geschäftshäuser überrascht. Bolívar ist ein berüchtigt heißer Ort, die Temperatur war einige Tage vor unserer Ankunft in einem besonders kühlen Store auf 35° R. gestiegen. Rings um die Stadt findet sich eine Gesträuchvegetation, die auf mich einen ganz versengten Eindruck machte.

Eine letzte Fahrt mit einem Royal Mail-Dampfer führt uns in einem Tage und zwei Nächten nach Trinidad.

Im Bereich des Orinocco-Delta herrscht wieder üppiger Urwald, der noch wilden Indianern gehört, deren braunrote Gestalten

Digitized by Google

wir öfters in kleinen Booten den Strom kreuzen sahen. Wir fahren den Macareo hinauf. Am 2. Morgen liegt Port of Spain vor uns. Im Hintergrunde erheben sich stattlich die Gebirge von Trinidad, deren Contouren wir weit nach Norden verfolgen.

Ich gedachte, in Port of Spain nur eine Gelegenheit zur Ueberfahrt nach Venezuela abzuwarten, da ich in St. Esteban bei Puerto Cabello meine zoologischen Studien fortsetzen wollte. Ein heftiges Unwohlsein hielt mich indes auf der Insel fest, und, nachdem ich mich etwas erholt hatte, erwies sich die Gelegenheit, auf Trinidad zu sammeln, so günstig, daß ich überhaupt dort zu bleiben beschloß, zumal ich in allen meinen Interessen die liebenswürdigste Förderung von unserem Consul, Herrn Hoffmann, fand.

Erst Mitte Juni trat ich die Rückreise über Barbados an.

Meine Reise hat außer den am Eingang dieses Berichtes genannten Körperschaften auch die Hamburg-Amerikanische Packetfahrt A.-G. gefördert, indem sie mir für die Ueberfahrt nach Barranquilla eine Ermäßigung gewährte. Ferner haben mich viele meiner Landsleute im Auslande mit Rat und That unterstützt. Ich darf es nicht unterlassen, ihnen allen auch öffentlich meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Göttingen, im November 1897.

Digitized by Google

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Digitized by Google

Digitized by Google

DO NOT CIRCULATE

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 04839 1570

Digitized by Google